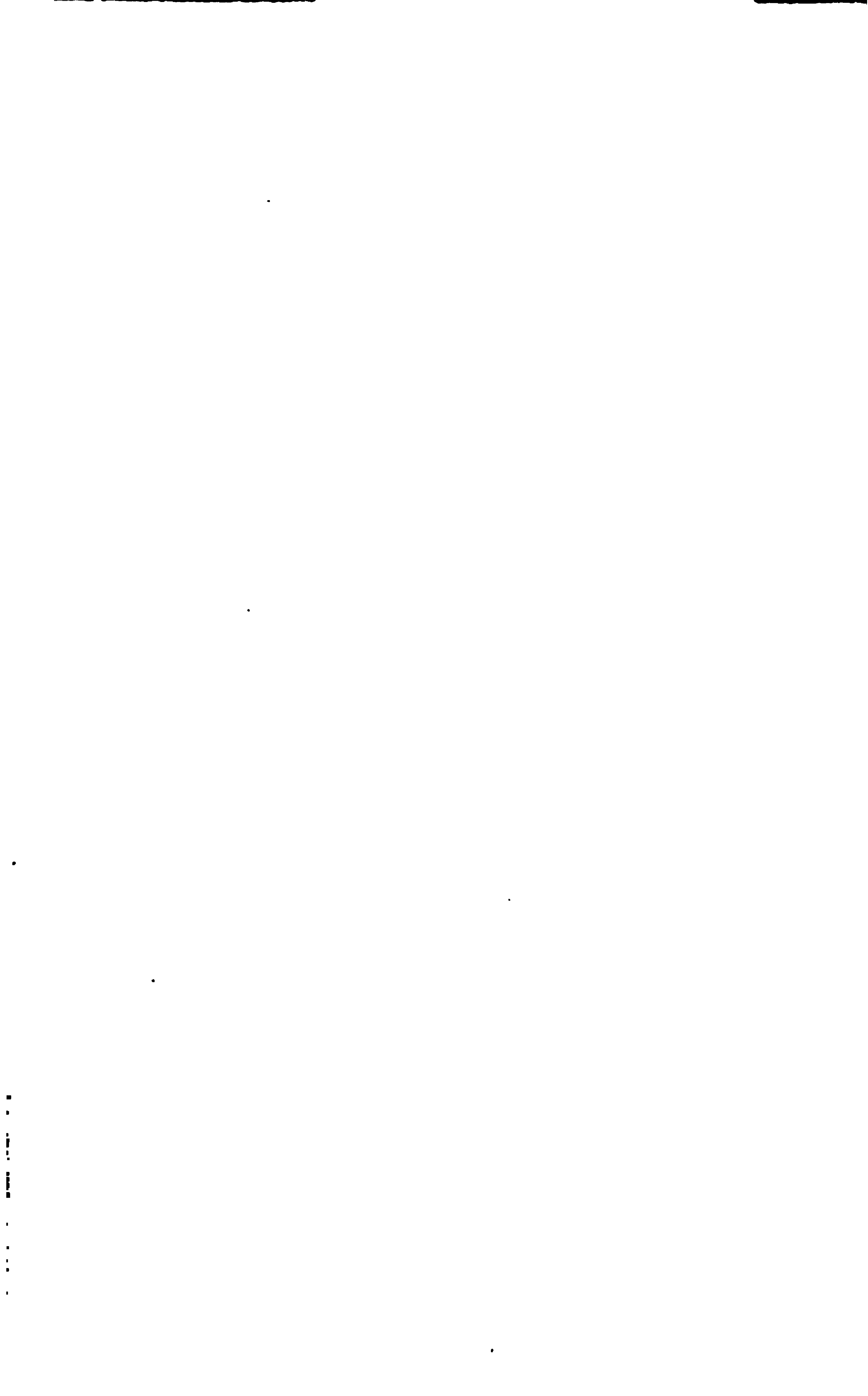
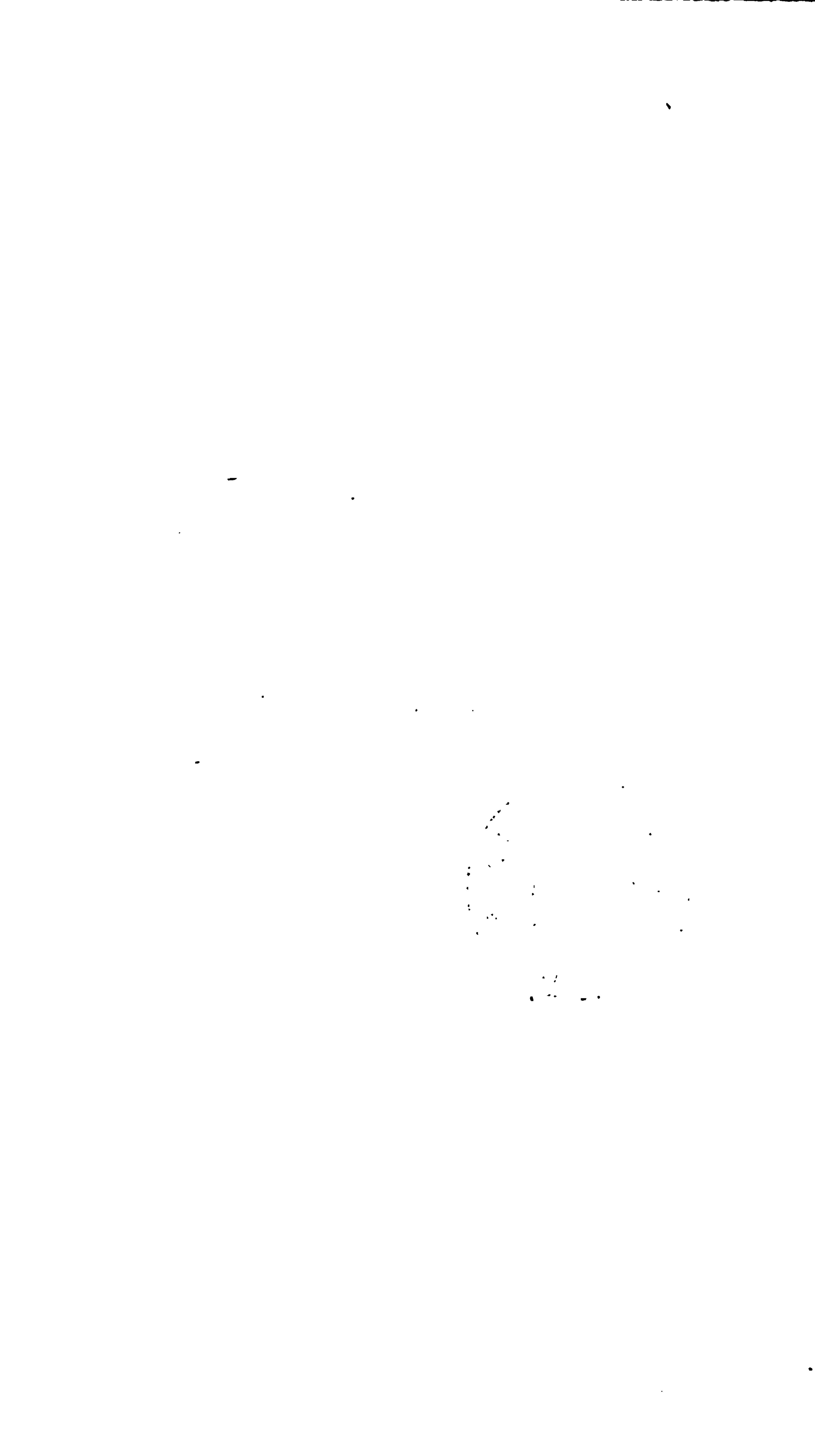










THEORETISCHE

MASCHINENLEHRE

VON

DR. F. GRASHOF,

GEH. HOFRATH, PROFESSOR AM POLYTECHNICUM ZU CARLSRUHE.

IN VIER BÄNDEN.

ERSTER BAND.

LEIPZIG,

VERLAG VON LEOPOLD VOSS.

1875.

HYDRAULIK

NEBST

MECHANISCHER WÄRMETHEORIE

UND

ALLGEMEINER THEORIE DER HEIZUNG

VON

DR. F. GRASHOF,

GEH. HOFRATH, PROFESSOR AM POLYTECHNICUM ZU CARLSRUHE.

MIT 58 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,

VERLAG VON LEOPOLD VOSS.

1875.



Vorwort.

Indem ich den ersten Band dieses Werkes dem technischen Publicum abgeschlossen vorlege, erscheint mir eine Erläuterung und Motivirung seines Planes um so mehr geboten, als es der Maschinenwissenschaft an einer allseitig anerkannten präcisen Gliederung bisher gefehlt hat und selbst ihre Fundamentalbegriffe und ihre Ziele einer vielfach abweichenden Bestimmung unterliegen. Die Begriffsbestimmung der theoretischen Maschinenlehre setzt natürlich vor Allem eine Definition der Maschine als ihres Objectes voraus. Ich verstehe darunter einen Mechanismus oder eine Verbindung von Mechanismen zum Zwecke einer bestimmten mechanischen Arbeitsleistung, unter einem Mechanismus aber eine Verbindung von Körpern von bestimmter gegenseitiger Beweglichkeit.

Diese Begriffsbestimmung der Maschine enthält zwei verschiedenartige Einzelbestimmungen, von denen nur die eine, welche sie als Mechanismus oder Verbindung von Mechanismen bezeichnet, eine sachliche Definition ist, während die andere sie als ein Hülfsmittel zweckmässiger Thätigkeit charakterisirt, mit deren vervielfachten und veränderten Zielen auch der Umfang und die einzelnen Probleme des Maschinenwesens variabel sind. Nur in der ersteren Beziehung ist die Maschinenlehre eine sachlich bestimmt abgegrenzte Wissenschaft, welche, insoweit sie von der Massenhaftigkeit der beweglichen Körper und von den wirksamen Kräften (ausser sofern dieselben etwa zur Sicherung einer bestimmten relativen Beweglichkeit der Maschinentheile wesentlich beitragen) abstrahirt, vielmehr nur die auf Sätzen der Geometrie und der Phoronomie (Lehre von der Bewegung an und für sich) beruhende Vermittelung einer bestimmten gegenseitigen Beweglichkeit der zum Mechanismus verbundenen Körper in Betracht zieht, als Kinematik einer selbständigen wissenschaftlichen Bearbeitung unterzogen

wurde. In Betreff der in ihr wirksamen Kräfte, der Massen und der (durch die Mechanismen an sich nur verhältnissmässig bestimmten) Geschwindigkeiten ist die Maschine ein Problem der angewandten Mechanik, dem aber auch sowohl mit Rücksicht auf seine Gebundenheit an die als Mechanismus bezeichnete Körperverbindung von besonderer Art, als auch mit Rücksicht auf die wirthschaftliche Bedeutung der mannigfachen Zwecke mechanischer Arbeitsleistung der Charakter einer besonderen Wissenschaft zugesprochen werden kann.

Wenn der Mechanismus resp. die Mechanismenverbindung erst durch den Zweck der Arbeitsleistung zur Maschine wird, so ist die Eintheilung der Maschinen in erster Reihe von der Classification jener Arbeitszwecke abhängig zu machen. Vor Allem ist nun diese mechanische Arbeit, deren Verrichtung durch die Maschine bezweckt wird, entweder nur quantitativ durch ihre Grösse in der Zeiteinheit, nämlich allgemein durch eine Summe von Kräften nebst den Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte im Sinne der Kräfte, oder sie ist zugleich qualitativ durch die zu bewirkende Aenderung des räumlichen Zustandes eines Körpers resp. eines Aggregats von Körpern gegeben. Wenn zwar auch im ersten Falle die Arbeitsleistung durch die Bewegung eines Maschinenbestandtheils, also durch die Ortsänderung eines gewissen Körpers vermittelt wird, so wird dabei doch dieser eben nur als Hülfsmittel zur Uebertragung einer gewissen Kraftgrösse mit einer gewissen Geschwindigkeit resp. eines gewissen Kraftmomentes mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit betrachtet unter Abstraction von der Verwendung der entsprechenden Arbeit zur Aenderung des räumlichen Zustandes eines bestimmten Körpers oder Aggregats von Körpern. Mit nicht ganz zutreffenden, aber üblich gewordenen Benennungen unterscheidet man hiernach Kraft- oder Betriebsmaschinen und Arbeitsmaschinen, eine Unterscheidung, die dadurch nicht hinfällig wird, dass zuweilen beide Arten von Maschinen zu einem Ganzen vereinigt erscheinen. Erstere sollen ein gegebenes Arbeitsvermögen unter solchen Verhältnissen in mechanische Arbeit umsetzen, dass diese als Betriebsarbeit gewisser Arbeitsmaschinen geeignet ist; sie zerfallen naturgemäss in Gruppen je nach den Formen des in der Natur oder auch schon nach einer vorhergegangenen zweckmässig geleiteten Umformung disponiblen Arbeitsvermögens, welche verschiedenen Formen zu analysiren hier noch nicht der Ort ist. Die Arbeitsmaschinen können in Maschinen zur Ortsänderung und Maschinen zur Formänderung eingetheilt werden, wobei die Formänderung im

Allgemeinen zugleich eine Volumen- und Gestaltsänderung in sich begreift. Freilich ist eine Formänderung stets auch mit einer Ortsänderung, diese häufig mit jener verbunden, so dass zuweilen dieselbe Arbeitsmaschine je nach der Betrachtungsweise als ortsändernde oder formändernde gelten kann, wie überhaupt der Zweck, da er andere gleichzeitige Zwecke, insbesondere solche Aenderungen nicht ausschliesst, die als wesentlich zur Erreichung jenes Zweckes zugleich mit bezweckt werden müssen, natürlich stets nur eine relativ zutreffende Eintheilung bedingen kann. Mit Rücksicht darauf indessen, dass Flüssigkeiten einer selbständigen (von derjenigen einer sie einschliessenden Hülle unabhängigen) Form nicht fähig sind, erscheint es gerechtfertigt und können zugleich die Zweifel der fraglichen Eintheilung dadurch in der Hauptsache vermieden werden, dass der Begriff der formändernden Maschine auf solche Arbeitsmaschinen beschränkt wird, die zur beabsichtigten Formänderung fester Körper übrigens unabhängig davon dienen, ob damit zugleich eine mehr oder weniger erhebliche Ortsänderung verbunden ist, dass aber alle übrigen Arbeitsmaschinen, insbesondere solche, die zu irgend einer Aenderung des räumlichen Zustandes von Flüssigkeiten dienen, zu den ortsändernden Maschinen gerechnet werden. Die Maschinen zur Formänderung sind als Fabrikationsmaschinen zu bezeichnen, wenn die dadurch in ihrer Form geänderten Körper unter den Begriff des Fabrikates fallen, d. h. einer durch Bearbeitung von Körpern hergestellten Waare oder eines Zwischenproducts zur Herstellung einer solchen. —

Die Charakterisirung der Wissenschaft, die in diesem Werke als „theoretische Maschinenlehre“ dargestellt werden soll, wird verdeutlicht durch eine Uebersicht der besonderen Wissenschaften, in welche ausserdem die Maschinenlehre zerlegt zu werden pflegt. Von denselben behandelt die allgemeine Maschinenlehre die Maschine historisch und beschreibend in möglichst vollständiger und systematisch geordneter Uebersicht ihrer Classen, Gruppen und Arten, wobei die Zwecke in erster, die Mechanismen zu ihrer Erreichung in zweiter Reihe als Eintheilungsprincipien dienen. Ihr stehen gegenüber die speciellen Maschinenlehren, welche gewisse Classen oder Gruppen von Maschinen specieller behandeln, sei es mit Rücksicht auf eine grössere Mannigfaltigkeit von Arten und auf die Berücksichtigung von Einzelheiten der Anordnung sowie der Anforderungen praktischer Verwendung unter verschiedenen Umständen, sei es insofern, als zugleich andere Gesichtspunkte (solche der theoretischen Maschinenlehre und

des Maschinenbaues) mit der historischen und beschreibenden Darstellung verbunden werden.

Die mechanische Technologie, indem sie die mechanische Verarbeitung der Körper zu Fabrikaten lehrt, hat die Besprechung der Fabrikationsmaschinen mit der allgemeinen Maschinenlehre resp. mit den betreffenden speciellen Maschinenlehren gemein. Indem sie aber von den Eigenschaften der gegebenen Rohstoffe oder Zwischenproducte und von den beabsichtigten Eigenschaften der Fabrikate auszugehen hat, soll sie sich nicht auf eine historische und beschreibende Darstellung beschränken, sondern die angewendeten oder vielmehr die der Natur der Sache nach anwendbaren Mittel zur Erreichung des Zwecks unter den gegebenen Umständen systematisch deduciren und kritisch erörtern. Sofern diese Mittel nicht nothwendig in der Benutzung von Maschinen zu bestehen brauchen, sowie auch durch ihre Rücksichtnahme auf Güte und Werth des Fabrikates als Handelswaare und auf die Wirthschaftlichkeit des Fabrikationsverfahrens hat sie vielfach über das Gebiet der Maschinenlehre hinauszugehen, so dass sie nicht eigentlich als ein Zweig derselben, sondern als eine verwandte Wissenschaft bezeichnet werden kann, für welche gewisse specielle Maschinenlehren als Hülfs- oder Ergänzungswissenschaften zu betrachten sind. Weil übrigens die Formänderung der Körper mit einer Aenderung ihrer chemischen Beschaffenheit vielfach Hand in Hand geht, ist die Trennung der mechanischen von der chemischen Technologie in mancher Hinsicht schwankend und willkürlich.

Die Maschinenbaukunde lehrt die einem gegebenen Zweck der Maschine unter gegebenen Umständen angemessen entsprechende constructive Gestaltung derselben bezüglich der Disposition der sie zusammensetzenden Mechanismen, sowie der Gestalten und Dimensionen der einzelnen Bestandtheile dieser Mechanismen mit Rücksicht auf ihr Verhalten unter dem Einflusse der auf sie wirkenden Kräfte und mit Rücksicht auf die Vortheilhaftigkeit ihrer praktischen Herstellung. Jenes Verhalten betrifft die Widerstandsfähigkeit gegen Bruch und Deformation, sowie die Abnutzung durch Reibung und die Schädigung durch Einflüsse, die je nach den Umständen verschieden sein können. Insoweit es diese hauptsächlichsten Rücksichten gestatten, soll auch der ästhetischen Erscheinung ihr Recht zu Theil werden. Der constructive Maschinenbau, indem er das der materiellen Ausführung (dem praktischen Maschinenbau) unmittelbar vorhergehende Endziel der Maschinenwissenschaft ist, setzt die theoretische Maschinenlehre voraus;

ausserdem sind seine wesentlichsten Hülfswissenschaften die darstellende Geometrie, die Elasticitäts- und Festigkeitslehre, Materialienkunde und diejenigen Theile der mechanischen Technologie, die von der Bearbeitung der zu Maschinentheilen benutzbaren Stoffe, insbesondere der Metalle handeln.

Die theoretische Maschinenlehre endlich, wie ich sie wenigstens hier verstehe, hat die Aufgabe, im Wesentlichen theoretisch auf Grund der Gesetze der Mechanik (nur nöthigenfalls ergänzt durch empirische Thatsachen) zu untersuchen, wie der in einer bestimmten mechanischen Arbeitsverrichtung bestehende Zweck der Maschine auf principiell verschiedene Weisen, insbesondere auf die einfachste Weise und mit möglichst wenig Verlust an disponiblem Arbeitsvermögen erreicht werden kann; sie hat die Bewegung der Maschine sowohl in Betreff ihres geometrischen Charakters und der damit zusammenhängenden Geschwindigkeitsverhältnisse, als auch in Betreff der durch die bewegten Massen und die bewegenden Kräfte bedingten absoluten Grössen dieser Geschwindigkeiten zu untersuchen; sie hat diese Kräfte durch die Maschine hindurch zu verfolgen und deren Abmessungen zu bestimmen, insoweit dies nicht nach Obigem zur Aufgabe des Maschinenbaues gehört; endlich hat sie nicht nur diese Bestimmungen mit Rücksicht auf möglichst vollständige Verwerthung des disponiblen Arbeitsvermögens auszuführen, sondern auch die Grösse des unter gegebenen Umständen erreichbaren Vollkommenheitsgrades dieser Verwerthung nachzuweisen. Die allgemeine Anordnung einer in Untersuchung gezogenen Maschinenart nimmt sie zwar meistens (aus der allgemeinen Maschinenlehre) als gegeben an und beschränkt sich auf deren theoretische Prüfung und nähere zweckmässige Bestimmung; doch soll es freilich ihr Ziel sein, die zu bestimmten Zwecken verfügbaren Formen des Arbeitsvermögens und machinalen Hülfsmittel systematisch zu erörtern und mit Rücksicht auf ihre principielle Vortheilhaftigkeit zu prüfen. Mit dieser Steigerung ihrer Aufgabe darf sie indessen in mehrfacher Hinsicht eine Beschränkung verbinden. Im Gegensatz zur allgemeinen und zu den speciellen Maschinenlehren beschränkt sie sich auf eine geringere Zahl principiell wichtiger Unterscheidungen verschiedener Maschinensysteme; die Maschinen zur Formänderung betrachtet sie im Wesentlichen nur mit Rücksicht auf die Grösse und Oekonomie der Arbeitsleistung und überlässt solche, bei denen diese Rücksichten in den Hintergrund treten, vielmehr fast nur die Art der Arbeit, die Beschaffenheit und Güte des Fabrikates in Betracht kommen,

ganz der mechanischen Technologie oder den betreffenden speciellen Maschinenlehren; im Gegensatz zur Maschinenbaukunde endlich genügen ihr einfache Skizzen oder gar nur schematische Darstellungen des machinalen Organismus, indem die Rücksichten der praktischen Ausführung in den Einzelheiten für sie nebensächlich sind, und sie vielmehr der Maschinenbaukunde es überlässt, die Resultate ihrer Untersuchungen in Betreff ihrer constructiven Brauchbarkeit zu prüfen und zu sichten.

Trotz dieser Beschränkungen bleibt die Aufgabe der theoretischen Maschinenlehre eine sehr grosse, und es soll nicht behauptet werden, dass sie in dem vorliegenden Werke mit genügender Vollkommenheit gelöst werde. Ueber die Art, wie es wenigstens versucht und der Inhalt unter vier Bände vertheilt wurde, mögen die folgenden Bemerkungen hier Platz finden.

Der erste Band behandelt Hülfswissenschaften, deren Kenntniss für die theoretische Maschinenlehre nöthig ist, die aber in den Lehrbüchern der Physik und der theoretischen Mechanik nicht in solcher Weise und Ausdehnung behandelt zu werden pflegen, dass eine einfache Verweisung darauf genügen könnte. Vor Allem gehört dahin die Hydraulik, die in ihrer für die Maschinenlehre verwendbaren Form allzusehr mit empirischen Elementen und nur angenähert zutreffenden vereinfachenden Annahmen versetzt ist, als dass sie in der theoretischen Mechanik ihre passende Stelle finden könnte, während die erheblichen Fortschritte, die freilich die hydraulischen Untersuchungen in der neueren theoretischen Physik gemacht haben, zu schwierige analytische Methoden erfordern und gleichwohl doch noch zu erhebliche Lücken unausgefüllt lassen, als dass ihre Verwendung in solcher Form den Studirenden der Maschinenlehre und den ausübenden Maschinentechnikern zuzumuthen wäre. Die Kenntniss der Hydraulik ist aber für die theoretische Maschinenlehre Bedürfniss besonders mit Rücksicht auf wichtige Formen, in denen das für die Zwecke der Maschine disponible Arbeitsvermögen an Flüssigkeiten gebunden vorkommt, ferner mit Rücksicht auf wichtige Arbeitsmaschinen, die es mit dem Transport von Flüssigkeiten und event. (im Falle von luftförmigen Flüssigkeiten) zugleich mit ihrer Volumenänderung zu thun haben, ferner mit Rücksicht auf die Verwendung von Flüssigkeiten als Uebertragungsmittel von Kräften, endlich in Betreff des Widerstandes fester Körper bei ihrer Bewegung in Flüssigkeiten. Eine sehr wichtige, ja die wenigstens im gegenwärtigen Stadium der Technik wichtigste Form, in

welcher das durch Maschinen verwerthbare Arbeitsvermögen von der Natur uns dargeboten wird, diejenige Form, auf welche streng genommen alle mit einziger Ausnahme des Arbeitsvermögens der Fluthwellen zurückgeführt werden können, ist die Wärme, und es ist deshalb mit einer Darstellung der mechanischen Wärmetheorie der Anfang gemacht worden um so mehr, als auch schon die allgemeinen und besonders die auf luftförmige Flüssigkeiten bezüglichen Gesetze der Hydraulik wesentlich durch sie bedingt werden. Indem aber die Wärme vorwiegend gebunden als Heizeffect brennbarer Körper uns nutzbar gegeben ist, handelt ein dritter Abschnitt des ersten Bandes von den Principien, auf denen die möglichst ökonomische Entwickelung dieser chemisch gebundenen Wärme durch Verbrennung und ihre Verwerthung durch Mittheilung an andere, insbesondere an flüssige Körper beruht, während die Art, wie die Körperwärme der letzteren dann weiter in die Form mechanischer Arbeit verwandelt werden kann, principiell schon in dem von der mechanischen Wärmetheorie handelnden ersten Abschnitte besprochen werden musste, specieller aber erst in der Theorie der calorischen Kraftmaschinen zu besprechen blieb.

Mit dem zweiten Bande beginnt erst die theoretische Maschinenlehre selbst, und zwar soll er die Maschine besonders mit Rücksicht auf den sachlichen Theil ihrer Definition behandeln, demzufolge sie als ein Mechanismus oder eine Verbindung von Mechanismen, der Mechanismus aber als eine Verbindung von Körpern von bestimmter gegenseitiger Beweglichkeit definirt wurde. Sofern also hierbei einstweilen der Zweck nicht in Betracht kommt, mit Rücksicht auf welchen die Maschinen in Kraft- und Arbeitsmaschinen verschiedener Classen, Gruppen und Arten eingetheilt werden können, hat diese Lehre von den Mechanismen einen in höherem Grade sachlich begrenzten und selbständigen wissenschaftlichen Charakter, namentlich ihr erster und hauptsächlichster Theil, die Kinematik, die von Reuleaux bezeichnet und behandelt wird als „die Wissenschaft von derjenigen besonderen Einrichtung der Maschine, vermöge deren die gegenseitigen Bewegungen in derselben, soweit sie Ortsveränderungen sind, zu bestimmten werden.“ Die theoretische Maschinenlehre hat aber ferner die Mechanismen auch in Beziehung auf die mit ihrer Bewegung unter Einwirkung von Kräften verbundenen Reibungen zu untersuchen, insofern dieselben Arbeitsverluste verursachen, während die gleichzeitig dadurch bedingte Abnutzung in den Bereich der dem Maschinenbau zu-

kommenden Erwägungen fällt. Endlich sollen schon hier in Verbindung mit der allgemeinen Mechanismenlehre die Hülfsmittel (Mechanismen oder Bestandtheile von solchen) einer besonderen Untersuchung unterworfen werden, welche den Gang der Maschine in bestimmter Weise zu reguliren, d. h. eine gesetzmässige Veränderlichkeit der durch die gegenseitigen Bewegungen in der Maschine einzig in Betreff ihrer Verhältnisse bestimmten Geschwindigkeiten zu bewirken, besonders sie in gegebene Grenzen einzuschliessen geeignet sind, insoweit wenigstens diese Hülfsmittel einen allgemeineren, von dem besonderen Zweck der Maschine unabhängigen Charakter haben.

Der zweite Band dieses Werkes wird ausserdem einen Abschnitt enthalten, der zwar gemäss der hier zu Grunde liegenden Auffassung nicht eigentlich einen Theil der Maschinenlehre ausmacht, indessen doch angemessener Weise in Verbindung damit und zwar im Anschluss an die Lehre von den Mechanismen abgehandelt wird; er betrifft das Wesen und die Theorie der **Instrumente zur Messung mechanischer Grössen** (Zeiten, Geschwindigkeiten, Massen, Kräfte und mechanische Arbeiten), sowie auch der Instrumente zum Zählen und mechanischen Rechnen. Sachlich können dieselben ebenso wie Instrumente zu mancherlei anderen Zwecken (z. B. zu geodätischen, optischen musikalischen Zwecken: Theodolit, Teleskop, Klavier etc.) ganz derselben Definition wie eine Maschine entsprechen, ohne mit Rücksicht auf den verschiedenen Zweck hier als solche verstanden zu werden. Indessen sind die oben bezeichneten, zum Zählen und zum Messen mechanischer Grössen dienenden Instrumente als wesentlichste Hülfsmittel zur erfolgreichen Anstellung von Beobachtungen und Versuchen von so erheblicher Wichtigkeit für die Maschinenwissenschaft, deren Vervollkommnung grossentheils nur durch zuverlässige messende Beobachtungen ermöglicht wird, dass eine Uebersicht und theoretische Besprechung derselben gerechtfertigt erscheint, und zwar vor dem Eintritt in die speciellere Maschinenlehre, dagegen im Anschlusse an die Lehre von den Mechanismen, aus denen sie im Wesentlichen ebenso wie eine Maschine gebildet sein können.

Für die im **dritten Bande** abzuhandelnde Theorie der Kraftmaschinen ist besonders der Umstand charakteristisch, dass hier die Zweckmässigkeit vorwiegend in Wirthschaftlichkeit besteht. Sie stellt sich zwar in erster Reihe die Aufgabe, die z. Z. üblichen und bewährten Arten von Kraftmaschinen, indem sie Princip und allgemeine Anordnung derselben als gegeben voraussetzt, in Betreff ihrer princi-

piell zweckmässigsten Constructionsverhältnisse und ihres vortheilhaftesten Ganges theoretisch zu untersuchen und die unter gegebenen Umständen erreichbare Grösse ihrer Nutzarbeit zu bestimmen; sie soll aber auch prüfen, ob und wie etwa jene Anordnungen zu modificiren sind, um ein noch besseres Resultat bezüglich auf grösstmögliche Verwerthung des disponiblen Arbeitsvermögens zu Nutzarbeit zu erreichen. Ihr allgemeines Ziel besteht in einer wissenschaftlichen Discussion der principiell möglichen und mit den Anforderungen des Maschinenbaues wenigstens voraussichtlich nicht unvereinbaren machinalen Hülfsmittel zu möglichst wirthschaftlicher Verwerthung der natürlich gegebenen verschiedenen Formen von Arbeitsvermögen als Betriebsarbeit zu technischen Zwecken, sowie in der Vergleichung des wirthschaftlichen Werthes der entsprechenden verschiedenen Gruppen und Arten von Kraftmaschinen mit Rücksicht auf die (mit Ort und Zeit im Allgemeinen variablen) Umstände. Die Entwickelung der volkswirthschaftlichen Zustände hat eine Tendenz zur Concentration gewisser Industriezweige zur Folge besonders in solchen Bezirken, wo die nöthigen Betriebskräfte am ausgiebigsten und billigsten zu beschaffen sind. Wenn auch durch vermehrte und verbesserte Verkehrswege manche bisher entlegene kleinere natürliche Betriebskräfte für die Industrie verwendbar werden und insofern eine grössere Vertheilung der letzteren dadurch bedingt wird, so wird doch andererseits auch die Gelegenheit dadurch vermehrt, dass Fabriken und Werkstätten sich gruppenweise concentrirt an Orten ansiedeln, wo ein grosses Arbeitsvermögen disponibel, insbesondere auch in solcher Form natürlich gegeben ist, dass es bisher kaum vortheilhaft nutzbar war noch ausgiebig benutzt wurde, wie namentlich die lebendige Kraft des in grösseren Flüssen strömenden Wassers und das Arbeitsvermögen der an Meeresküsten mit der Ebbe und Fluth periodisch gehobenen und gesenkten Wassermassen; das Bedürfniss hierzu wird wahrscheinlich einst eintreten und um so mehr zunehmen, je mehr die Vorräthe an für uns zugänglichen fossilen Brennstoffen als der z. Z. noch wichtigsten und vorzugsweise transportablen Form des natürlich gegebenen Arbeitsvermögens erschöpft werden. Ein solches auf grosse Massen vertheiltes Arbeitsvermögen wird aber zu seiner vortheilhaften Benutzung vor Allem grössere Kraftmaschinen-Anlagen erfordern, für welche dasselbe nach seiner Umsetzung in die Form von technisch nutzbarer Betriebsarbeit die Bedeutung einer Handelswaare gewinnt, die auf grössere Entfernungen zu transportiren und an die einzelnen Abnehmer der

gewerblichen Ansiedelung nach Maass abzugeben ist. Indessen auch abgesehen von solchen Zukunftsbildern arbeiten schon die heutigen Kraftmaschinen bis zu weit liegenden Grenzen um so vortheilhafter, je grösser sie sind, und schliesst sich deshalb die Discussion der Mittel zur Fortpflanzung und geregelten Vertheilung von Betriebsarbeit nahe an die Theorie der Kraftmaschinen an als eine Untersuchung, die im Lauf der Zeit wahrscheinlich immer mehr an Wichtigkeit gewinnen wird, so wenig auch (in Uebereinstimmung mit einer Ausführung Reuleaux's) aus mancherlei Gründen eine noch weiter getriebene Concentration der industriellen Anlagen wünschenswerth erscheinen mag. Uebrigens hat sich solche Untersuchung nicht auf die Fortleitung von Arbeitsvermögen in der Form entwickelter Bewegungsarbeit zu beschränken, sondern alle möglichen Formen zu umfassen, insbesondere z. B. die des Gebundenseins als Heizeffect eines brennbaren Gases, in welcher Form die fragliche Leitung auf weit grössere Entfernungen vortheilhaft zu ermöglichen ist und so in Verbindung mit entsprechend vortheilhaft arbeitenden kleineren Gaskraftmaschinen einer wenigstens auf städtische Entfernungen getrennten selbständigen Hausindustrie die zu ihrer Concurrenzfähigkeit nöthige Betriebsarbeit verschafft werden kann.

Von den Arbeitsmaschinen endlich sollen im vierten Bande hauptsächlich diejenigen einer theoretischen Untersuchung unterworfen werden, welche zur Ortsveränderung von Körpern entgegen gewissen Widerstandskräften dienen, von formändernden Maschinen dagegen nur solche, bei denen die Grösse der zu verrichtenden Arbeit wesentlich in Betracht kommt und einer theoretischen Bestimmung bisher zugänglich gemacht werden konnte; ihre Prüfung in Beziehung auf Güte der Arbeit wird besonders der mechanischen Technologie überlassen. Eine speciellere Uebersicht des Inhalts dieses Bandes würde, wenn sie mehr als eine unvermittelte Aufzählung von Einzelheiten sein soll, auf eine begründungsbedürftige Classification hinauslaufen, der aber, da sie nicht ganz einfach ist und von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen kann, hier nicht vorgegriffen werden soll. —

Was insbesondere den hier zunächst vorliegenden ersten Band betrifft, so soll es weder als Verdienst, noch als Maassstab seines wissenschaftlichen Gehaltes in Anspruch genommen werden, wenn er umfänglicher ausfiel, als ursprünglich in der Absicht lag. Manche der darin behandelten Probleme können vielleicht als in zu losem Zusammenhange mit den Aufgaben der Maschinenlehre stehend erscheinen, andere

mögen bei geschickterer Darstellung einer kürzeren und übersichtlicheren Behandlung fähig gewesen sein; zum grossen Theil aber ist die Umfänglichkeit dieses Bandes eine Folge des mangelhaften Zustandes der darin vorzugsweise behandelten Hydraulik, welcher es nöthig machte, einen unverhältnissmässig grossen Raum zur Besprechung und Verarbeitung von empirischen Thatsachen zu verwenden. Insbesondere gilt das von den Bewegungsgesetzen luftförmiger Flüssigkeiten, die mit der gebührenden Rücksichtnahme auf die Principien der mechanischen Wärmetheorie am unvollständigsten ausgebildet sind, so dass theils verschiedene Anschauungen zugleich berücksichtigt werden mussten, wo ein endgültiges Urtheil über die relative Vorzüglichkeit der einen oder anderen noch nicht thunlich schien, theils namentlich die betreffenden Versuche zur Werthbestimmung gewisser mit den Formeln zu verbindender Erfahrungscoefficienten einer fast vollständigen Neuberechnung bedurften nebst Rechtfertigung dieses Rechnungsverfahrens gegenüber dem seither befolgten.

Schliesslich seien mir nur noch einige Worte über die Methode der Darstellung gestattet, die ich mit Rücksicht darauf zu beurtheilen bitte, dass mit dem Buche weder ein Leitfaden zu Vorträgen, noch überhaupt ein Lehrbuch zur ersten Einführung in die betreffende Wissenschaft bezweckt ist. Wenn es mir freilich bei meinen eigenen Vorträgen Dienste leisten soll, so bestehen dieselben doch im Wesentlichen nur in einer Ergänzung, sofern es gestattet, unter Verweisung der Zuhörer auf seine theils allgemeineren Entwickelungen, theils specielleren Ausführungen und Anwendungen, den Inhalt der Vorträge im Ganzen auf eine Uebersicht, im Einzelnen auf das principiell und technisch Wichtigste zu beschränken, wobei dann die mathematische Entwickelung mehrfach einer anderen, mehr direct auf das gerade behandelte Problem abzielenden Anlage bedarf, als es im vorliegenden Werke geschehen ist. Bei diesem bin ich in der Regel der Art vom Allgemeinen zum Besonderen fortgeschritten, dass ein zunächst möglichst allgemein charakterisirtes Problem erst nach und nach durch die Einführung weiter beschränkender Annahmen specialisirt und vereinfacht wurde, sobald die Entwickelung zu einem Punkte gediehen war, an welchem dazu das Bedürfniss sich herausstellte, um sie überhaupt oder wenigstens so weiter führen zu können, dass sie Resultate lieferte, die in Betreff ihrer Einfachheit und Brauchbarkeit dem Zuverlässigkeitsgrade der zu Grunde liegenden Anschauungen und empirischen Thatsachen sowie den Bedürfnissen technischer Verwendung möglichst entsprechend

seien. Wenn es dann freilich vorkommen kann, dass am Ende ei
solchen durch mehrere Stadien schrittweise vereinfachten Probl
u. A. ein so einfaches Resultat erscheint, welches, wie z. B. die
kannte Formel für die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers, d
summarische Einführung aller jener nach und nach erst gemachten
nahmen auf weit kürzerem Wege hätte erhalten werden könne
kann ich doch die betreffende Bemängelung in einer Kritik (Zeits
des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover), über die ich
im Uebrigen zu beklagen keine Veranlassung habe, dass nämlich
solcher Methode durch den Schein einer wissenschaftlichen Schärfe
doch so wesentlich empirische Grundlage des fraglichen Resultats
hüllt werde, nicht als gerechtfertigt anerkennen. Sofern es nur ni
versäumt wird, die nach und nach eingeführten Annahmen ausdrückl
als solche zu kennzeichnen, kann durch diese nur schrittweise Ei
führung derselben jener vermeintliche Schein für Denjenigen nicht
weckt werden, der die ganze Entwickelung des verzweigten Probl
verfolgt und nicht nur die Endresultate ohne nähere Prüfung sich
eignet. Ausserdem aber können nur auf solche Weise die Einflü
dieser Beschränkungen und Annahmen auf die Gestaltung des Probl
und seiner Entwickelung einzeln erkennbar werden, und wird es
gleich dadurch ermöglicht, dass die Behandlung irgend einer Aufg
die dem allgemeinen Problem als Specialfall von höherer oder nied
Ordnung angehört, nicht jedesmal von Grund aus wiederholt zu wer
braucht, sondern an passender Stelle der Entwickelung des stufenw
mehr specialisirten Gattungsproblems angeknüpft werden kann. D
Rede stehende Bemängelung würde nur dann gerechtfertigt sein, w
die bei der stufenweisen Bearbeitung eines allgemeineren Probl
nach und nach erhaltenen und einstweilen unvollständig ausgeführt
bliebenen Zwischenresultate weder an anderen Stellen des Werkes V
wendung fänden, noch überhaupt bei vervollständigten Methoden u
Erfahrungen und für neu auftauchende Probleme irgend eine V
wendung zu finden Aussicht hätten. Somit glaube ich auch in den
genden Theilen dieses Werkes dieselbe übrigens auch an und für
den Anforderungen einer möglichst wissenschaftlichen Gliederung e
sprechende Methode der Darstellung in der Regel beibehalten zu s

Carlsruhe, im Juli 1875.

Der Verfasser.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Mechanische Wärmetheorie.

A. Grundbegriffe und allgemeine Sätze.

Paragraph		Seite
1.	Zustand eines Körpers	1
2.	Aeusserer Zustand eines Körpers	3
3.	Innerer Zustand eines Körpers	7
4.	Differentialgleichungen zur Untersuchung der Zustandsänderung eines festen Körpers unter der Einwirkung gegebener äusserer Kräfte	15
5.	Differentialgleichungen zur Untersuchung der Zustandsänderung einer Flüssigkeit (im weiteren Sinne) unter der Einwirkung gegebener äusserer Kräfte	21
6.	Deformationsarbeit und Gleichung der lebendigen Kraft eines Körpers	28
7.	Wärme und Temperatur	33
8.	Voraussetzungen und Bezeichnungen; Zustandsgleichung	37
9.	Wärmemittheilung durch Berührung	41
10.	Wärmemittheilung durch Strahlung	45
11.	Aequivalenz von Wärme und Arbeit; Wärmegleichung und Gleichung des Arbeitsvermögens	58
12.	Allgemeine Gleichungen zur Bestimmung der Zustandsänderung einer Flüssigkeit (im weiteren Sinne) unter gegebenen Umständen	63
13.	Umkehrbare und nicht umkehrbare Verwandlungen und Zustandsänderungen	70
14.	Kreisprocesse und Aequivalenz der Verwandlungen	78
15.	Verschiedene Formen der Wärmegleichung; erste und zweite Hauptgleichung	91
16.	Geometrische Darstellung der Vorgänge bei umkehrbaren Zustandsänderungen	98

B. Verhalten der Gase, insbesondere der atmosphärischen Luft.

Paragraph — Seite

17. Definitionen, Erfahrungssätze und Annahmen; Zustandsgleichung der Gase . . . 100
18. Bestimmung der Temperaturfunction T . . . 106
19. Specifische Wärme und inneres Arbeitsvermögen der Gase . . . 108
20. Zustandsänderung nach dem Gesetze: $pv^m = Const.$ Isothermische, isodynamische und adiabatische Curve der Gase . . . 112
21. Bestimmung des Verhältnisses $n = \frac{c_1}{c}$ . . . 116

C. Verhalten fester und flüssiger Körper.

22. Verhalten von Flüssigkeiten, insbesondere des Wassers . . . 123
23. Verhalten fester Körper . . . 133
24. Uebergang aus der festen in die flüssige Aggregatform . . . 137

D. Verhalten der Dämpfe, insbesondere des Wasserdampfes.

25. Gesättigter und überhitzter Dampf; Gemische von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit . . . 139

I. Gesättigter Dampf.

26. Beziehung zwischen Pressung und Temperatur . . . 141
27. Verdampfungswärme . . . 146
28. Specifisches Gewicht gesättigter Dämpfe . . . 150
29. Tabelle für gesättigten Wasserdampf . . . 153

II. Gemische von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit.

30. Allgemeine Formeln für umkehrbare Zustandsänderungen solcher Gemische . . . 157
31. Zustandsänderung bei constanter Pressung oder Temperatur . . . 160
32. Zustandsänderung bei constantem Volumen . . . 161
33. Zustandsänderung bei constantem Gewichtsverhältnisse von Dampf und Flüssigkeit . . . 163
34. Zustandsänderung bei constantem inneren Arbeitsvermögen . . . 166
35. Zustandsänderung ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme . . . 167
36. Mischung zweier Dampf- und Flüssigkeitsgemische von gleicher Art und verschiedenem Zustande . . . 177

III. Ueberhitzter Dampf.

37. Erfahrungsmässige Grundlagen . . . 180
38. Zustandsgleichung der Dämpfe . . . 185
39. Andere Form der Zustandsgleichung . . . 195
40. Wärmegleichung und inneres Arbeitsvermögen der Dämpfe . . . 206

Paragraph		Seite
41.	Zustandsänderung nach dem Gesetze: $pv^m = Const.$	208
42.	Zustandsänderung bei constanter Temperatur	212
43.	Wärmemenge zur Erzeugung überhitzten Dampfes aus der betreffenden Flüssigkeit bei constanter Pressung	213
44.	Mischung zweier Dampfmengen von gleicher Art und verschiedenem Zustande	216

E. Molekulartheorie der Wärme.

45.	Molekularzustand eines Körpers	220
46.	Innere Bewegung	234
47.	Bestandtheile des inneren Arbeitsvermögens und der Körperwärme	242
48.	Der Verwandlungsinhalt eines Körpers und seine Bestandtheile	246
49.	Wahre specifische Wärme	255
50.	Allgemeine Form der Zustandsgleichung eines Körpers von gleichförmigem Wärmezustande	257
51.	Molekulartheorie und Zustandsgleichung von Gasen und Dämpfen	265

Zweiter Abschnitt.

Hydraulik.

52.	Charakterisirung der Flüssigkeiten; Erfahrungscoefficienten	279

A. Gleichgewicht der Flüssigkeiten (Hydrostatik).

53.	Allgemeine Gesetze; Niveauflächen	285

I. Gleichgewicht des Wassers.

54.	Voraussetzungen	291

a. Gleichgewicht des Wassers ohne Rücksicht auf Molekularkräfte.

55.	Niveauflächen und Druckhöhe in verschiedenen Fällen	292
56.	Hydrostatischer Druck auf ausgedehnte Flächen	298
57.	Gleichgewicht schwimmender Körper	304
58.	Oscillationen schwimmender Körper	317

b. Gleichgewicht des Wassers mit Rücksicht auf Molekularkräfte.

59.	Der Cohäsionsdruck und die Cohäsionsconstante	323
60.	Der Randwinkel und die Adhäsionsconstante	328
61.	Gewicht der gehobenen Flüssigkeit	332
62.	Erhebung des Wassers an einer ebenen Wand	334
63.	Capillarität	337
64.	Tropfen und Blasen	353
65.	Modification des hydrostatischen Druckes durch Molekularwirkung	357

II. Gleichgewicht der Luft.

Paragraph Seite
66. Allgemeine Bemerkungen 361
67. Barometrische Höhenmessung 364
68. Bestimmung des specifischen Gewichts der Körper 374

B. Bewegung der Flüssigkeiten.

69. Uebersicht der Aufgaben und ihrer Behandlung 380

I. Allgemeine Sätze.

70. Widerstandslose Bewegung einer Flüssigkeit für den Fall der Existenz einer Kraftfunction und einer Geschwindigkeitsfunction . . . 386
71. Wirbellinien und Wirbelfäden 394
72. Strömende Bewegung längs gegebenen Bahnen 398
73. Permanente Strömung längs gegebenen Bahnen 406

II. Strömende Bewegung in Gefässen und Röhren.

74. Voraussetzungen und Bezeichnungen 409

a. Permanente Bewegung.

75. Allgemeine Gleichungen 412
76. Hydraulische Bewegungswiderstände 416
77. Vereinigung von Flüssigkeitsströmen 422

1. Permanente Bewegung des Wassers.

78. Fundamentalgleichungen 426

α. Ausfluss des Wassers aus Gefässen.

79. Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge 428
80. Reaction des ausfliessenden Wassers; Maximum der Contraction . . 433
81. Ausfluss aus bewegten Gefässen 438
82. Bestimmung der Erfahrungscoefficienten 440
83. Kreisförmige Mündungen 445
84. Rechteckige Mündungen 449
85. Rechteckige Mündungen mit Ansatzgerinnen 458
86. Cylindrische Ansatzröhren 461
87. Conische Ansatzröhren 472
88. Zusammengesetzte Ansatzröhren 473

β. Bewegung des Wassers in Röhren.

89. Leitungswiderstand gerader cylindrischer Röhren 477
90. Gesetz des Leitungswiderstandes nach Hagen mit Rücksicht auf die Versuche von Darcy 486

Paragraph | Seite

91. Widerstand von Knie- und Kropfröhren 494
92. Widerstand in Folge plötzlicher Aenderung des Rohrquerschnitts . 499
93. Einfache Wasserleitung 508
94. Leitungsröhre, welche der Forderung grösstmöglicher lebendiger Kraft des ausfliessenden Wassers entspricht 513
95. Leitungsröhre, deren Weite und hindurchfliessende Wassermenge vom einen zum anderen Ende stetig veränderlich ist 519
96. Zusammengesetzte Wasserleitung 527
97. Städtische Wasserleitung 532
98. Bewegung des Wassers durch Sandfilter 540

2. Permanente Bewegung der Luft.

99. Fundamentalgleichungen 546

α. Ausfluss der Luft aus Gefässen.

100. Ausflussmenge und Zustand der ausfliessenden Luft 548
101. Andere Gestalt der Ausflussformeln, nach Zeuner 559
102. Erfahrungscoefficienten 566
103. Theilweise Neuberechnung der Weisbach'schen Versuche 580

β. Bewegung der Luft in Röhren.

104. Voraussetzungen und allgemeine Gleichungen 592
105. Bewegung der Luft in einer Röhre, durch deren Wand eine nur unwesentliche Wärmeleitung stattfindet 593
106. Bestimmung des Leitungswiderstandes 597
107. Beispiele 605
108. Einfluss besonderer Widerstände 614
109. Bewegung der Luft in einer Röhre, durch deren Wand eine wesentliche Wärmeleitung stattfindet 625

3. Permanente Bewegung der Dämpfe.

110. Fundamentalgleichungen 630

α. Ausfluss der Dämpfe aus Gefässen.

111. Theoretische Formeln 634
112. Versuche 639
113. Sicherheitsventile von Dampfkesseln 646

β. Bewegung der Dämpfe in Röhren.

114. Bewegung in einer Röhre, durch deren Wand eine nur unwesentliche Wärmeleitung stattfindet 656
115. Bewegung der Dämpfe in Röhren mit Rücksicht auf die Wärmeleitung der Rohrwände 661

b. Veränderlicher Ausfluss aus Gefässen.

1. Des Wassers.

Paragraph | Seite

116. Ausfluss des Wassers aus einem Gefässe, welches keinen Zufluss hat 668
117. Besondere Fälle 677
118. Ausfluss des Wassers aus einem Gefässe mit constantem Zufluss . . 679
119. Communicirende Gefässe 680
120. Füllungs- und Entleerungszeit von Schleusenkammern 682

2. Veränderlicher Ausfluss von Luft und Dampf aus Gefässen.

121. Communicirende Gefässe 688
122. Besondere Fälle 693

III. Bewegung des Wassers in Canälen.

123. Grundbegriffe und Bezeichnungen 699

a. Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten in verschiedenen Punkten eines Querschnitts bei permanenter Bewegung.

124. Theoretische Entwickelung 705
125. Empirische Gesetze 714

b. Gleichförmige permanente Bewegung des Wassers in Canälen.

126. Beziehung zwischen der mittleren Geschwindigkeit, dem relativen Gefälle und den Dimensionen eines Querschnitts 723
127. Verschiedene Aufgaben 741
128. Vortheilhafteste Querschnittsformen 744
129. Einfluss von Krümmungen 748

c. Ungleichförmige permanente Bewegung des Wassers in Canälen.

130. Fundamentalgleichung 753
131. Allgemeines Verfahren einer angenäherten Bestimmung der freien Wasseroberfläche 755
132. Staucurve bei Voraussetzung eines cylindrischen Canals 757
133. Entwickelte Gleichung der Staucurve 761
134. Verschiedene Specialfälle 771
135. Der Wassersprung 783

d. Einfluss plötzlicher Querschnittsänderungen.

136. Vorbemerkungen und Uebersicht verschiedener Fälle 790
137. Vollkommene Ueberfälle 796
138. Unvollkommene Ueberfälle 803
139. Freie Wandöffnung mit Ansatzgerinne 809
140. Aufstau des Wassers durch seitliche Querschnittsverengung . . . 813

IV. Bewegung freier Wasserstrahlen.

Paragraph — Seite

141. Steighöhe springender Strahlen. Erfahrungsresultate 814
142. Versuch einer theoretischen Entwickelung 821

V. Wellenbewegung des Wassers.

143. Erklärungen und Bezeichnungen 830
144. Wellen von sehr kleiner Höhe 833
145. Wellen von grösserer Höhe 841
146. Wellen bei unendlich grosser Wassertiefe 844
147. Wellen bei kleiner und gleichförmiger Wassertiefe 849
148. Wellen bei grösserer gleichförmiger Wassertiefe 858
149. Wellen bei ungleichförmiger Wassertiefe 862

VI. Druck zwischen Flüssigkeiten und festen Körpern bei ihrer relativen Bewegung.

a. Druck des Wassers auf relativ bewegte feste Körper.

150. Druck eines freien Wasserstrahls auf eine feste Fläche 866
151. Versuche über den Druck freier Wasserstrahlen 871
152. Druck eines begrenzten Wasserstroms auf einen festen Körper . . 875
153. Druck des unbegrenzten Wassers auf relativ bewegte feste Körper . 883
154. Erfahrungen über den hydraulischen Druck und Widerstand des Wassers 890

b. Druck der Luft auf relativ bewegte feste Körper.

155. Druck eines freien Luftstrahls auf eine feste Fläche 893
156. Druck unbegrenzter Luft auf feste Körper bei ihrer relativen Bewegung 897

Dritter Abschnitt.

Heizung.

157. Uebersicht der Aufgaben 901

A. Verbrennung.

158. Brennstoffe 902
159. Heizeffect der Brennstoffe 908
160. Luftbedarf und Producte der Verbrennung 915
161. Verbrennungstemperatur; Einfluss der Strahlung und des Wirkungsgrades der Feuerung 918
162. Beschaffenheit und Bedienung des Herdes 922
163. Aussergewöhnliche Mittel zur Vervollkommnung einer Feuerung . . 928

B. Wärmetransmission durch feste Wände.

Paragraph Seite

164. Fundamentalgesetz des permanenten Wärmedurchganges durch eine Wand 935
165. Erfahrungswerthe 938
166. Heizflächen 946
167. Berechnungsmethode einer Heizanlage 952

C. Zugwirkung der Esse.

168. Allgemeine Gleichungen 955
169. Erfahrungswerthe 961
170. Beispiele und Näherungsformeln 965

ERSTER ABSCHNITT.

Mechanische Wärmetheorie.

Die folgende Darstellung der mechanischen Wärmetheorie beschränkt sich im Wesentlichen auf diejenigen hauptsächlichsten und als sicher begründet zu betrachtenden Sätze, welche für die Anwendungen, besonders in Betreff des Verhaltens von Gasen und Dämpfen, wichtig sind. Zum Zwecke einer logischen Entwickelung ist es im Sinne dieser Theorie vor Allem nöthig, die Grundbegriffe der Wärmelehre auf bekannte Begriffe der Mechanik und der allgemeinen Physik durch eine gegliederte Folge entsprechender Definitionen zurückzuführen, insbesondere schon die ersten Grundbegriffe von Wärme selbst und von Temperatur streng objectiv und rein mechanisch zu definiren. Dabei wird zunächst von allen Hypothesen in Betreff des Wesens der Materie und der Constitution der Körper absichtlich abstrahirt, um nicht die zu entwickelnden Hauptsätze als abhängig von jenen noch vielfach unvollkommenen und schwankenden Vorstellungen erscheinen zu lassen.

A. Grundbegriffe und allgemeine Sätze.

§. 1. Zustand eines Körpers.

Wenn man von dem Raume spricht, welchen ein physischer, materieller Körper einnimmt, um das Volumen und die Begrenzungsfläche jenes Raumes als das Volumen und die Oberfläche des materiellen Körpers zu definiren, so liegt dabei die Vorstellung einer continuirlichen Raumerfüllung durch die Materie zu Grunde. Bei den mathematischen Untersuchungen über den Zustand und die Zustandsänderungen eines Körpers unter Anwendung der höheren Analysis, welche die Denkbarkeit seiner

Zerlegung in unendlich kleine, continuirlich an einander grenzende Elemente von gleichartiger Beschaffenheit erfordert, muss, wie es im Folgenden geschieht, von jener Vorstellung wenigstens als einer Abstraction von der in Wirklichkeit etwa als discontinuirlich vorausgesetzten materiellen Constitution des Körpers ausgegangen werden.

Der Zustand eines Körpers in einem gewissen Augenblicke ist bestimmt durch die augenblicklichen Zustände der (im Allgemeinen nach 3 Dimensionen) unendlich kleinen Elemente, aus welchen er bestehend gedacht werden kann; denn dem Begriffe des unendlich Kleinen gemäss ist unbeschadet der im Allgemeinen stetigen Zustandsverschiedenheit von Punkt zu Punkt eines Körpers doch der augenblickliche Zustand in allen Punkten eines unendlich kleinen Körperelementes als gleich und nur in verschiedenen Elementen als ungleich zu denken. Wenn ein solches Körperelement im Verlaufe der Zustandsänderungen eines Körpers beständig als der Inbegriff und Träger derselben bei der ursprünglichen Zerlegung darin enthaltenen Materie betrachtet wird, so soll es insbesondere als ein Massenelement des Körpers bezeichnet werden; einem solchen muss mit Rücksicht auf die nicht starre Beschaffenheit irgend eines physischen Körpers die Eigenschaft der Veränderlichkeit nach Grösse und Gestalt zugeschrieben werden. Materielle Punkte heissen die Massenmittelpunkte oder auch andere bestimmte Punkte der Massenelemente, in welchen ihre Massen vereinigt gedacht werden können. Wenn man dagegen die Zerlegung eines Körpers in Elemente bei verschiedenen Zuständen desselben wiederholt denkt, so sollen diese Elemente, welche jedesmal andere Materie enthalten können, als Volumenelemente des Körpers bezeichnet werden.

Eine bestimmte Zustandsänderung eines Körpers, bestimmt nämlich durch den Anfangs- und den Endzustand, kann auf unendlich mannigfache Weise stattfinden; das Gesetz (die Art) der Zustandsänderung ist bestimmt durch die Zustände des Körpers in Augenblicken, welche nach unendlich kleinen Zeitelementen auf einander folgen. Man betrachtet solche Zustandsänderungen zunächst als die Wirkungen von Ursachen so vielfach verschiedener Art, als man verschiedene Erscheinungsarten des Körperzustandes unterscheidet. Dabei können zwei solcher Ursachen selbst als in der Beziehung von Ursache und Wirkung zu einander stehend oder beide als Wirkungen derselben dritten Ursache erkannt werden. Auf die Erkenntniss solcher Beziehungen ist das Streben der Naturwissenschaft vorzugsweise gerichtet, um so die mannigfaltigen Naturerscheinungen als die Wirkungen möglichst weniger Ursachen von bestimmten Wirkungsgesetzen erklären zu können.

§. 2. Aeusserer Zustand eines Körpers.

Die Bewegung eines Körpers, wie sie in der Mechanik untersucht wird und auch im Folgenden zunächst nur verstanden werden soll, besteht in der messbaren continuirlichen Ortsänderung seiner Massenelemente. Die Richtungen und Grössen der Geschwindigkeiten dieser Elemente in einem gewissen Augenblicke bestimmen den augenblicklichen Bewegungszustand des Körpers; die Grössen jener Geschwindigkeiten insbesondere bestimmen die sogen. lebendige Kraft des Körpers = der Summe der lebendigen Kräfte seiner Massenelemente = der Summe der halben Producte aus den Massen und den Quadraten der Geschwindigkeiten dieser Elemente. Sind alle diese Geschwindigkeiten = Null, so ist die lebendige Kraft = Null, und umgekehrt; der Körper befindet sich dann im Ruhezustande. Der Zustand der Ruhe oder der Bewegung eines Körpers soll in der Folge sein äusserer Zustand genannt werden.

Die Bewegung eines Körpers kann im Allgemeinen, und zwar auf unendlich mannigfache Weise, bestehend gedacht werden aus der relativen Bewegung, d. h. der messbaren continuirlichen relativen Ortsänderung seiner Massenelemente gegen ein im Körper fixirtes System von Coordinatenaxen OX, OY, OZ, und aus der Bewegung dieses Axensystems; die letztere kann für jedes Zeitelement bekanntlich auf eine unendlich kleine Schraubenbewegung zurückgeführt werden, welche ihrerseits auf unendlich mannigfache Weise in eine unendlich kleine Translation und eine unendlich kleine Rotation zerlegbar ist, der Art jedoch, dass alle verschiedenen Rotationsaxen (Momentanaxen) parallel, sowie die Elementar-Rotationen um dieselben oder die entsprechenden augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten) gleich gross sind und in gleichem Sinne stattfinden, so dass nur die Lage der Momentanaxe nebst Grösse und Richtung der Translationsgeschwindigkeit verschieden sind. Ein Axensystem wird im Körper fixirt durch Fixirung seiner Lage gegen 3 materielle Punkte A, B, C des Körpers, indem man etwa den Ursprung O beständig mit dem Punkte A zusammenfallen, die Axe OX beständig durch den Punkt B und die Ebene XOY oder XOZ beständig durch den Punkt C gehen lässt, wobei vorausgesetzt ist, dass die fraglichen 3 Punkte nicht in gerader Linie liegen. Die relative Bewegung der Massenelemente eines Körpers gegen einander ist durch ihre relativen Bewegungen gegen irgend ein solches im Körper fixirtes Axensystem bestimmt und soll in der Folge schlechtweg die relative Bewegung des Körpers genannt werden; sind die relativen Geschwindigkeiten

1*

aller Massenelemente in Beziehung auf ein im Körper fixirtes Axensystem oder ist die entsprechende relative lebendige Kraft des Körpers = Null, so befindet sich derselbe in **relativer Ruhe** schlechtweg. Bei relativer Ruhe eines Körpers ist seine Bewegung vollkommen bestimmt durch diejenige eines Axensystems von fixirter Lage im Körper. In der That freilich ist jede von uns beobachtete Bewegung eines Körpers eine relative, wobei dann aber (im Gegensatze zu seiner schlechtweg so genannten relativen Bewegung) die ausdrückliche Bezeichnung des fremden Körpers resp. des in diesem fixirten Axensystems oder des sonstigen unveränderlichen Gebildes vorbehalten ist, worauf die Bewegung des betrachteten Körpers bezogen wird; nur die relative Bewegung eines irdischen Körpers gegen die Erde soll dem Sprachgebrauche gemäss schlechtweg als seine Bewegung bezeichnet werden.

Die auf einen Körper wirkenden **Kräfte**, welche als die Ursachen der Aenderungen seines äusseren Zustandes vorausgesetzt werden, sind theils Massenkräfte, theils Oberflächenkräfte; erstere sind an die Massenelemente gebunden, so dass sie als in ihnen angreifend gedacht werden können, letztere wirken auf die Oberfläche des Körpers, in deren Flächenelementen sie angreifend zu denken sind, unabhängig von den Massenelementen, welche sich gerade an der Oberfläche befinden. Die Arbeit der ersteren ist also bedingt durch die Bewegung der Massenelemente, die Arbeit der letzteren durch die Bewegung der Oberflächenelemente des Körpers. Uebrigens werden bekanntlich alle Kräfte hinsichtlich ihrer Grösse oder Intensität P auf dieselbe Weise gemessen: durch das Product einer Masse m und der ihr ertheilten Beschleunigung φ. Dabei kann entweder die Masseneinheit (als die Masse eines bestimmten Körpers) oder die Krafteinheit (als die Kraftgrösse, welche einer bestimmten Masse eine bestimmte Beschleunigung ertheilt) willkürlich gewählt werden, wonach durch die Gleichung

$$P = m\varphi$$

im ersten Falle die Krafteinheit, im zweiten Falle die Masseneinheit bestimmt ist, falls der Beschleunigungseinheit bestimmte Längen- und Zeiteinheiten zu Grunde gelegt werden. Mit Rücksicht auf die Unveränderlichkeit einer bestimmten Masse im Gegensatze zu der von den Umständen abhängigen Grösse irgend einer auf diese Masse wirkenden Kraft konnte das erstere Verfahren zwar rationeller, insbesondere auch dem Gebrauche unserer sogen. Gewichtssätze entsprechender scheinen, welche eigentlich Massensätze sind, indem ihre einzelnen Körper bestimmte Massen repräsentiren, indessen ist das zweite Verfahren das übliche, nach welchem im-

besondere die im Folgenden stets zu Grunde gelegte Krafteinheit, das Kilogramm, streng genommen definirt ist als das Gewicht (Grösse der Schwerkraft) eines Cubikdecimeters reinen Wassers im Zustande grösster Dichtigkeit (oder einer anderweitigen ebenso grossen Masse) an einem bestimmten Orte der Erde. Bei dem praktischen Gebrauche eines Gewichtssatzes zur unmittelbaren oder mittelbaren Messung von Kräften (z. B. zur Eintheilung der Skala eines zur unmittelbaren Messung dienenden Instrumentes) pflegt jedoch die Schwere des bestimmten Körpers des Gewichtssatzes unabhängig vom jedesmaligen Gebrauchsorte ein Kilogramm genannt und als Krafteinheit benutzt zu werden, so dass dann streng genommen diese Einheit an verschiedenen Orten der Erde einen verschiedenen, dem betreffenden Werthe der Beschleunigung g der Schwere proportionalen Werth hat. In der Folge wird stets:

$$g = 9{,}81^{*} \text{ für Meter und Secunde}$$

als Längen- und Zeiteinheit gesetzt, somit als **Krafteinheit** diejenige Kraftgrösse vorausgesetzt und ein **Kilogramm** genannt, wodurch einer Masse = der Masse von einem Cubikdecimeter Wasser im Zustande grösster Dichtigkeit eine Beschleunigung $g = 9{,}81$ ertheilt wird.

Die nach heutigen mechanischen Begriffen unpassende Bezeichnung „lebendige Kraft“ für eine Grösse, welche nicht mit einer Kraft, sondern mit der Arbeit einer Kraft (Einheit: ein Kilogramm-Meter) vergleichbar, d. h. von einerlei Art ist, stammt aus einer früheren Zeit, zu welcher man mit Leibnitz zweierlei Kräfte, todte und lebendige Kräfte, unterscheiden zu sollen glaubte.

Die **Massenkräfte** sind theils äussere, theils innere. Als **innere Massenkraft** kommt hier, nämlich als eine Ursache der Aenderung des **äusseren** Körperzustandes, nur die allgemeine Massenanziehung in Betracht, welche je zwei Massenelemente des Körpers gegenseitig auf einander ausüben und welche dem Product ihrer Massen direct, dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist; indessen ist bei irdischen, im Vergleich mit der Erde sehr kleinen Körpern die Gesammtwirkung dieser gegenseitigen Anziehungen so klein, dass davon in der Regel abstrahirt werden darf. Als **äussere Massenkräfte**, welche von der gegenseitigen

---

* Allgemein kann für die geographische Breite ψ und die Höhe h Meter über dem Meere gesetzt werden:

$$g = 9{,}8058\,(1-0{,}0026 \cos 2\psi)\,(1-0{,}000000314\, h),$$

wonach $g = 9{,}81$ nahezu der geographischen Breite $\psi = 50^0$ an der Meeresoberfläche entsprechen würde, einer grösseren Breite bei grösserer Höhe des Ortes über dem Meere.

Wirkung der Massenelemente des betrachteten Körpers auf einander unabhängig sind, kommen vorzugsweise in Betracht: bei der Bewegung eines irdischen Körpers die **Schwerkraft**, bei der Bewegung der Erde oder eines anderen Weltkörpers die Anziehungskräfte der übrigen, und im Falle einer relativen Bewegung diejenigen zwei Kräfte, welche zu den auf ein Massenelement wirkenden Kräften hinzugerechnet werden müssen, um die relative Bewegung desselben gerade so, als ob sie eine absolute Bewegung wäre, als die Wirkung aller Kräfte erscheinen zu lassen. Diese beiden Kräfte, welche in der Folge die **beiden Ergänzungskräfte der relativen Bewegung** genannt werden sollen, sind bekanntlich auf folgende Weise bestimmt. Ist S das selbst in Bewegung befindliche unveränderliche System (Axensystem), auf welches die relative Bewegung eines Körpers K bezogen wird, und ist für irgend einen Augenblick ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation von S um die Momentanaxe A, φ die Beschleunigung, welche das Massenelement dm von K augenblicklich besitzen würde, wenn es mit S fest verbunden, d. h. in relativer Ruhe gegen S wäre, ist endlich v' die Projection der relativen Geschwindigkeit von dm auf eine zu A senkrechte Ebene, so wird dem Massenelemente durch die erste Ergänzungskraft die Beschleunigung $= \varphi$ im entgegengesetzten Sinne der oben genannten Beschleunigung φ, durch die zweite Ergänzungskraft die Beschleunigung $= 2\omega v'$ senkrecht zu A und v' und zwar in solchem Sinne ertheilt, dass eine Drehung von 90^0 um A im Sinne von ω diese letztere Beschleunigung in die Richtung von v' versetzen würde. Da die zweite Ergänzungskraft stets normal zur relativen Bahn des Massenelementes ist, so ist ihre Arbeit = Null, und hat sie also auf die Aenderung der relativen lebendigen Kraft des Körpers bezüglich auf das System S keinen Einfluss. Bei der Untersuchung der schlechtweg so genannten Bewegung eines irdischen Körpers, d. h. seiner relativen Bewegung gegen die Erde, kommt die erste Ergänzungskraft der letzteren nicht weiter in Betracht, weil ihre Beschleunigung in der Beschleunigung g, wie solche der Richtung und Grösse nach beobachtet wird, bereits als Componente enthalten ist.

Die **Oberflächenkräfte**, von angrenzenden anderen Körpern herrührend und an den Berührungsstellen angreifend, können in normale und tangentiale unterschieden werden. Erstere kommen hier nur als **äussere Druckkräfte** (gegen die Oberfläche des Körpers hin gerichtete Kräfte), letztere als **Reibungen**, d. h. als Widerstandskräfte gegen die relativ gleitende Bewegung längs einem berührenden anderen Körper in Betracht. Unter dem **äusseren Drucke in einem gewissen Punkte der Körperoberfläche** wird der Quotient verstanden, welcher sich ergiebt

indem der äussere Druck auf ein jenen Punkt enthaltendes unendlich kleines Element der Oberfläche durch den Inhalt des letzeren dividirt wird; ist dieser äussere Druck in allen Punkten der Oberfläche gleich, so soll er der specifische äussere Druck des Körpers heissen. —

Unter den äusseren Kräften, welche auf einen Körper wirken, sollen übrigens in der Folge alle die genannten Ursachen der Aenderung seines äusseren Zustandes, also ausser den Oberflächenkräften nicht nur die äusseren Massenkräfte im engeren Sinne, sondern auch, sofern es überhaupt nöthig ist, darauf Rücksicht zu nehmen, die auf messbare Entfernung hin wirkende gegenseitige allgemeine Massenanziehung der Körperelemente verstanden werden.

§. 3. Innerer Zustand eines Körpers.

Der innere Zustand eines Körpers, soweit er im Folgenden (unter Abstraction von elektrischen, magnetischen und Lichterscheinungen) in Betracht kommt, ist bestimmt durch die chemische Beschaffenheit, die Aggregatform, das specifische Volumen und den Spannungszustand in den verschiedenen Punkten oder Elementen des Körpers.

Die chemische Beschaffenheit wird in der Folge als Körperart bezeichnet; zwei Körperelemente sind also gleichartig oder ungleichartig, je nachdem sie gleiche oder ungleiche chemische Beschaffenheit haben. Ein Körper ist von gleichförmiger Art, wenn alle seine Elemente gleichartig sind, wie es im Folgenden stets vorausgesetzt wird, sofern das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt ist. —

Hinsichtlich der Aggregatform* ist ein Körper fest, flüssig oder luftförmig.

Ein fester Körper ist charakterisirt durch die beschränkte Veränderlichkeit seines Volumens und seiner Gestalt, und durch die Unmöglichkeit der Mischung seiner Massenelemente unter einander; diese Massenelemente selbst sind also nur in beschränktem Grade einer Volumen- und Gestalts-

* Die auch wohl gebräuchliche Bezeichnung „Aggregatzustand“ statt „Aggregatform“ ist dem zu bezeichnenden Begriffe weniger entsprechend. Nach der später näher zu besprechenden atomistischen Vorstellung von der Constitution der Materie, wonach ein Körper als ein Aggregat getrennter Moleküle betrachtet wird, kann der Aggregatzustand (die Gruppirung der Moleküle) auch bei unveränderter Aggregatform sich stetig ändern (einer sogenannten Disgregationsänderung entsprechend); die Aenderung der Aggregatform ist durch eine so wesentliche Aenderung des Aggregatzustandes bedingt, dass dadurch die ganze Erscheinungsform des Körpers eine andere wird.

änderung, einer relativen Bewegung nur insofern fähig, als dieselbe durch jene Aenderungen der Massenelemente an sich bedingt wird, während benachbarte (an einander grenzende) Massenelemente beständig benachbart bleiben. Der letztere Umstand kann kürzer dadurch ausgedrückt werden, dass benachbarte Elemente eines festen Körpers keiner relativ gleitenden Bewegung fähig sind.

Flüssige und luftförmige Körper, welche zusammen auch wohl flüssig im weiteren Sinne genannt werden, haben die Eigenschaft einer unbeschränkten Veränderlichkeit ihrer Gestalt und einer unbeschränkten Mischbarkeit ihrer Massenelemente; letztere selbst sind also in unbeschränktem Grade der Gestaltsänderung und der relativen Bewegung, insbesondere benachbarte Elemente auch einer relativ gleitenden Bewegung fähig. Die Veränderlichkeit des Volumens der Massenelemente und somit des ganzen Körpers ist bei einem flüssigen Körper im engeren Sinne (tropfbar flüssigen Körper) beschränkt, bei einem luftförmigen Körper dagegen bezüglich auf Vergrösserung unbeschränkt bei unbeschränkter Abnahme des Oberflächendrucks. Ist auch die Volumenverkleinerung eines luftförmigen Körpers (soweit unsere Erfahrung reicht) unbeschränkt, so heisst derselbe ein Gas (permanentes Gas), widrigenfalls ein Dampf.

In der Regel sind die genannten verschiedenen Aggregatformen einer gewissen Körperart scharf von einander geschieden; doch giebt es auch Substanzen, bei welchen ein allmähliger Uebergang von der festen zur flüssigen Form oder umgekehrt stattfindet durch eine Reihe von Zwischenzuständen, in denen der Körper mehr oder weniger weich, plastisch oder zähflüssig erscheint (z. B. Schwefel und Phosphor, häufiger chemisch zusammengesetzte, namentlich gewisse organische Stoffe, Fette u. s. w.). Dabei scheint, von der festen Aggregatform ausgehend, die Veränderlichkeit der Gestalt der Massenelemente schneller zuzunehmen, als ihre relative Beweglichkeit, resp. der Widerstand gegen jene Gestaltsänderung schneller abzunehmen, als der Widerstand gegen die relativ gleitende Bewegung benachbarter Massenelemente, so dass solche Körper zwar in eine beliebige Gestalt gebracht, jedoch nur unvollkommen und oberflächlich gemischt werden können, z. B. durch wiederholtes Zusammenbringen verschiedener Stellen der Oberfläche (durch Kneten). Ein ähnliches Verhalten zeigen gewisse plastische Körper, welche als innige Gemische sehr fein zertheilter fester und flüssiger Bestandtheile von im Allgemeinen zugleich verschiedener Art zu betrachten sind.

Ein Körper heisst in der Folge homogen, wenn er von gleichförmiger Art ist und alle seine Elemente dieselbe Aggregatform haben. Für den

Fall des allmähligen Ueberganges aus der festen in die flüssige Aggregatform müsste der Begriff der Homogenität durch besondere Definition festgestellt werden auf Grund der Wahl eines Maasses für den Widerstand gegen die Gestaltsänderung und die relative Bewegung in den verschiedenen Zwischenzuständen zwischen der vollkommen festen und der vollkommen flüssigen Aggregatform. Im Allgemeinen werden die im Folgenden zu betrachtenden Körper nicht als homogen vorausgesetzt; insbesondere können sie, wenn auch von gleichförmiger Art, doch aus Theilen von unmessbar kleiner oder auch von messbarer Grösse bestehen, welche verschiedene Aggregatformen haben. Es kann z. B. ein Gemenge von Eisstücken und Wasser, oder der mit tropfbar flüssigen Wassertheilchen gemischte, also feuchte Wasserdampf, oder selbst der ganze Inhalt eines Dampfkessels, bestehend aus getrennten Quantitäten von Wasser und Dampf, als ein Körper für sich betrachtet und in Betreff seiner Zustandsänderungen unter gewissen Umständen untersucht werden. Besteht ein solcher Körper aus gleichartigen Theilen verschiedener Aggregatform, welche einzeln unmessbar klein und so gemischt sind, dass auch die Differenz des Mischungsverhältnisses in je zwei benachbarten unmessbar kleinen Volumentheilen unmessbar klein ist, so soll er eine continuirliche Mischung genannt werden, indem dann bei der Rechnung die einzelnen Bestandtheile als unendlich klein von solcher Ordnung vorausgesetzt werden können, dass das Mischungsverhältniss selbst von einem zum anderen unendlich kleinen Volumenelement sich continuirlich, also unendlich wenig ändert.

Unter dem specifischen Volumen v eines homogenen Körpers oder einer continuirlichen Mischung in einem gewissen Punkte wird der Quotient aus dem Volumen durch das Gewicht eines diesen Punkt enthaltenden unendlich kleinen Körperelementes verstanden (Volumen pro Gewichtseinheit des Körperelementes); der reciproke Werth $=\frac{1}{v}$ des specifischen Volumens ist das specifische Gewicht γ in dem betreffenden Punkte (Gewicht pro Volumeneinheit eines den Punkt enthaltenden Körperelementes); die specifische Masse ist $\mu=\frac{\gamma}{g}$. Das mittlere specifische Volumen eines Körpers, welcher auch eine discontinuirliche Mischung sein kann, ist der Quotient aus dem ganzen Volumen durch das ganze Gewicht desselben; das mittlere specifische Gewicht und die mittlere specifische Masse sind dadurch auch in obiger Weise bestimmt. —

Bei der zu Grunde liegenden Vorstellung einer continuirlichen Raumerfüllung durch die Materie wird die Wirkung der äusseren Kräfte im

Inneren des Körpers dadurch von einem zum anderen Körperelemente übertragen, dass diese unendlich kleinen Elemente, in die man sich den Körper auf beliebige Weise zerlegt denken kann, an ihren Berührungsflächen mit gewissen Kräften, sogenannten inneren Flächenkräften, gegenseitig auf einander wirken. Dieselben sind secundäre Kräfte, welche mit jenen primären Kräften* (den äusseren Kräften des Körpers) und mit der relativen Bewegung des Körpers auftreten und verschwinden, ausserdem aber von der Beschaffenheit (der Art und der Aggregatform) desselben abhängen, indem sie als der mechanische Ausdruck des durch diese materielle Beschaffenheit bedingten Widerstandes zu betrachten sind, dessen Ueberwindung die Aenderung des Volumens und der Gestalt der Massenelemente, sowie die relativ gleitende Bewegung benachbarter Elemente gegen einander im Allgemeinen erfordert. Durch die bei verschiedenen Körpern verschiedenen Beziehungen, welche zwischen den inneren Flächenkräften und denjenigen Grössen stattfinden, wodurch die Aenderungen des Volumens und der Gestalt der Massenelemente sowie die relativ gleitenden Bewegungen benachbarter Elemente bestimmt sind, wird die Körperbeschaffenheit, soweit sie hierbei in Betracht kommt, gewissermassen erst definirt, da sie übrigens bei der vorläufigen Abstraction von irgend einer bestimmten Voraussetzung in Betreff des Wesens und der Constitution der Materie an und für sich undefinirbar wäre.

Dabei sind diejenigen inneren Flächenkräfte, welche dem Widerstande gegen die Volumen- und Gestaltsänderung der Massenelemente entsprechen, von anderer Art wie diejenigen, welche als Widerstandskräfte gegen die relativ gleitende Bewegung benachbarter Elemente zu betrachten sind. Nur die ersteren, die sogen. Spannungen, charakterisiren den inneren Zustand; die letzteren, welche allein bei flüssigen und luftförmigen Körpern vorkommen und als innere Reibungen bezeichnet werden können, bedingen den inneren Zustand nur mittelbar, indem die Spannungen von ihnen abhängig sind. Zwischen den inneren Reibungen in irgend einem Körperpunkte für verschiedene durch diesen Punkt gehende Ebenen finden

* Der Begriff von primären und secundären Kräften ist nur relativ zu verstehen. Die äusseren Kräfte, welche in Beziehung auf die davon abhängigen inneren Flächenkräfte hier alle primäre Kräfte genannt werden, können in anderer Beziehung zum Theil selbst secundäre Kräfte sein, insbesondere die Reibung an der Oberfläche, welche mit der relativ gleitenden Bewegung des Körpers längs einem anderen auftritt und verschwindet und in Betreff ihrer Grösse entweder von der Geschwindigkeit dieser gleitenden Bewegung (flüssige Körper) oder von dem äusseren Druck auf die Oberfläche als primärer Kraft (feste Körper) oder von beiden Umständen zugleich abhängen kann.

übrigens analoge Beziehungen statt wie zwischen den betreffenden Spannungen; die letzteren Beziehungen, welche aus der Elasticitätstheorie als bekannt vorausgesetzt werden, lassen sich nämlich auf innere Flächenkräfte überhaupt ausdehnen und sind in dieser Verallgemeinerung im Wesentlichen folgende.*

A sei ein Punkt der in einem Körper angenommenen Fläche F, AB die in bestimmtem Sinne genommene Normale derselben im Punkte A, dF ein diesen Punkt enthaltendes, nach jeder Richtung unendlich kleines Element von F. Unter der inneren Flächenkraft $= \varrho$ im Punkte A der Fläche F werde dann der Quotient verstanden, welcher durch Division mit dF in die innere Kraft erhalten wird, die auf das Flächenelement dF von dem nach AB hin angrenzenden Körpertheile ausgeübt wird; diese innere Kraft kann eine Spannung oder zugleich eine innere Reibung sein. Zerlegt man diese specifische, d. h. auf die Flächeneinheit bezogene Flächenkraft ϱ, deren Richtung mit der Richtung AB irgend einen Winkel ω zwischen 0 und π bilden kann, in zwei Componenten nach der Normalen und nach der Tangentialebene von F, so sei die Normalcomponente $\varrho \cos \omega = \sigma$, die Tangentialcomponente $\varrho \sin \omega = \tau$. Erstere ist positiv oder negativ, je nachdem sie nach AB oder nach BA gerichtet ist, einem Zug oder Druck auf dF entsprechend; die Tangentialcomponente ist eine absolute Grösse, kann aber in der Tangentialebene wieder in Componenten nach gewissen Richtungen zerlegt werden, die dann positiv oder negativ sind, je nachdem diese Richtungen mit der Richtung von τ spitze oder stumpfe Winkel bilden.

Es seien nun insbesondere AX, AY, AZ drei zu einander senkrechte Richtungen parallel den Coordinatenaxen, auf welche der Körper bezogen wird und für welche x, y, z die Coordinaten des Punktes A sind; es seien ferner die Componenten der inneren Flächenkräfte

	nach den Richtungen	AX	AY	AZ
1)	im Punkte A der Ebene $YAZ =$	σ_x	τ_{xy}	τ_{xz}
2)	im Punkte A der Ebene $ZAX =$	τ_{yx}	σ_y	τ_{yz}
3)	im Punkte A der Ebene $XAY =$	τ_{zx}	τ_{zy}	σ_z

verstanden im Sinne derjenigen Kräfte, welche die auf den Seiten der positiven Axrichtungen AX, AY, AZ gelegenen Körpertheile auf die genannten Ebenen pro Flächeneinheit im Punkte A ausüben. Betrachtet man A als Eckpunkt eines rechtwinkeligen parallelepipedischen Körperelementes, dessen gegenüber liegender Eckpunkt A_1 die Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ hat, so erhält man die Flächenkräfte, welche auf die drei um den

* Siehe des Verfassers „Festigkeitslehre", Nr. 209 u. ff.

Eckpunkt A herumliegenden Seitenebenen dieses Körperelementes von der äusserlich angrenzenden Körpermasse ausgeübt werden, indem man die obigen drei Gruppen von specifischen Kräften unter 1), 2) und 3) beziehungsweise mit $-dy\,dz$, $-dz\,dx$ und $-dx\,dy$ multiplicirt, desgleichen die Kräfte, welche auf die drei um den Eckpunkt A_1 herumliegenden Seitenebenen von der äusserlich angrenzenden Körpermasse ausgeübt werden, indem man dieselben Gruppen specifischer Kräfte mit $dy\,dz$, $dz\,dx$ und $dx\,dy$ multiplicirt, nachdem sie zuvor um ihre partiellen Differentiale, beziehungsweise nach x, y und z genommen, vergrössert worden sind.

Die so erhaltenen 18 Oberflächenkräfte des Körperelementes sind im Gleichgewichte mit den auf seine Masse wirkenden äusseren Kräften und mit den Reactionskräften dieser Masse gegen ihre Beschleunigung. Ist μ die specif. Masse des Körpers (Masse der Volumeneinheit) im Punkte A, und sind im Sinne der Coordinatenaxen

X, Y, Z die Componenten der äusseren Kraft pro Masseneinheit,

φ_x, φ_y, φ_z die Componenten der Translationsbeschleunigung des Körperelementes,

so sind die Componenten seiner äusseren Kraft

$$=\mu X\,dx\,dy\,dz,\quad \mu Y\,dx\,dy\,dz,\quad \mu Z\,dx\,dy\,dz$$

und die Componenten der Reactionskraft gegen seine Translationsbeschleunigung

$$=-\mu\varphi_x\,dx\,dy\,dz,\quad -\mu\varphi_y\,dx\,dy\,dz,\quad -\mu\varphi_z\,dx\,dy\,dz,$$

während die Reactionskräftepaare bezüglich auf die Winkelbeschleunigungen des Körperelementes um drei durch seinen Mittelpunkt parallel den Coordinatenaxen gelegte Axen mit den betreffenden Trägheitsmomenten unendlich klein 5ter Ordnung sind. Die 6 Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes aller auf das Körperelement wirkenden Kräfte ergeben die folgenden Beziehungen:*

$$\left.\begin{array}{l|l}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\mu(X-\varphi_x)=0 & \tau_{yz}=\tau_{zy}\\
\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\mu(Y-\varphi_y)=0 & \tau_{zx}=\tau_{xz}\\
\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\mu(Z-\varphi_z)=0 & \tau_{xy}=\tau_{yx}
\end{array}\right\}\quad\ldots\quad 1$$

* Die runden ∂ dienen hier, wie in der Folge immer, zur Bezeichnung partieller Differentialquotienten, im Gegensatze zu den geraden d, durch welche Differentiale und vollständige Differentialquotienten bezeichnet werden.

Setzt man hiernach kürzer:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_y, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z,$$

so ist:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \mu (X - \varphi_x) = 0 \\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + \mu (Y - \varphi_y) = 0 \\
\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \mu (Z - \varphi_z) = 0
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (2).$$

Die 6 Grössen σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z bestimmen die innere Flächenwirkung im Punkte A vollständig, denn sie bestimmen nach Grösse und Richtung (Winkel mit den Axen $= a, b, c$) die innere Flächenkraft ϱ im Punkte A einer beliebigen Ebene, deren Normale AB die Winkel α, β, γ mit den Axen bildet, und zwar durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\varrho \cos a = \sigma_x \cos \alpha + \tau_y \cos \gamma + \tau_z \cos \beta \\
\varrho \cos b = \sigma_y \cos \beta + \tau_z \cos \alpha + \tau_x \cos \gamma \\
\varrho \cos c = \sigma_z \cos \gamma + \tau_x \cos \beta + \tau_y \cos \alpha
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (3),$$

entsprechend dem Gleichgewicht der Kräfte an einem unendlich kleinen Tetraeder, welches von der körperlichen Ecke, deren Kanten AX, AY, AZ sind, von einer zu AB senkrechten Ebene abgeschnitten wird.

Die Normalcomponente σ dieser inneren Flächenkraft ϱ ergiebt sich mit Hülfe der Gleichungen (3):

$$\begin{array}{l}
\sigma = \varrho\,(\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma) \\
= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \beta + \sigma_z \cos^2 \gamma + 2\,\tau_x \cos \beta \cos \gamma + 2\tau_y \cos \gamma \cos \alpha \\
\qquad + 2\,\tau_z \cos \alpha \cos \beta \quad \ldots (4),
\end{array}$$

woraus dann weiter zu schliessen ist, dass die Summe dieser Normalkräfte σ für je drei in einem Punkte A sich rechtwinkelig schneidende Ebenen gleich gross ist. Auch kann daraus gefolgert werden, dass sich durch jeden Punkt eines Körpers immer drei zu einander senkrechte Ebenen legen lassen, für welche die Tangentialcomponenten der inneren Flächenkräfte in diesem Punkte = Null, letztere selbst also normal sind.

Den Gleichungen (2) zufolge bedingen sich die Bewegung eines Körpers und sein innerer Zustand (bestimmt durch den Spannungszustand und durch μ bei gegebener Art und Aggregatform des Körpers) gegenseitig, so dass im Allgemeinen beide gleichzeitig in Untersuchung gezogen werden

müssen. Dabei sind die beiden Fälle eines festen Körpers und einer Flüssigkeit (im weiteren Sinne des Wortes) zu unterscheiden, nicht nur weil im letzteren Falle die Grössen σ und τ ausser den Spannungscomponenten zugleich die Componenten der inneren Reibung in sich schliessen, sondern auch weil den Differentialgleichungen der Bewegung bei einer Flüssigkeit überhaupt eine andere Auffassung zu Grunde liegt wie bei einem festen Körper. Indem nämlich die Massenelemente der Flüssigkeit einer beliebigen relativen Bewegung fähig sind, wobei sie zugleich rotiren und eine unbeschränkte Gestaltsveränderung erfahren können, lässt sich die Aenderung ihres äusseren und inneren Zustandes nur mittelbar dadurch verfolgen, dass diese Zustände für dasselbe Volumenelement zu verschiedenen Zeiten und für verschiedene Volumenelemente zu derselben Zeit bestimmt werden abgesehen zunächst von der individuellen Materie, welche in den betreffenden Volumenelementen enthalten ist. Während also das Körperelement, welches den obigen Betrachtungen hinsichtlich der inneren Flächenkräfte zu Grunde lag, bei der Anwendung auf einen festen Körper als ein Massenelement (im Sinne der Definition in §. 1) zu betrachten ist, hat man es bei der Anwendung auf eine Flüssigkeit nur während eines unendlich kleinen Zeitelementes als den Inbegriff und Träger einer individuell bestimmten Masse zu betrachten. Dabei können relativ gleitende Bewegungen auch im Inneren dieses Körperelementes und von solcher Art stattfinden, dass sie schräg gegen die Oberfläche desselben gerichtet sind, somit auch die Reibung ebenso wie die Spannung an irgend einer Stelle der Oberfläche des Elementes im Allgemeinen aus einer normalen und einer tangentialen Componente besteht.

Die Differentialgleichungen (2) enthalten 10 unbekannte Functionen

$$\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z;\ \varphi_x,\ \varphi_y,\ \varphi_z;\ \mu$$

der unabhängig Veränderlichen x, y, z und der Zeit t. Um sie zur Bestimmung der Zustandsänderungen (der Aenderungen des äusseren und inneren Zustandes) eines Körpers unter gegebenen Umständen geschickt zu machen, müssen sie so umgeformt und ergänzt werden, dass die Zahl der zur Verfügung befindlichen Gleichungen gleich der Zahl der darin vorkommenden Grössen ist, welche als Functionen von x, y, z, t zu bestimmen sind. Vor Allem dienen dazu die allgemeinen Beziehungen, welche zwischen den Spannungen und den Deformationen der Massenelemente, sowie zwischen den inneren Reibungen und den relativen Bewegungen benachbarter Elemente des Körpers stattfinden.

§. 4. Differentialgleichungen zur Untersuchung der Zustandsänderung eines festen Körpers unter der Einwirkung gegebener äusserer Kräfte.

Die inneren Flächenkräfte sind in diesem Falle lediglich Spannungen, die Grössen σ Normalspannungen, die Grössen τ Tangentialspannungen. Die rechtwinkeligen Coordinatenaxen werden im Körper fixirt gedacht (siehe §. 2), und es bezeichnen x, y, z diejenigen Coordinaten eines materiellen Punktes A, welche dem Falle entsprechen, dass die in Betracht gezogenen äusseren Kräfte = Null sind und der Körper sich in relativer Ruhe befindet, somit auch alle Spannungen = Null sind,* für welchen Fall der Zustand des Körpers sein ursprünglicher Zustand heissen mag; durch diese Coordinaten sind der materielle Punkt A, desgl. der materielle Punkt A_1 ($x + dx$, $y + dy$, $z + dz$) sowie das parallelepipedische Massenelement, dessen Diagonale AA_1 ist, individuell bestimmt. Ebenso sind X, Y, Z die Componenten der relativen beschleunigenden Kraft bezüglich auf das im Körper fixirte Axensystem, dessen etwaige eigene Bewegung im Folgenden ausser Betracht bleibt, indem der Zustand des Körpers nur als innerer und als relativer Bewegungszustand aufgefasst wird. Sind nun ξ, η, ζ die Aenderungen der Coordinaten x, y, z des materiellen Punktes A, so sind sie als Functionen von x, y, z und der Zeit t zu bestimmen, um dadurch den Zustand des Körpers in jedem Augenblicke zu kennen.

Zunächst ist nämlich durch diese Grössen ξ, η, ζ die verhältnissmässig kleine Deformation des parallelepipedischen Massenelementes AA_1 bestimmt, sofern dieselbe bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung in einer Längenänderung der Kanten und einer Aenderung der von ihnen gebildeten ursprünglich rechten Winkel besteht. Sind im geänderten Zustande

$$\text{die Kantenlängen} = dx\,(1+\varepsilon_x),\quad dy\,(1+\varepsilon_y),\quad dz\,(1+\varepsilon_z),$$

$$\text{die Kantenwinkel} = \frac{\pi}{2} - \gamma_x,\quad \frac{\pi}{2} - \gamma_y,\quad \frac{\pi}{2} - \gamma_z,$$

so ist:**

---

* Wenn man gewisse äussere Kräfte, z. B. den Atmosphärendruck auf die Oberfläche oder die Schwere des Körpers, bei einer Untersuchung unberücksichtigt lässt, so werden auch die ihnen entsprechenden Spannungen in die Grössen σ und τ nicht einbegriffen.

** In Betreff dieser und der folgenden Relationen siehe u. A. des Verfassers „Festigkeitslehre", Nr. 221 u. ff.

$$\left.\begin{array}{l|l} \varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} & \gamma_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} & \gamma_y = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \gamma_z = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Durch diese Ausdehnungen ε_x, ε_y, ε_z im Punkte A nach den Richtungen der Axen und durch die Verschiebungen γ_x, γ_y, γ_z der beziehungsweise diesen Richtungen parallelen Seitenebenen des parallelepipedischen Elementes nach den anderen Axrichtungen ist die Ausdehnung ε im Punkte A nach der Richtung (α, β, γ) bestimmt durch die Gleichung:

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \cos^2\beta + \varepsilon_z \cos^2\gamma + \gamma_x \cos\beta \cos\gamma + \gamma_y \cos\gamma \cos\alpha + \gamma_z \cos\alpha \cos\beta \quad \ldots (2),$$

aus welcher, der Gl. (4) in §. 3 analogen, Gleichung sich ergiebt, dass für jeden Punkt die Summe der Ausdehnungen nach je drei sich rechtwinkelig schneidenden Richtungen constant ist; diese Summe:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

hat die Bedeutung der Volumenausdehnung im Punkte A (Vergrösserung der Volumeneinheit eines den Punkt A enthaltenden unendlich kleinen Massenelementes beim Uebergange aus dem ursprünglichen in den veränderten Zustand).

Auch kann aus Gl. (2) gefolgert werden, dass sich durch jeden Punkt A eines Körpers immer drei zu einander senkrechte Ebenen legen lassen, für welche die Verschiebungen γ in jenem Punkte = Null sind, so dass ein parallelepipedisches Massenelement, von welchem im ursprünglichen Zustande drei Seitenebenen mit jenen Ebenen zusammenfallen, auch im geänderten Zustande rechtwinkelig bleibt. Diese Ebenen sind dieselben wie diejenigen, für welche nach §. 3 die Tangentialspannungen = Null, also die Spannungen Normalspannungen sind. Letztere = σ_1, σ_2, σ_3 heissen die Hauptspannungen, die entsprechenden Ausdehnungen nach den Richtungen derselben = ε_1, ε_2, ε_3 die Hauptausdehnungen im Punkte A; unter ihnen befinden sich (algebraisch verstanden) die grösste und die kleinste Normalspannung σ resp. Ausdehnung ε, welche im Punkte A nach irgend welchen Richtungen stattfinden.

Die Beziehungen zwischen den Grössen σ, τ und ε, γ, bezogen auf denselben Punkt und dieselben Axrichtungen, enthalten verschiedene Constante, welche von der Beschaffenheit des Körpers abhängen und sich für den Fall eines isotropen Körpers, d. h. eines Körpers, welcher nach allen Richtungen gleich beschaffen ist, auf nur zwei reduciren; es ist dann nämlich:

$$\left.\begin{array}{l|l}
\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{e}{n-2}\right) & \tau_x = G\gamma_x = G\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) \\
\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{e}{n-2}\right) & \tau_y = G\gamma_y = G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) \\
\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{e}{n-2}\right) = 2G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{e}{n-2}\right) & \tau_z = G\gamma_z = G\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)
\end{array}\right\} \quad (3).$$

Die beiden Constanten G und n stehen zu einer anderen Constanten, dem sogenannten Elasticitätsmodul E, in der Beziehung:

$$E = 2\frac{n+1}{n}G,$$

mit deren Hülfe der Zusammenhang zwischen den Grössen ε und σ auch in der Form dargestellt werden kann:

$$\left.\begin{array}{l}
E\varepsilon_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{n} \\
E\varepsilon_y = \sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{n} \\
E\varepsilon_z = \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{n}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Aus diesen Gleichungen geht die Bedeutung der Constanten E und n am deutlichsten hervor, wenn man zwei der drei Normalspannungen $=$ Null setzt; z. B. $\sigma_y = \sigma_z = 0$ giebt: $E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}$ und $n = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}$.

Die Bedeutung der Constanten G ist ohne Weiteres aus den Gleichungen:

$$G = \frac{\tau_x}{\gamma_x} = \frac{\tau_y}{\gamma_y} = \frac{\tau_z}{\gamma_z}$$

ersichtlich. Die Constanten E und G sind für verschiedenartige Körper sehr verschieden; n dagegen hat nur wenig verschiedene Werthe für alle solche Körper, welche näherungsweise als isotrop gelten können, und hat sich insbesondere für Kupfer, Messing, Eisen und Glas nach Versuchen von

Wertheim und von **Regnault** = 3 bis 4 ergeben.* Theoretische Untersuchungen auf Grund der atomistischen Ansicht in Betreff der Constitution der Materie lassen vermuthen, dass n sich um so mehr der Grenze 4 nähert, je vollkommener die Isotropie des Körpers ist.**

Wenn man die Ausdrücke von σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z als Functionen von ξ, η, ζ nach Gl. (3) zusammen mit den Ausdrücken der Beschleunigungscomponenten:

$$\varphi_x = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \quad \varphi_y = \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \quad \varphi_z = \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}$$

in den Gleichungen (2) von §. 3 substituirt, so erhält man mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_y}{\partial z} + \frac{\partial\tau_z}{\partial y} =$$

$$= 2G\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{1}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x}\right) + G\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) + G\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x\,\partial y}\right)$$

$$= G\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) + \frac{2}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right]$$

$$= G\left(\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)$$

ist und dass die zweite und dritte jener Gleichungen in Beziehung auf die y-Axe resp. z-Axe ebenso gebildet sind wie die erste in Beziehung auf die x-Axe:

$$\left.\begin{aligned}
G\left(\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) + \mu\left(X - \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\right) = 0\\
G\left(\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right) + \mu\left(Y - \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right) = 0\\
G\left(\frac{n}{n-2}\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial z^2}\right) + \mu\left(Z - \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 5$$

Durch diese Gleichungen, in welchen

$$e = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}$$

---

* In Betreff der Versuchsmethode siehe des Verfassers „Festigkeitslehre" Nr. 169.

** Siehe u. A. „Studien zur mathematischen Theorie der elastischen Körper" von J. **Dienger** in **Grunert's** Archiv der Mathematik und Physik 23. Theil.

ist und μ (ursprüngliche specif. Masse im Punkte x, y, z) sowie die Componenten X, Y, Z der beschleunigenden Massenkraft im Allgemeinen als Functionen von x, y, z gegeben vorausgesetzt werden, sind mit Rücksicht auf die gegebenen Oberflächenbedingungen (Oberflächenkräfte, Unterstützung oder Befestigung des Körpers an gewissen Stellen der Oberfläche) und den gegebenen Anfangszustand (äusseren und inneren Zustand für $t = 0$) die Grössen ξ, η, ζ als Functionen von x, y, z und t bestimmt. Somit ist dann auch für jeden Augenblick durch die Geschwindigkeitscomponenten

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

der relative Bewegungszustand, durch die Grössen σ und τ nach Gl. (3) der Spannungszustand und mit e auch die specif. Masse $= \mu\,(1-e)$ in allen Punkten des Körpers bestimmt. —

Bei den späteren Untersuchungen wird in der Regel vorausgesetzt, dass der innere Zustand für jeden Punkt eines Körpers durch nur zwei Grössen bestimmt sei. Soll das für einen festen Körper gelten, so müssen alle Tangentialspannungen für beliebige Ebenen = Null sein, was u. A. jedenfalls voraussetzt, dass auf die Oberfläche des Körpers nur normale äussere Kräfte wirken. In den Gleichungen (3) in vorigem §. ist dann:

$$\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$$

und für jede Richtung α, β, γ:

$$a = \alpha,\ b = \beta,\ c = \gamma,$$

folglich

$$\varrho = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z,$$

d. h. die Normalspannung in irgend einem Punkte für alle Ebenen gleich gross. Wird dieselbe, welche dann schlechtweg die Spannung im betreffenden Punkte genannt werden kann, mit σ bezeichnet, so ist durch μ und σ bei gegebener Art und Aggregatform des Körpers sein innerer Zustand im fraglichen Punkte bestimmt. Nach den Gleichungen (2), §. 3 ist dann:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \mu\,(X - \varphi_x) = 0;\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \mu\,(Y - \varphi_y) = 0;\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \mu\,(Z - \varphi_z) = 0\ . \quad (6),$$

woraus im Falle relativer Ruhe, für welchen μ und σ nur von x, y, z abhängig sind,

$$d\sigma = -\mu\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)\ \dots\dots\dots \quad (7)$$

folgt. Da die linke Seite dieser Gleichung das vollständige Differential

einer Function von x, y, z ist, so gilt dasselbe auch von der rechten Seite, d. h. es giebt eine gewisse Function $F(x, y, z)$ der Art, dass

$$\mu X = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}, \quad \mu Y = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}, \quad \mu Z = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}$$

ist. Aus Gl. (7) folgt damit:

$$\sigma = -F(x,y,z) + Const.,$$

wobei die Constante durch den äusseren Druck $= p_0$ in irgend einem Punkte x_0, y_0, z_0 der Oberfläche bestimmt ist; nämlich:

$$Const. = -p_0 + F(x_0, y_0, z_0).$$

Der Körper kann in diesem Falle durch **Flächen gleicher Spannung**, deren Gleichungen

$$F(x,y,z) = C$$

sind, unter C verschiedene Constante verstanden, in unendlich dünne Schichten zerlegt werden so, dass nur von einer zur anderen Schicht die Spannung sich ändert.

Ist schon $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = df(x, y, z)$ das vollständige Differential einer Function von x, y, z, also

$$d\sigma = -\mu\, df(x,y,z) = -dF(x,y,z),$$

so ist μ eine Function der Function f; die Gleichung:

$$f(x,y,z) = c,$$

unter c verschiedene Constante verstanden, gehört dann einer Schaar von Flächen an, in deren sämmtlichen Punkten μ und σ gleich gross sind.

Wären die äusseren Massenkräfte $=$ Null ($X = Y = Z = 0$) so hätte die Function f für alle Punkte des Körpers denselben Werth, und es müssten also auch μ und σ in allen Punkten gleich sein, insbesondere $-\sigma = p_0 =$ dem äusseren Druck, welcher für alle Punkte der Oberfläche gleich sein müsste.

Wäre umgekehrt $p_0 = Const.$ gegeben, so würde daraus nur folgen, dass die Oberfläche eine Fläche gleicher Spannung ist, also der Flächenschaar:

$$F(x, y, z) = C$$

angehört. —

Diese letzteren Bemerkungen über die Flächen gleicher Spannung gelten ebenso wie die Gleichung (7) allgemein für alle Körper, in welchen keine Tangentialspannungen vorkommen. Bei Flüssigkeiten werden sie später in der Hydrostatik als sogenannte Niveauflächen in Betracht kommen.

§. 5. Differentialgleichungen zur Untersuchung der Zustandsänderung einer Flüssigkeit (im weiteren Sinne) unter der Einwirkung gegebener äusserer Kräfte.

Die Coordinatenaxen werden im allgemeinen Falle, dass die Flüssigkeit in relativer Bewegung ist, ausserhalb derselben fixirt gedacht an das Gefäss, die Röhre, den Canal, überhaupt das System fester Wände, worauf die Bewegung der Flüssigkeit bezogen wird. Die Coordinaten x, y, z eines räumlichen Punktes A können dann auch als die Coordinaten des materiellen Punktes der Flüssigkeit betrachtet werden, welcher sich zur Zeit t im Punkte A des Raumes befindet; x, y, z sind im ersteren Falle unabhängig variabel, im letzteren Falle Functionen von t. Ebenso können

die specifische Masse $= \mu$,
die Componenten der beschleunigenden Massenkraft $= X, Y, Z$,
die Componenten der Beschleunigung $= \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ und
die Componenten der Geschwindigkeit $= u, v, w$

im Punkte A des Raumes zur Zeit t, welche Grössen Functionen der (bei dieser Auffassung unabhängigen) Variablen x, y, z, t sind, auch auf den materiellen Punkt bezogen werden, welcher sich zur Zeit t im Punkte A des Raumes befindet, wobei dann x, y, z Functionen von t sind und

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt},$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_x = \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\
\text{desgl. } \varphi_y = \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\
\varphi_z = \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

ist. Die inneren Flächenkräfte (ϱ, σ und τ) der Formeln in §. 3 sind jetzt aus Spannungen und inneren Reibungen zusammengesetzt. Wenn man aber den Begriff einer Flüssigkeit dahin ergänzt, dass ihre Massenelemente nicht nur einer unbeschränkten Gestaltsänderung fähig sind, sondern dass einer solchen an und für sich, d. h. abgesehen von einer gleichzeitig stattfindenden Volumenänderung und relativ gleitenden Bewegung, sich auch

kein Widerstand entgegensetzt, wenn man wenigstens, was tropfbare Flüssigkeiten betrifft, die mathematische Untersuchung auf solche ideale oder vollkommene Flüssigkeiten beschränkt, welche (wie luftförmige Flüssigkeiten unbedingt) jener Voraussetzung vollkommen widerstandsloser Gestaltsänderung der Massenelemente entsprechen, so sind die Tangentialspannungen = Null, die Grössen t also lediglich innere Reibungen. Bezeichnet man dann mit p_x, p_y, p_z und p die Pressungen der Flüssigkeit im Punkte A (x, y, z) für Ebenen, die zu den Richtungen AX, AY, AZ und AB (α, β, γ) senkrecht sind, welche Pressungen hier statt der entgegengesetzten Normalspannungen eingeführt werden, da letztere negativ sind, wenigstens nur bei tropfbaren Flüssigkeiten kleine positive Werthe haben können, die dann ausnahmsweise negativen Werthen der Pressungen p entsprechen würden, bezeichnet man ferner mit σ_x, σ_y, σ_z die Normalcomponenten der inneren Reibungen im Punkte A für die zu AX, AY, AZ senkrechten Ebenen, mit ϱ die innere Reibung im Punkte A der zur Richtung AB senkrechten Ebene, und mit a, b, c die Richtungswinkel von ϱ mit den Coordinatenaxen, so gehen die Gleichungen (3), §. 3 über in:

$$-p\cos\alpha + \varrho\cos a = (-p_x + \sigma_x)\cos\alpha + t_y\cos\gamma + t_z\cos\beta$$
$$-p\cos\beta + \varrho\cos b = (-p_y + \sigma_y)\cos\beta + t_z\cos\alpha + t_x\cos\gamma$$
$$-p\cos\gamma + \varrho\cos c = (-p_z + \sigma_z)\cos\gamma + t_x\cos\beta + t_y\cos\alpha\,.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Pressung und die innere Reibung sich unmittelbar nicht gegenseitig bedingen,* müssen diese Gleichungen von den Pressungen unabhängig von den Werthen der inneren Reibungen, und von letzteren unabhängig von den Werthen der ersteren erfüllt werden; daraus folgt:

$$p = p_x = p_y = p_z$$
$$\text{und } \varrho\cos a = \sigma_x\cos\alpha + t_y\cos\gamma + t_z\cos\beta$$
$$\varrho\cos b = \sigma_y\cos\beta + t_z\cos\alpha + t_x\cos\gamma$$
$$\varrho\cos c = \sigma_z\cos\gamma + t_x\cos\beta + t_y\cos\alpha$$

für alle Richtungen α, β, γ.

Die hiernach im Punkte A für alle Ebenen gleiche Pressung p kann schlechtweg die Pressung der Flüssigkeit in diesem Punkte genannt

---

* Diese Annahme ist den theoretischen Untersuchungen über die Flüssigkeitsreibung fast allgemein zu Grunde gelegt worden, mit Ausnahme von Euler, welcher die Reibung auch in Flüssigkeiten (wie zwischen festen Körpern) der Pressung proportional setzte; die aus der üblichen Annahme gezogenen Folgerungen sind indessen mit der Erfahrung in Einklang.

werden; sie bestimmt mit der specif. Masse μ (oder dem specif. Volumen resp. dem specif. Gewicht) den inneren Zustand in diesem Punkte.

Da nun die in §. 3 für die resultirenden inneren Flächenkräfte aufgestellten Gleichungen (3) auch für die inneren Reibungen allein gelten, so lassen sich auch die daraus gezogenen Folgerungen ohne Weiteres auf die inneren Reibungen übertragen. Insbesondere gilt auch für sie die dortige Gl. (4), und es ist in jedem Punkte A die Summe der Normalcomponenten der inneren Reibungen für je drei sich rechtwinkelig schneidende Ebenen gleich gross.

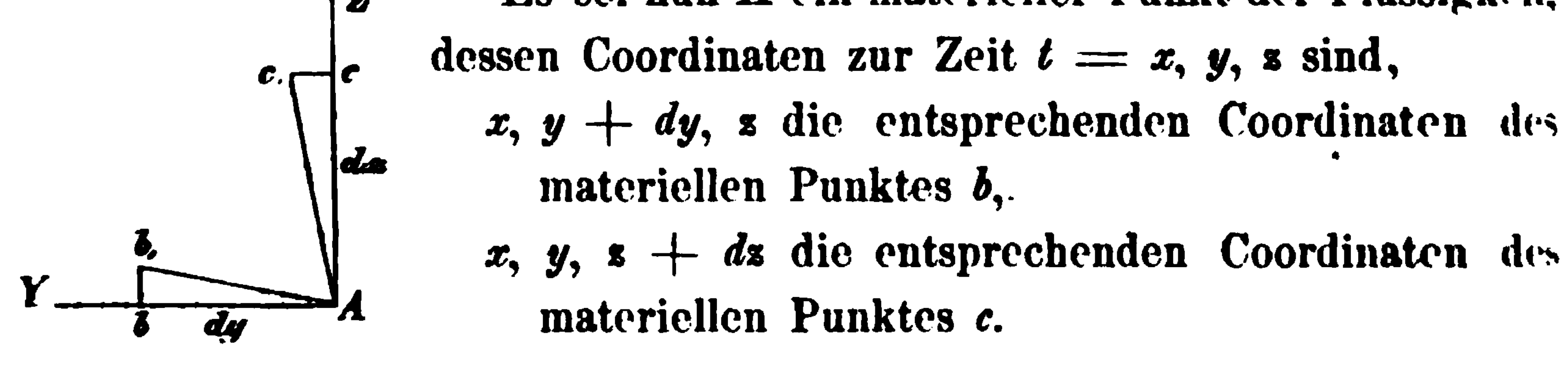
Ausdrücke für die tangentialen Reibungskräfte t_x, t_y, t_z ergeben sich aus der schon von Newton gemachten, seitdem von den meisten Autoren zu Grunde gelegten und durch gewisse Erfahrungen, von denen in der Hydraulik später die Rede sein wird, genügend bestätigten Annahme, dass die Reibung zwischen zwei ebenen Flüssigkeitsschichten von der Dicke dn, welche sich nach einer gewissen Richtung AC (Fig. 1) längs ihrer Berührungsebene F mit den Geschwindigkeiten c und $c+dc$ bewegen, der Grösse $\frac{dc}{dn}$ proportional sei, also der Schnelligkeit, mit welcher sich die Geschwindigkeit von einer zur anderen Schicht ändert. Indem dc die relative Geschwindigkeit des materiellen Punktes N gegen den materiellen Punkt A im Sinne AC ist ($AN = dn$ normal zur Berührungsebene F der beiden Schichten), so ist auch $\frac{dc}{dn}$ die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich AN gegen AC hin dreht, oder die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher sich der rechte Winkel NAC verkleinert. Bezeichnet man die entsprechende innere Reibung im Punkte A der zu AN senkrechten Ebene F nach der Richtung AC mit t_{nc} und betrachtet sie als die Kraft, welche die im Sinne AN an die Ebene F grenzende Flüssigkeitsschicht auf die Flächeneinheit von F ausübt, so ist nach dem Newton'schen Princip:

Fig. 1.

$$t_{nc} = R\frac{dc}{dn}.$$

Dabei ist R eine erfahrungsmässig zu bestimmende Constante, welche für verschiedene Flüssigkeiten und vielleicht auch für verschiedene Zustände derselben Flüssigkeit verschieden sein mag, indem sie nur als unabhängig von der Pressung vorausgesetzt wird.

Fig. 2.



Es sei nun A ein materieller Punkt der Flüssigkeit, dessen Coordinaten zur Zeit $t = x, y, z$ sind,

$x, y + dy, z$ die entsprechenden Coordinaten des materiellen Punktes b,

$x, y, z + dz$ die entsprechenden Coordinaten des materiellen Punktes c.

Im Zeitelemente dt ist dann die partielle relative Verrückung von b gegen A in Folge der Verschiedenheit der Geschwindigkeitscomponenten dieser beiden Punkte im Sinne AZ:

$$bb_1 = \frac{\partial w}{\partial y}\, dy\, dt$$

und dieselbe von c gegen A in Folge der Verschiedenheit der Geschwindigkeitscomponenten im Sinne AY:

$$cc_1 = \frac{\partial v}{\partial z}\, dz\, dt,$$

also die Verkleinerung des rechten Winkels bAc

$$= bAb_1 + cAc_1 = \frac{bb_1}{dy} + \frac{cc_1}{dz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dt$$

und die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher diese Verkleinerung zur Zeit t stattfindet,

$$= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Dieselbe kann auch entweder als Folge der resultirenden relativen Bewegung von b gegen A im Sinne Ac_1 oder als Folge der resultirenden relativen Bewegung von c gegen A im Sinne Ab_1 betrachtet, und demgemäss die entsprechende innere Reibung im Punkte A

für die zu AY senkrechte Ebene mit t_{yz},

für die zu AZ senkrechte Ebene mit t_{zy},

bezeichnet werden. Beide sind einander gleich

$$\left.\begin{aligned} &= t_x = R\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right); \\ \text{ebenso ist } t_y &= R\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ t_z &= R\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 2.$$

Die Normalcomponenten σ_x, σ_y, σ_z der inneren Reibungen im Punkte A für die Ebenen YAZ, ZAX, XAY sind dem Newton'schen Principe gemäss auch als lineare Functionen der partiellen Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z anzunehmen, wonach sie im Allgemeinen aus je 9 Gliedern bestehen könnten; indessen ergiebt sich zunächst eine Beschränkung dieser Zahl durch die folgende Erwägung.

Es sei AS irgend eine von A aus gezogene Richtungslinie, deren Winkel mit den Axen $= \alpha$, β, γ sind, $AA_1 = ds$ ein unendlich kleines Längenelement von AS, dessen Projectionen auf die Axen $= dx$, dy, dz sind. Dann ist zur Zeit t die Geschwindigkeit im Punkte A nach der Richtung AS:

$$c = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma$$

und die Geschwindigkeit im Punkte A_1 nach derselben Richtung:

$$\begin{aligned} c + dc = & \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\cos\alpha \\ & + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)\cos\beta \\ & + \left(w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)\cos\gamma, \end{aligned}$$

also wegen $\frac{dx}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{ds} = \cos\beta$, $\frac{dz}{ds} = \cos\gamma$:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{ds} = & \frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial w}{\partial z}\cos^2\gamma + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos\beta\cos\gamma \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha\cos\beta \quad \ldots\ldots (3). \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung, welche der Gl. (2) in §. 4 analog ist, folgt für die Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 im Punkte A nach irgend drei zu einander senkrechten Richtungen AS_1, AS_2, AS_3 die Relation:

$$\frac{dc_1}{ds_1} + \frac{dc_2}{ds_2} + \frac{dc_3}{ds_3} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Die Bedeutung dieser für je drei zu einander senkrechte Richtungen in demselben Punkte und Augenblicke gleich grossen Summe, welche in der Folge mit Δ bezeichnet werde, also:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

ist leicht erkennbar. Denkt man sich das rechtwinkelig parallelepipedische

Raumelement AA_1, dessen diametral gegenüber liegende Eckpunkte A und A_1 die Coordinaten x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ haben, so ist

$$dy\,dz\,.\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dt + dz\,dx\,.\frac{\partial v}{\partial y}\,dy\,dt + dx\,dy\,.\frac{\partial w}{\partial z}\,dz\,dt = dx\,dy\,dz\,.\,\varDelta\,.\,dt$$

die Summe der Flüssigkeitsvolumina, welche im Zeitelemente dt durch die um A_1 herumliegenden Seitenebenen aus diesem Raumelemente mehr herausfliessen, als durch die um A herumliegenden Seitenebenen hineinfliessen, und es ist also $\varDelta$ die Vergrösserung, welche dieses Raumelement pro Volumeneinheit in der Zeiteinheit erfahren würde, wenn es um das Volumen der ausfliessenden Flüssigkeit vergrössert und um das der hineinfliessenden Flüssigkeit verkleinert würde, und wenn der augenblickliche Bewegungszustand während der Zeiteinheit unverändert bliebe. Mit Rücksicht darauf, dass diese Grösse $\varDelta$ für jedes solche Raumelement bei A gleich gross ist, ist sie ein Maass für die Geschwindigkeit, mit welcher die Volumenänderung der Flüssigkeit im Punkte A stattfindet.

Indem nun auch die Summe:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

für den betreffenden Punkt A denselben Werth behalten muss, wie immer das System der Coordinatenaxen gedreht werden mag, so können mit Rücksicht zugleich auf die isotrope Beschaffenheit eines flüssigen Körpers die Normalcomponenten der inneren Reibung im Allgemeinen folgende Ausdrücke haben:

$$\sigma_x = S\frac{\partial u}{\partial x} + T\varDelta$$

$$\sigma_y = S\frac{\partial v}{\partial y} + T\varDelta$$

$$\sigma_z = S\frac{\partial w}{\partial z} + T\varDelta.$$

Darin sind S und T Constante. Wenn aber bei A die Bewegung nur längs der Ebene YAZ stattfindet, wenn also u und $\frac{\partial u}{\partial x}$ = Null sind, so muss auch offenbar σ_x = Null, also T = Null sein, so dass sich die obigen Ausdrücke reduciren auf:

$$\sigma_x = S\frac{\partial u}{\partial x};\quad \sigma_y = S\frac{\partial v}{\partial y};\quad \sigma_z = S\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Ebenso ist dann die Normalcomponente σ der inneren Reibung für eine Ebene, deren Normale AS, längs welcher die Geschwindigkeit $= c$ ist,

mit den Coordinatenaxen die Winkel α, β, γ bildet, mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) und (3):

$$\sigma = S\frac{dc}{ds} = S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos^2\beta + \frac{\partial w}{\partial z}\cos^2\gamma\right) +$$
$$+ \frac{S}{R}(l_x \cos\beta\cos\gamma + l_y\cos\gamma\cos\alpha + l_z\cos\alpha\cos\beta)$$
$$= \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\cos^2\beta + \sigma_z\cos^2\gamma +$$
$$+ \frac{S}{R}(l_x \cos\beta\cos\gamma + l_y\cos\gamma\cos\alpha + l_z\cos\alpha\cos\beta).$$

Damit diese Gleichung, wie nöthig, mit der Gl. (4) in §. 3 für alle Werthe von α, β, γ übereinstimme, muss $S = 2R$, also schliesslich

$$\sigma_x = 2R\frac{\partial u}{\partial x};\quad \sigma_y = 2R\frac{\partial v}{\partial y};\quad \sigma_z = 2R\frac{\partial w}{\partial z}\quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

sein. Die Analogie dieser Ausdrücke unter (2) und (5) für die Componenten der inneren Flüssigkeitsreibung mit den Ausdrücken unter (3) in §. 4 für die Spannungscomponenten eines festen Körpers fällt in die Augen; sie ergeben sich aus jenen Ausdrücken für die Spannungscomponenten mit $n = \infty$ und durch Substitution von u, v, w für ξ, η, ζ sowie von R für G.

Wenn man nun in den allgemeinen Differentialgleichungen (2), §. 3

$$-p + \sigma_x \text{ für } \sigma_x,\quad -p + \sigma_y \text{ für } \sigma_y,\quad -p + \sigma_z \text{ für } \sigma_z$$

setzt, dann für σ_x, σ_y, σ_z die Ausdrücke (5),
für l_x, l_y, l_z „ „ (2),
für φ_x, φ_y, φ_z „ „ (1),

so ergiebt sich mit Benutzung der Bezeichnung Δ für die Summe Gl. (4):

$$\left.\begin{aligned}
X - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{R}{\mu}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
Y - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{R}{\mu}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
Z - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{R}{\mu}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}\right\} . (6).$$

Damit durch diese Gleichungen die 5 Grössen u, v, w, μ, p als Functionen von x, y, z, t mit Rücksicht auf die gegebenen Oberflächenbedingungen und den gegebenen Anfangszustand bestimmt seien, sind noch zwei weitere Relationen zwischen ihnen erforderlich. Eine derselben ergiebt

sich durch die Erwägung (analog der obigen, welche zur Erkennung der Bedeutung von A gedient hatte), dass im Zeitelemente dt aus dem rechtwinkelig parallelepipedischen Raumelemente $dx\,dy\,dz$ mit der Diagonale AA_1 durch die um A_1 herumliegenden Seitenebenen eine gewisse Flüssigkeitsmasse mehr herausfliesst, als durch die um A herumliegenden Seitenebenen hineinfliesst, welche sich ausdrücken lässt durch:

$$dy\,dz\,.\frac{\partial(\mu u)}{\partial x}\,dx\,dt + dz\,dx\,.\frac{\partial(\mu v)}{\partial y}\,dy\,dt + dx\,dy\,.\frac{\partial(\mu w)}{\partial z}\,dz\,dt,$$

welche aber mit Rücksicht auf die continuirliche Raumerfüllung durch die Flüssigkeit auch

$$= -\,dx\,dy\,dz\frac{\partial \mu}{\partial t}\,dt$$

ist, woraus sich die Continuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7$$

ergiebt. Statt der specifischen Masse μ wird in der Folge gewöhnlich das specifische Volumen $= \frac{1}{\mu g}$ zur Charakterisirung des inneren Zustandes benutzt, d. h. das Volumen der Gewichtseinheit.

§. 6. Deformationsarbeit und Gleichung der lebendigen Kraft eines Körpers.

Bei einem in continuirlicher Zustandsänderung begriffenen Körper seien zur Zeit t im Punkte A (x, y, z): u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit nach den Richtungen der rechtwinkeligen Coordinatenaxen,

X, Y, Z die Componenten der beschleunigenden Massenkraft,

μ die specifische Masse.

Ein unendlich kleines Massenelement des Körpers habe zur Zeit t die Form eines rechtwinkeligen Parallelepipeds mit den gegenüber liegenden Eckpunkten A (x, y, z) und A_1 ($x + dx$, $y + dy$, $z + dz$), so dass seine Masse

$$\mu\,\delta V = \mu\,.\,dx\,dy\,dz$$

ist. Für eine unendlich kleine Zustandsänderung des Körpers im Zeitelemente dt ist die Zunahme der lebendigen Kraft dieses Massenelementes

$$dL = \mu\,\delta V(u\,du + v\,dv + w\,dw)$$

und die Arbeit der auf dasselbe wirkenden Massenkraft:

$$dM = \mu \delta V (Xu + Yv + Zw)\, dt.$$

Setzt man also in den allgemeinen Gleichungen (2), §. 3:

$$\varphi_x = \frac{du}{dt}, \quad \varphi_y = \frac{dv}{dt}, \quad \varphi_z = \frac{dw}{dt}$$

und multiplicirt dann die Gleichungen beziehungsweise mit

$$\delta V . u\, dt, \quad \delta V . v\, dt, \quad \delta V . w\, dt,$$

so ergiebt sich durch ihre Addition:

$$dL = dM + dO_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{mit } dO_1 = \delta V \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y}\right) u \\ + &\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z}\right) v \\ + &\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x}\right) w \end{aligned} \right\} dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Dieses dO_1 ist die Arbeit der Flächenkräfte, mit welchen die das Massenelement umgebende Körpermasse auf seine Oberfläche wirkt, insoweit diese Arbeit von der Deformation (Volumen- und Gestaltsänderung) des Massenelementes während des Zeitelementes dt unabhängig ist, indem dann Gl. (1) dem bekannten Satze entspricht, dass für einen materiellen Punkt oder für ein starres Massensystem der Zuwachs an lebendiger Kraft = der Summe der Arbeiten aller äusseren Kräfte (Massen- und Oberflächenkräfte) ist. Die ganze Arbeit dO jener Oberflächenkräfte des Massenelementes, insoweit dieselben Spannungen sind, enthält ausser dO_1 noch einen anderen Bestandtheil dO_2, welcher von der Deformation des Massenelementes abhängt. Es ist nämlich zunächst die Summe der Arbeiten derjenigen Kräfte, welche auf die beiden zur x-Axe senkrechten Seitenebenen wirken,

$$= dy\, dz \left\{ \begin{aligned} &- \sigma_x\, u\, dt + \left[\sigma_x u + \frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x} dx\right] dt \\ &- \tau_{xy}\, v\, dt + \left[\tau_{xy} v + \frac{\partial(\tau_{xy} v)}{\partial x} dx\right] dt \\ &- \tau_{xz}\, w\, dt + \left[\tau_{xz} w + \frac{\partial(\tau_{xz} w)}{\partial x} dx\right] dt \end{aligned} \right\}$$

$$= \delta V \left[\frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_y w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_z v)}{\partial x} \right] dt$$

mit den kürzeren Bezeichnungen:

τ_y für τ_{xz} und τ_z für τ_{xy}.

Analoge Ausdrücke gelten für die Arbeiten der auf die anderen Seitenebenen wirkenden Kräfte, so dass im Ganzen

$$dO = \delta V \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial(\sigma_x u)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_y w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_z v)}{\partial x} \\ + & \frac{\partial(\sigma_y v)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_z u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_x w)}{\partial y} \\ + & \frac{\partial(\sigma_z w)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_x v)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_y u)}{\partial z} \end{aligned} \right\} dt \quad \ldots \ldots \ldots 3$$

ist. Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$dO_2 = dO - dO_1 = \delta V \left\{ \begin{aligned} & \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_x \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ + & \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_y \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ + & \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_z \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} dt \quad \ldots \ldots \ldots 4.$$

Diese Arbeit dO_2 ist der Theil von dO, welcher zur Deformation des Massenelementes verbraucht wird; er ist entgegengesetzt gleich der Arbeit

$$dE = -dO_2,$$

welche das Massenelement selbst durch seine Deformation verrichtet und welche die Deformationsarbeit desselben bei der fraglichen unendlich kleinen Zustandsänderung genannt werden soll. Indem diese Deformationsarbeit nur von den Spannungen, nicht von den etwaigen Reibungen an der Oberfläche des Massenelementes verrichtet wird, sind unter den Grössen σ und τ, welche in Gl. (2) zugleich Spannungen und innere Reibungen sein können, in Gl. (4) nur Spannungen zu verstehen; in der That beziehen sich die in diesen letzteren Gleichungen vorkommenden Differentialquotienten von u, v, w nach x, y, z nur auf solche Geschwindigkeitsänderungen, welche innerhalb des betrachteten Massenelementes stattfinden, während die inneren Reibungen durch die relativen Geschwindigkeiten benachbarter Massenelemente bedingt sind.

Wenn man mit ξ, η, ζ die Wege bezeichnet, welche der materielle Punkt, der sich zur Zeit t im Raumpunkte A befindet, während dieser Zeit t nach den Richtungen der Coordinatenaxen durchlaufen hat, so sind ξ, η, ζ Functionen von x, y, z, t, und es ist:

$$u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Sind ferner ε_x, ε_y, ε_z, γ_x, γ_y, γ_z die Ausdehnungen und Verschiebungen, welche den Deformationszustand des Körpers im Punkte A zur Zeit t bestimmen und welche mit ξ, η, ζ durch die Gleichungen (1), §. 4 zusammenhängen, so ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}; \quad \text{desgl.} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t};$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial y} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) = \frac{\partial \gamma_x}{\partial t},$$

$$\text{desgl.} \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}.$$

Somit ist nach Gl. (4):

$$dE = -\delta V\left(\sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_x \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} + \tau_y \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} + \tau_z \frac{\partial \gamma_z}{\partial t}\right) dt \quad . (5),$$

und mit Hülfe dieser Deformationsarbeit des Massenelementes lässt sich die **Differentialgleichung der lebendigen Kraft** desselben, nämlich Gl. (1) auch schreiben:

$$dL = dM + dO + dE \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Durch Addition der entsprechenden Gleichungen für alle Massenelemente des Körpers erhält man dieselbe Gleichung (6), worin aber nun

dL die Zunahme der lebendigen Kraft des ganzen Körpers,

dM die Arbeitssumme aller Massenkräfte,

dO die Arbeitssumme aller Oberflächenkräfte und inneren Flächenkräfte,

dE die Deformationsarbeit des ganzen Körpers für die unendlich kleine Zustandsänderung im Zeitelemente dt bedeutet. Dabei kann dO in verschiedene Theile zerlegt werden. Zunächst besteht die Arbeit der Oberflächenkräfte aus der Arbeit dP des äusseren Drucks (Normaldrucks), welche positiv oder negativ sein kann wie dM, und aus der Arbeit der Reibung an der Oberfläche oder der äusseren Reibung, welche stets negativ ist und absolut genommen mit dR bezeichnet sei. Was die inneren Flächenkräfte

betrifft, so sind sie zu je zwei entgegengesetzt gleich, und es ist deshalb ihre Arbeitssumme = Null, falls die Geschwindigkeitsänderungen im Körper überall continuirlich stattfinden; in Folge der entgegengesetzten inneren Flächenkräfte, womit zwei benachbarte Körperelemente auf einander wirken, wird dann das eine beschleunigt, das andere verzögert, indem die lebendige Kraft des einen um ebenso viel zunimmt wie die des anderen abnimmt. Wenn aber discontinuirliche, plötzliche Geschwindigkeitsänderungen vorkommen — sei es, dass zwei benachbarte Massenelemente im Sinne der Normalen zu ihrer Berührungsfläche eine relative Geschwindigkeit von endlicher Grösse besitzen und somit einen Stoss auf einander ausüben (ein Fall, der bei festen und flüssigen Körpern vorkommen kann), sei es, dass (bei Flüssigkeiten) ihre relative Geschwindigkeit längs der Berührungsfläche von endlicher Grösse ist — so ist damit ein Verlust an lebendiger Kraft, eine negative Arbeitssumme der inneren Flächenkräfte verbunden. Wird letztere absolut genommen für die unendlich kleine Zustandsänderung des Körpers mit dS bezeichnet, so ist also nun

$$dO = dP - dR - dS$$

und die Gleichung der lebendigen Kraft des Körpers:

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7.$$

Darin ist die Deformationsarbeit des Körpers allgemein:

$$dE = -\int \delta V \left(\sigma_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \sigma_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \sigma_z \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \tau_x \frac{\partial \gamma_x}{\partial t} + \tau_y \frac{\partial \gamma_y}{\partial t} + \tau_z \frac{\partial \gamma_z}{\partial t} \right) dt \quad \ldots \quad 8.$$

Sind alle Tangentialspannungen = Null und somit alle Normalspannungen im betreffenden Punkte gleich gross = σ, so wird:

$$dE = -\int \delta V . \sigma \frac{\partial (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)}{\partial t} dt = -\int \delta V . \sigma \frac{\partial e}{\partial t} dt$$

oder, wenn mit

$$d\delta V = \delta V . \frac{\partial e}{\partial t} dt$$

die unendlich kleine Volumenänderung des Körperelementes und mit $p = -\sigma$ die Pressung bezeichnet wird:

$$dE = \int p . d\delta V \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9.$$

Die Deformationsarbeit soll in diesem Falle die Expansionsarbeit genannt werden, indem sie nur von den Volumenänderungen der Körperelemente abhängt; der Absolutwerth einer negativen Expansionsarbeit heisse eine Compressionsarbeit.

Ist die Pressung in allen Punkten des Körpers gleich, also = dem specifischen äusseren Druck p, so wird, unter V das ganze Körpervolumen verstanden,

$$dE = p.d\int \delta V = p.dV.$$

Die Geschwindigkeitscomponenten nach den Richtungen der Coordinatenaxen, welche bisher mit u, v, w bezeichnet wurden, sollen in der Folge mit u_x, u_y, u_z bezeichnet werden, die resultirende Geschwindigkeit mit u, so dass insbesondere die lebendige Kraft eines Körpers den Ausdruck hat:

$$L = \int \mu \delta V \frac{u^2}{2} = \int \gamma \delta V \frac{u^2}{2g},$$

während der Buchstabe v stets zur Bezeichnung des specifischen Volumens gebraucht werden soll, welches in der Regel statt des specifischen Gewichtes $\gamma = \frac{1}{v}$ oder der specifischen Masse $\mu = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{gv}$ zur Charakterisirung des inneren Zustandes benutzt wird.

§. 7. Wärme und Temperatur.

Dem Vorhergehenden zufolge findet im Allgemeinen eine gegenseitige Abhängigkeit statt zwischen den Aenderungen des inneren und des äusseren Zustandes eines Körpers, indem die letztere im Allgemeinen mit einer Deformation des Körpers verbunden ist, wodurch Aenderungen des specif. Volumens und des Spannungszustandes in den verschiedenen Punkten desselben bedingt werden, möglicherweise selbst die Aggregatform sich ändert, sofern die Möglichkeit des Bestehens einer gewissen Aggregatform bei gegebenem Spannungszustande an einen gewissen Grenzwerth des specif. Volumens, bei gegebenem specif. Volumen an gewisse Grenzwerthe der Spannungen gebunden sein kann. Es können indessen Aenderungen des inneren Zustandes mit oder ohne gleichzeitige Deformationsarbeit des Körpers auch ohne Aenderung des äusseren Zustandes (ohne Arbeit äusserer Kräfte) stattfinden, so dass sie als Wirkungen einer anderen Ursache erscheinen, als die Aenderungen des äusseren oder Bewegungszustandes.

Es kann z. B. die Pressung eines luftförmigen Körpers bei constantem Volumen in hohem Grade veränderlich sein; eine Mischung von Eis und Wasser kann ganz in die Form von Wasser übergehen so, dass das Volumen,

während der Schmelzung des Eises abnehmend und später zunehmend, schliesslich dem Anfangsvolumen wieder gleich ist. Bei Voraussetzung einer in allen Punkten gleichen Pressung ist in beiden Fällen die Deformationsarbeit = Null, desgl. kann jede der übrigen auf der rechten Seite von Gl. (7), §. 6 vorkommenden Arbeiten = Null sein; gleichwohl hat sich der innere Zustand geändert. In der Regel ist mit solcher Aenderung eine Deformationsarbeit verbunden; wenn aber letztere, wie es hierbei der Fall sein kann, positiv ist, die Arbeit der äusseren Kräfte ohne Aenderung der lebendigen Kraft des Körpers dagegen negativ (z. B. bei der Ausdehnung eines ruhenden Körpers, auf dessen Oberfläche der Atmosphärendruck wirkt), so kann man um so mehr nach der Ursache fragen, welche hier zugleich die Aenderung des inneren Zustandes und die Deformationsarbeit zur Folge hat.

Diese Ursache heisst **Wärme**. Es ist also Wärme die Ursache solcher Aenderungen des inneren Zustandes eines Körpers, welche in Aenderungen der Aggregatform, des specifischen Volumens oder des Spannungszustandes bestehen. Insoweit der innere Zustand durch diese drei Kriterien (Aggregatform, specif. Volumen und Spannungszustand) in den verschiedenen Punkten eines Körpers charakterisirt, also durch die Wärme bedingt ist, soll er der **Wärmezustand** heissen. Ein Körper von **gleichförmigem Wärmezustande** ist ein homogener Körper (§. 3), dessen specif. Volumen und Spannungszustand in allen Punkten gleich sind.

Als Grösse wird die Wärme der Messung und Rechnung zugänglich gemacht durch die Definition: Zwei Wärmen oder Wärmegrössen verhalten sich = $1 : n$, wenn die Massen gleichartiger Körper von gleichförmigen und gleichen Wärmezuständen sich = $1 : n$ verhalten, in denen sie gleiche Aenderungen der Wärmezustände verursachen. In Folge der früheren Auffassung vom Wesen der Wärme als einer mit gewissen Eigenschaften ausgestatteten Materie ist statt Wärmegrösse die Bezeichnung: **Wärmemenge** gebräuchlich geworden und geblieben. Die Wahl der Wärmeeinheit beruht auf dem Begriffe der Temperatur.

Man sagt: zwei Körper von gleichförmigen Wärmezuständen haben **gleiche Temperatur**, wenn lediglich in Folge ihrer gegenseitigen Berührung ihre Wärmezustände sich nicht ändern. Indem hierbei das Fehlen äusserer Wärmeeinwirkung vorausgesetzt ist, müsste eine Aenderung des Wärmezustandes des einen Körpers mit einer entgegengesetzten des anderen verbunden sein, so dass aus der Unveränderlichkeit des Wärmezustandes des einen Körpers auch auf die des anderen, somit auf die Gleichheit der Temperaturen beider geschlossen werden kann. So sagt man, ein Körper

habe die Temperatur des schmelzenden Eises oder des gefrierenden Wassers, wenn in Berührung mit einem Gemisch von Eis und Wasser sein Wärmezustand sich nicht ändert.

Wenn zwei Körper sich nicht unmittelbar berühren, sondern durch eine Scheidewand getrennt sind, so kann die Gleichheit ihrer Temperaturen mit Hülfe des Grundsatzes beurtheilt werden, dass zwei Grössen, welche einer dritten gleich sind, auch einander gleich sein müssen. Wenn z. B. der Wärmezustand des Quecksilbers eines in eine Flüssigkeit getauchten Quecksilberthermometers unter Ausschluss fremder Wärmewirkung sich nicht ändert, d. h. wenn das Volumen des Quecksilbers bei constanter Pressung constant bleibt, so gilt dasselbe von dem Glase und somit auch von der Flüssigkeit, welche durch das Glas vom Quecksilber getrennt ist; es haben also Quecksilber und Glas, Glas und Flüssigkeit, folglich auch Quecksilber und Flüssigkeit gleiche Temperaturen.

Ist nun bei gleichförmigem Wärmezustande und bei normalem Atmosphärendruck (gemessen durch eine 0,76 Meter hohe Quecksilbersäule von der Temperatur des schmelzenden Eises):

V_o das Volumen einer gewissen Menge reiner, d. h. von ihren nebensächlichen und zufälligen Bestandtheilen befreiter atmosphärischer Luft bei der Temperatur des (unter atmosphärischem Druck) schmelzenden Eises,

V_n ihr Volumen bei der Temperatur des unter normalem Atmosphärendruck kochenden Wassers,

V ihr Volumen in irgend einem anderen Wärmezustande,

so wird als Maasszahl der Temperatur oder kurzweg als Temperatur der Luft in diesem letzteren Zustande diejenige Zahl t definirt, welche der Gleichung entspricht:

$$V = V_o + \frac{V_n - V_o}{n}(t - t_o) = V_o\left[1 + \frac{V_n - V_o}{n V_o}(t - t_o)\right] \ldots (1),$$

wonach $V = V_o$ für $t - t_o = 0$,

$V = V_n$ für $t - t_o = n$ ist.

Dabei sind t_o und n willkürlich zu wählende Zahlen, welche auch je nach der angenommenen Temperaturskale verschieden gewählt werden,

nach Celsius: $t_o = 0$ und $n = 100$,

nach Réaumur: $t_o = 0$ und $n = 80$,

nach Fahrenheit: $t_o = 32$ und $n = 180$.

Im Folgenden wird stets die Celsius'sche Skale zu Grunde gelegt, so dass die Temperatur des unter atmosphärischem Druck schmelzenden

Eises = 0, die des unter normalem Atmosphärendruck kochenden Wassers = 100, oder = 0 Grad (0°) resp. = 100 Grad (100°) ist, indem ein Temperaturunterschied $\Delta t = 1$ ein **Temperaturgrad** genannt und mit 1° bezeichnet wird.

Aus dem somit festgestellten Begriffe der Lufttemperatur für einen gewissen gleichförmigen Wärmezustand der Luft und dem Gleichheitsbegriffe der Temperaturen zweier Körper von gleichförmigen Wärmezuständen ergiebt sich sofort auch die Definition der Temperatur eines beliebigen Körpers von gleichförmigem, demnächst der Temperatur in einem gewissen Punkte eines Körpers von im Allgemeinen ungleichförmigem Wärmezustande. Die praktische Messung der Temperatur vermittels eines sogenannten **Thermometers** beruht ferner auf dem Grundsatze von der Gleichheit zweier Temperaturen, welche beide einer dritten gleich sind; die Brauchbarkeit irgend eines Thermometers aber beruht auf der Bekanntschaft mit der Beziehung, welche zwischen seinen Angaben und denen eines idealen, d. h. ganz reine atmosphärische Luft von stets normalem Atmosphärendruck enthaltenden Luftthermometers stattfindet.* Mit dem Begriffe der Temperatur pflegt man den der **Wärmehöhe** als gleichbedeutend zu verbinden und demgemäss von hoher und niedriger anstatt von grosser und kleiner Temperatur zu sprechen.

Als **Wärmeeinheit** (Calorie) wird jetzt diejenige Wärmemenge angenommen, wodurch die Temperatur der Gewichtseinheit (1 Kilogramm) reinen Wassers unter einem constanten, dem normalen Atmosphärendruck gleichen äusseren Druck von 0° auf 1° erhöht wird. Die Voraussetzung ein-

---

* Zur Definition der Temperatureinheit musste das Verhalten einer bestimmten Körperart unter bestimmten Umständen (z. B. reiner atmosphärischer Luft unter normalem atmosphärischen Druck) benutzt werden, um nicht solchen Erfahrungen vorzugreifen, deren Ausspruch auf dem eben erst zu definirenden Begriffe beruht und welche zudem nur eine angenäherte Gültigkeit haben, so dass die Strenge der Definition dadurch beeinträchtigt worden wäre. So ist es bekanntlich nur angenähert wahr, dass der **Ausdehnungscoefficient** für 1° Temperaturzunahme, d. i. die Grösse

$$\frac{V_n - V_0}{n V_0}$$

der obigen Gleichung (1) für andere Gase ebenso gross wie für reine atmosphärische Luft und dass er von der Grösse der (übrigens constanten) Pressung unabhängig ist; ebenso ist die verhaltnissmässige Ausdehnung eines anderen Körpers, als eines Gases, z. B. des Quecksilbers, nur näherungsweise derjenigen der Luft innerhalb gewisser Temperaturgrenzen proportional.

stimmten äusseren Druckes ist hierbei zwar unwesentlich (wenn auch nicht überflüssig) wegen der sehr geringen Zusammendrückbarkeit des Wassers; dagegen ist es wesentlich, nicht nur eine bestimmte Temperaturzunahme, sondern auch eine bestimmte Anfangstemperatur bei dieser Definition der Wärmeeinheit vorauszusetzen, weil die zur Erhöhung der Temperatur eines Kilogramms Wasser von t^0 bis $(t + 1)^0$ erforderliche Wärmemenge merklich von t abhängt.

§. 8. Voraussetzungen und Bezeichnungen; Zustandsgleichung.

Im Folgenden soll immer, sofern das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt ist, stillschweigend vorausgesetzt sein, dass keine Tangentialspannungen in dem betrachteten Körper vorkommen, dass also die Normalspannungen in irgend einem Punkte für alle Ebenen gleich sind. Durch diese Voraussetzung wird die Allgemeingültigkeit der zu entwickelnden Sätze in Betreff der flüssigen und luftförmigen Körper nicht berührt, dieselbe nur in Betreff fester Körper beschränkt, die Untersuchung aber wesentlich vereinfacht, indem dann der Spannungszustand in einem gewissen Punkte durch eine einzige statt durch im Allgemeinen 6 Grössen, nämlich durch die kurzweg so genannte Spannung σ (§. 4) bestimmt ist. Statt der letzteren soll jedoch ihr Entgegengesetztes, die Pressung $= -\sigma$, in Rechnung eingeführt werden, weil diese Pressung in der Regel (bei luftförmigen Körpern immer) positiv ist. Der Wärmezustand in einem Punkte eines Körpers ist hiernach bestimmt durch die Aggregatform, das specif. Volumen und die Pressung. In der Folge soll stets mit

v das specifische Volumen,

p die Pressung,

t (event. t, wenn t zur Bezeichnung der Zeit dient) die Temperatur

eines Körpers von gleichförmigem Wärmezustande resp. in einem Punkte eines Körpers von ungleichförmigem Wärmezustande bezeichnet werden. Dabei sollen, sofern nicht ausdrücklich eine anderweitige Verfügung getroffen wird, bei der Messung dieser Grössen sowohl, wie auch überhaupt bei der Messung von Längen, Flächen, körperlichen Räumen, Zeiten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräften, Arbeiten, Temperaturen und Wärmemengen, die folgenden Einheiten zu Grunde gelegt und in der angegebenen Weise abgekürzt bezeichnet werden:

1 Meter = 1 Mtr.
1 Quadratmeter = 1 Quadratm.
1 Cubikmeter = 1 Cubikm.
1 Secunde = 1 Sec. = 1″
1 Kilogramm = 1 Kgr.
1 Kilogramm-Meter = 1 Kgmtr.
1 Grad Celsius = 1^0
1 Wärmeeinheit = 1 Cal.,

letztere den Einheiten: 1 Kgr. und 1^0 entsprechend. —

Wenn zwei Körper von gleicher Art sich in gleichförmigen und gleichen Wärmezuständen befinden, also gleiche Aggregatform, gleiches specif. Volumen und gleiche Pressung haben, so haben sie erfahrungsmässig auch dieselbe Temperatur, wenigstens mit nur wenigen Ausnahmen, welche (insbesondere z. B. bei Wasser) in dem Falle beobachtet werden, dass der Wärmezustand sich nahe der Grenze befindet, welche die Zustandsgebiete der festen und flüssigen Aggregatform trennt. Die Temperatur t eines Körpers von bestimmter Art ist also durch seinen Wärmezustand, d. h. durch die Aggregatform, das specif. Volumen v und die Pressung p im Allgemeinen bestimmt, oder es ist t eine Function von v und p, deren Form und Coefficienten von der Aggregatform und von der Körperart abhängig sind, welche also für alle Elemente eines homogenen Körpers dieselbe ist, auch wenn dieselben sich übrigens in verschiedenen Wärmezuständen befinden.

Diese Gleichung zwischen v, p und t heisse (nach Bauschinger) die Zustandsgleichung des homogenen Körpers der betreffenden Art für die betreffende Aggregatform. Unserer bisherigen Kenntniss zufolge hat man Grund anzunehmen, dass (abgesehen von den Besonderheiten, welche gewisse Körper in der Nähe der Grenze zwischen zwei Aggregatformen zeigen) die Form der Zustandsgleichung nur durch die Aggregatform, nicht durch die Körperart bedingt wird, dass also die Zustandsgleichungen verschiedenartiger homogener Körper bei gleicher Aggregatform auch einerlei Form und nur verschiedene Coefficienten haben, so dass man, wenn letztere als allgemeine Buchstabengrössen eingeführt werden, auch kurzweg von der Zustandsgleichung einer Aggregatform reden kann. Dieselbe kann, abgesehen von speculativen Voraussetzungen in Betreff der Molekularconstitution der Materie, nur durch Induction aus einer grossen Zahl quantitativ-experimenteller Bestimmungen der Grössen v, p, t abstrahirt werden, wobei es ferner der Fall sein kann, dass man sich vorläufig mit solchen Gleichungen behelfen muss, welche nur für eine

gewissen Theil des Umfangsgebietes einer Aggregatform mit genügender Annäherung gelten, z. B. für luftförmige Körper in der Nähe desjenigen Grenzzustandes, welcher dem Uebergange zur tropfbar flüssigen oder festen Aggregatform entspricht (Dämpfe), oder in der Nähe des entgegengesetzten Grenzzustandes (vollkommene Gase).

Durch die Zustandsgleichung wird t im Allgemeinen nur eindeutig als Function von v und p bestimmt, in den erwähnten Ausnahmefällen dagegen zweideutig. Wenn z. B. bei gewissen Werthen von v und p die Temperatur des Wassers $< 4^0$ ist, so kann sie bei denselben Werthen von v und p noch einen anderen Werth $> 4^0$ haben, indem für $t = 4^0$ ungefähr das specif. Volumen bei gegebener Pressung ein Minimum ist.

Im Allgemeinen ist die Zustandsgleichung von solcher Art, dass,

wenn v constant ist, p und t in gleichem Sinne,
" p " " v " t " " "
" t " " v " p " entgegengesetztem Sinne

sich gleichzeitig ändern.

Vermöge der Zustandsgleichung kann jede der drei Grössen v, p, t als Function der beiden anderen betrachtet und somit der Wärmezustand eines homogenen Körpers von gewisser Art und für eine gewisse Aggregatform nicht nur (der ursprünglichen Definition gemäss) durch v und p, sondern auch durch v und t oder durch p und t bestimmt werden. Die Bestimmung durch p und t ist in der Praxis besonders bei Flüssigkeiten im weiteren Sinne gebräuchlich, weil Pressung und Temperatur derselben durch die betreffenden Instrumente (Manometer und Thermometer) am leichtesten messbar sind.

Nicht homogene Körper kommen im Folgenden nur als continuirliche Gemische oder als Nebeneinanderlagerungen (discontinuirliche Gemische) zweier Körper von gleicher Art, aber verschiedener Aggregatform in Betracht, z. B. von Wasser und Wasserdampf, Eis und Wasser, und zwar im Falle eines discontinuirlichen Gemisches nur unter der Voraussetzung, dass p und t in allen Punkten dieselben Werthe haben, widrigenfalls die Zustandsänderungen der beiden Bestandtheile verschiedener Aggregatform gesondert untersucht werden müssten. Ist in diesem Falle

v das specif. Volumen in einem gewissen Punkte des continuirlichen resp. das mittlere specif. Volumen des discontinuirlichen Gemisches,
w das specif. Volumen des einen,
$w + \Delta$ dasselbe des anderen Bestandtheils,
$1 - y$ die Gewichtsmenge des ersten,

y dieselbe des zweiten Bestandtheils pro 1 Kgr. eines Volumenelementes resp. des ganzen Körpers, so ist

$$v = (1 - y)\,w + y\,(w + \Delta) = w + y\,\Delta.$$

Während nun im Allgemeinen w und Δ Functionen von p und t sind gemäss den besonderen Zustandsgleichungen, welche den Aggregatformen der beiden Bestandtheile entsprechen, sind hier p und t nicht unabhängig von einander, sondern durch eine gewisse Gleichung $f(p, t) = 0$ verbunden, weil die Wärmezustände der beiden Bestandtheile nicht beliebige Zustände für die betreffenden Aggregatformen, sondern Grenzzustände bezüglich auf den Uebergang aus der einen in die andere Aggregatform sind*. In der obigen Gleichung für v können somit w und Δ entweder als Functionen von p oder als Functionen von t betrachtet werden; jene Gleichung, welche dann eine Beziehung zwischen v, p, y oder v, t, y ausdrückt, soll in diesem Falle die Zustandsgleichung des aus gleichartigen Bestandtheilen verschiedener Aggregatform bestehenden Körpers genannt werden. Sind irgend zwei der 4 Grössen v, p, t, y gegeben, ausgenommen p und t, so sind durch die Zustandsgleichung und die Gleichung $f(p, t) = 0$ auch die beiden anderen bestimmt.

Sollen also im Falle eines homogenen Körpers sowohl wie im Falle eines solchen Gemisches gleichartiger Bestandtheile von verschiedener Aggregatform dieselben zwei Grössen als unabhängig Variable zur Bestimmung des Wärmezustandes benutzt werden, so können dies entweder v und p oder v und t sein. Die Wahl von v und t hat zwar den Vorzug, dass die oben erwähnte Zweideutigkeit der als Function von v und p betrachteten Temperatur dabei vermieden wird; gleichwohl wird es vorgezogen, den folgenden allgemeinen Entwickelungen gewöhnlich die Wahl von v und p als unabhängig Veränderlicher zu Grunde zu legen, weil dadurch die Expansionsarbeit (§. 6) sich unmittelbar ausdrücken lässt.

---

* Dass bei gesättigten Dämpfen, d. h. bei solchen Dämpfen, welche sich im Grenzzustande bezüglich auf den Uebergang zur tropfbar flüssigen Aggregatform befinden, eine bestimmte Beziehung zwischen p und t stattfindet, ist allgemein bekannt. Aus der von W. Thomson experimentell nachgewiesenen Thatsache, dass die Schmelztemperatur des Eises oder die Gefrierungstemperatur des Wassers mit der Pressung sich ändert, nämlich mit zunehmender Pressung etwas abnimmt, lässt sich indessen schliessen, dass eine entsprechende Beziehung zwischen p und t auch für die Grenze zwischen der flüssigen und festen Aggregatform im Allgemeinen stattfindet.

§. 9. Wärmemittheilung durch Berührung.

Wenn zwei Körper von verschiedenen Temperaturen mit einander in Berührung gebracht werden, so nimmt erfahrungsmässig ihr Temperaturunterschied allmählig bis Null ab, und man sagt dann, es gehe Wärme von dem wärmeren zum kälteren oder weniger warmen, d. h. von dem Körper höherer zu dem Körper niederer Temperatur über, oder auch es gehe diese Wärme selbst von höherer zu niederer Temperatur über.

Mit dem Wärmeübergange von einem Körper K zu einem ihn berührenden Körper K_1 durch die Berührungsfläche F hindurch ist in beiden Körpern eine Bewegung der Wärme, eine sogenannte Wärmeleitung verbunden zu denken, welche im Körper K gegen die Berührungsfläche hin, im Körper K_1 von der Berührungsfläche weg gerichtet ist, entsprechend einer Temperaturabnahme im ersten Körper gegen F hin, im zweiten von F weg. Denkt man sich einen Körper, in welchem Wärmeleitung stattfindet, in irgend einem Augenblicke durch Flächen der Art geschnitten, dass die augenblickliche Temperatur in allen Punkten einer solchen Fläche gleich gross und in je zwei benachbarten Flächen um einen bestimmten, gleich grossen Betrag verschieden ist, so liegen diese Flächen unter übrigens gleichen Umständen um so weiter auseinander, je grösser die Wärmeleitungsfähigkeit des Körpers ist. Letztere, welche übrigens im Allgemeinen sowohl in verschiedenen Punkten des Körpers, als auch nach verschiedenen Richtungen verschieden sein kann, wird durch den sogen. Wärmeleitungscoefficienten gemessen, der durch die folgende Definition bestimmt ist.

Es sei A ein Punkt des Körpers, in welchem zur Zeit t die Temperatur $= t$ ist, A_1 ein anderer Punkt, welcher nach der Richtung AX um dx von A entfernt und in welchem somit zur Zeit t die Temperatur $= t + \frac{\partial t}{\partial x} dx$ ist; es sei ferner dF ein nach zwei Dimensionen unendlich kleines ebenes Flächenelement, welches den Punkt A enthält und zu AX senkrecht ist, dQ die Wärmemenge, welche im Zeitelemente dt durch dF im Sinne AX hindurch geleitet wird, so versteht man unter dem Wärmeleitungscoefficienten im Punkte A des Körpers nach der Richtung AX den Coefficienten λ, welcher der Gleichung entspricht:

$$dQ = -\gamma\, dF \frac{\partial t}{\partial x} dt.$$

Die pro Flächen- und Zeiteinheit hindurchgeleitete Wärmemenge, welche die Geschwindigkeit der Wärmeleitung im Punkte A nach der Richtung AX genannt werden kann, ist danach:

$$\frac{dQ}{dF\,dt} = -\lambda \frac{dt}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

Ist der Körper homogen, so kann in der Regel λ in allen Punkten gleich vorausgesetzt werden, ist er isotrop, so ist λ auch nach allen Richtungen gleich gross. Die Unabhängigkeit des Coefficienten λ von der Richtung soll in der Folge stets angenommen werden, wodurch insbesondere krystallisirte feste Körper von der Betrachtung ausgeschlossen sind; dagegen ist er im Allgemeinen als abhängig vom Wärmezustande zu betrachten, so dass er streng genommen auch bei homogenen Körpern im Allgemeinen von Punkt zu Punkt veränderlich sein kann. Sind nun A und A_1 zwei Punkte eines Körpers mit den rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, ist ferner $\delta V = dx\,dy\,dz$ das Volumen des rechtwinkelig-parallelepipedischen Körperelementes mit der Diagonale AA_1, und zur Zeit t:

t die Temperatur im Punkte A, folglich

$t + \frac{\partial t}{\partial x} dx + \frac{\partial t}{\partial y} dy + \frac{\partial t}{\partial z} dz$ dieselbe im Punkte A_1,

so ist die resultirende Wärmemenge dQ, welche diesem Körperelemente im Zeitelemente dt durch Leitung mitgetheilt wird:

$$dQ = \lambda\, dy\, dz \left[-\frac{\partial t}{\partial x} + \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} dx\right)\right] dt$$

$$+ \lambda\, dz\, dx \left[-\frac{\partial t}{\partial y} + \left(\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} dy\right)\right] dt$$

$$+ \lambda\, dx\, dy \left[-\frac{\partial t}{\partial z} + \left(\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} dz\right)\right] dt$$

$$\text{d. i. } dQ = \lambda \,.\, \delta V \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) dt \quad \ldots\ldots \quad 2.$$

Im Inneren eines homogenen Körpers oder auch eines continuirlichen Gemisches von zwei Körpern gleicher Art und verschiedener Aggregatform ist die Temperatur eine continuirliche Function der Coordinaten ebenso wie das specif. Volumen und die Pressung im Falle des homogenen Körpers resp. das specif. Volumen und das Mischungsverhältniss y im Falle des continuirlichen Gemisches, mit welchen jene durch die Zustandsgleichung verbunden ist; dasselbe gilt auch für den Fall eines discontinuirlichen Gemisches von Bestandtheilen gleicher Art, sofern dieselben einzeln homogen

sind und an ihren Berührungsflächen sich im Grenzzustande zwischen zwei Aggregatformen befinden. In je zwei Punkten eines gleichartigen Körpers, welche einander unendlich nahe liegen, sind also die Werthe von t stets nur unendlich wenig verschieden. Anders verhält es sich in Betreff der Oberflächentemperaturen zweier sich berührender ungleichartiger Körper K und K_1, d. h. in Betreff der Temperaturen der in der Berührungsfläche F der Körper an einander grenzenden unendlich dünnen Oberflächenschichten derselben, welche während des Wärmeüberganges von K zu K_1 um eine endliche Grösse verschieden sein können; dabei ist der Fall ausgeschlossen, dass beide Körper luftförmig sind, indem solche sich unbeschränkt gegenseitig durchdringen, ohne feste oder flüssige Scheidewand sich also überhaupt nicht in einer bestimmbaren Fläche berühren. Ist dF ein Element der Berührungsfläche, durch welches im Zeitelemente dt die Wärmemenge dQ von K zu K_1 übergeht, ist ferner Δt der Ueberschuss der Oberflächentemperatur von K über dieselbe von K_1 beiderseits von dF, und setzt man dann die Geschwindigkeit des Wärmeüberganges:

$$\frac{dQ}{dF\,dt} = \lambda_1 \cdot \Delta t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

so heisse λ_1 der Wärmeübergangscoefficient an der Stelle des Elementes dF der Berührungsfläche. Ebenso wie an der Berührungsfläche zweier verschiedener Körper kann auch im Inneren eines nicht homogenen Körpers, nämlich an der Grenze zwischen Bestandtheilen von verschiedener Art die Temperatur sich discontinuirlich von einem zum anderen Punkte ändern. Sie verhält sich in dieser Hinsicht anders wie die Pressung, welche auch beiderseits von der Berührungsfläche zweier Körper immer nur unendlich wenig verschieden ist. Nur wenn es absolut starre Körper gäbe, wäre es möglich, dass, indem ein solcher Körper auf einen anderen bei unmittelbarer Berührung durch Druck beschleunigend wirkte, eine endliche Pressungsdifferenz beider Körper an der Berührungsstelle stattfände, dem Trägheitswiderstande des ganzen getriebenen Körpers entsprechend, wogegen in Wirklichkeit der treibende Körper zunächst nur die der Berührungsstelle nächste Schicht, dann diese die folgende u. s. f. beschleunigt. Bei der Wärmemittheilung durch Berührung findet zwar auch ein analoger continuirlicher Uebergang der Wärme von Schicht zu Schicht statt; während aber die Pressungsdifferenz zweier benachbarter Schichten nur von ihren Massen abhängt, von den Arten und Aggregatformen ihrer Materien und von der Innigkeit der Berührung dagegen unabhängig ist, wird die Temperaturdifferenz durch diese letzteren Umstände wesentlich bedingt

der Art, dass sie nur dann immer unendlich klein ist, wenn die Schichten demselben homogenen Körper oder demselben Gemisch von theilweise flüssigen gleichartigen Körpern angehören.

Wenn durch Mittheilung von Wärme ein fester Körper flüssig, ein flüssiger luftförmig, oder durch Entziehung von Wärme ein luftförmiger Körper flüssig, ein flüssiger fest wird, so ist während einer solchen allmähligen Aenderung der Aggregatform die Temperatur des Körpers nur von der Pressung abhängig, also constant, wenn letztere constant ist. Wenn also die Pressung eines continuirlichen Gemisches gleichartiger Bestandtheile von verschiedenen Aggregatformen in demselben Augenblicke in allen Punkten gleich resp. in je zwei Punkten nur unendlich wenig verschieden ist, was nicht ausschliesst, dass sie im Verlauf der Zeit stetig veränderlich sein kann, so ist auch die augenblickliche Temperatur in je zwei Punkten nur unendlich wenig verschieden, während gleichwohl die Wärmeleitung mit endlicher Geschwindigkeit $= \frac{dQ}{dF\,dt}$ stattfinden kann; der Wärmeleitungscoefficient λ ist in solchem Falle unendlich gross. Wenn ferner einer homogenen Flüssigkeit im weiteren Sinne Wärme von unten her mitgetheilt oder von oben her entzogen wird, so kann durch die Aenderung des specif. Gewichtes eine so lebhafte Mischungsbewegung in der Flüssigkeit veranlasst werden, dass die Temperatur in demselben Augenblicke in je zwei Punkten nur unmessbar wenig verschieden, der Wärmeleitungscoefficient λ also unmessbar gross ist, falls der Wärmeübergang an der Oberfläche mit endlicher Geschwindigkeit stattfindet. Ebenso kann λ bei einem discontinuirlichen Gemische von zwei gleichartigen Bestandtheilen verschiedener Aggregatform an der Grenze dieser Bestandtheile unendlich gross, im Inneren der (im weiteren Sinne) flüssigen Theile in Folge von Mischungsbewegungen wenigstens unmessbar gross sein. Nur bei homogenen festen Körpern hat λ unter allen Umständen einen endlichen Werth.

In allen Fällen, in welchen der Wärmeleitungscoefficient λ unendlich oder wenigstens unmessbar gross ist, so dass er in der Rechnung bei Abstraction von unmessbar kleinen Differenzen als unendlich gross zu betrachten ist, kann die Temperatur des Körpers, obschon sie in je zwei Punkten desselben nur unendlich wenig verschieden ist, doch von der Temperatur in der unmittelbaren Umgebung des Körpers um Endliches verschieden sein, sofern der Wärmeübergangscoefficient λ_1 nicht etwa selbst unendlich gross ist. Im Gegensatze dazu schliesst die Voraussetzung einer in je zwei Punkten eines Körpers von endlicher Grösse unendlich wenig verschiedenen

Pressung auch ohne Weiteres die Voraussetzung ein, dass diese Pressung von dem äusseren Druck in jedem Punkte der Oberfläche nur unendlich wenig verschieden sei.

Schliesslich mag in Betreff der Anwendung auf eine Flüssigkeit ausdrücklich hervorgehoben werden, dass δV in der obigen Gleichung (2) das Volumen eines Körperelementes bedeutet, von welchem vorausgesetzt wird, dass es keinerlei Mischung mit Flüssigkeit von anderer Temperatur während des Zeitelementes dt erfährt; anderenfalls würde es an genügenden Anhaltspunkten zur Wahl des entsprechenden Werthes von λ fehlen und das Aenderungsgesetz der Temperatur im Inneren der Flüssigkeit sich nur empirisch bestimmen lassen.

§. 10. Wärmemittheilung durch Strahlung.

Erfahrungsmässig können sich zwei Körper K und K_1, wenn sie sich in einem geeigneten Mittel befinden, auch dann Wärme mittheilen, wenn sie sich nicht berühren, und zwar ohne dass die Temperatur dieses Mittels, welches auch durch einen leeren Raum ersetzt werden kann, dadurch geändert wird. Solche Wärmemittheilung heisst Wärmestrahlung; sie ist ganz analogen Gesetzen unterworfen wie die Lichtstrahlung. Bezüglich auf die Aenderung des Wärmezustandes eines Körpers steht sie zu der Wärmemittheilung durch Berührung in einem ähnlichen Verhältnisse wie bezüglich auf die Aenderung des äusseren Zustandes eine aus beliebiger Ferne wirkende äussere Massenkraft zu einem äusseren Druck auf die Oberfläche; die im Inneren des Körpers geleitete Wärme entspricht den inneren Flächenkräften, und endlich kann den inneren Massenkräften entsprechend auch Wärmestrahlung im Inneren des Körpers selbst stattfinden.

Ist A ein Punkt der Oberfläche des Körpers K, welcher dem Körper K_1 Wärme zustrahlt, und erstreckt sich die von A ausgehende Wärmestrahlung in einem Zeitelemente dt bis zu einer gewissen Fläche F', so kann man ebenso wie bei der Fortpflanzung des Lichtes alle Punkte A' von F' als neue Wärmecentra betrachten, von denen sich im folgenden Zeitelemente dt die Wärmestrahlung bis zu gewissen Flächen f'' erstreckt, dann alle Punkte A'' der Umhüllungsfläche F'' dieser Flächen f'' abermals als neue Centra, von denen aus sich im folgenden Zeitelemente dt die Wärmestrahlung bis zu gewissen Flächen f''' mit der gemeinschaftlichen Umhüllungsfläche F''' erstreckt u. s. f. Die so erhaltenen Umhüllungsflächen

F', F'', F''' ... heissen die von A ausgehenden **Wärmewellenflächen**, und jede Linie $A\,A'\,A''\,A'''$ ..., welche alle diese Wellenflächen normal durchschneidet, heisst ein von A ausgehender **Wärmestrahl**. Diese Wärmestrahlen können im Allgemeinen krumme und selbst stellenweise gebrochene Linien sein, indem das Medium sich längs denselben stetig oder plötzlich ändern und dadurch zu Brechungen und Reflexionen Veranlassung geben kann. Dabei sind zunächst Wärmestrahlen von einerlei Gattung, also von gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit in demselben Mittel vorausgesetzt.

Ist A_1 irgend ein Punkt des Wärmestrahls $A\,A'\,A''\,A'''$ ..., z. B. ein Punkt der von demselben getroffenen Oberfläche des Köpers K_1, so ist der Strahl AA_1 auch dadurch charakterisirt, dass er der Weg ist, auf welchem die von A aus gestrahlte Wärme den Punkt A_1 in der kürzesten Zeit erreicht. Ist nämlich $A\,a'\,a''\,a'''$ ... A_1 irgend ein anderer beliebig nahe benachbarter Weg zwischen A und A_1, unter a', a'', a''' ... Punkte der Flächen F', F'', F''' ... verstanden, welche den Punkten A', A'', A''' ... des Strahls $A\,A_1$ beliebig nahe liegen, so können nicht alle Elemente Aa', $a'a''$ ... des Weges $Aa'a''$ ... A_1 normal zu den Flächen F', F'' ... sein. Ist aber z. B. $a'\,a''$ nicht normal zu F'', so liegt der Punkt a'' ausserhalb der Fläche f'', bis zu welcher sich von a' aus die Wärmestrahlung im Zeitelemente dt erstreckt, und es braucht also die Wärmestrahlung von a' bis a'' eine grössere Zeit, als von a' bis zum Berührungspunkte der Flächen f'' und F'', welch' letztere der zur Strahlung von A' bis A'' erforderlichen Zeit gleich ist.

Die Wärmestrahlung zwischen zwei Körpern K und K_1 ist gegenseitig, und es hängen die Wärmemengen, welche sie einander in einer gewissen Zeit zustrahlen, von den Beschaffenheiten der Oberflächenschichten beider Körper, von den Temperaturen derselben und von der Beschaffenheit des von der Wärme durchstrahlten Mittels ab. Dass im Falle der Gleichheit jener Oberflächentemperaturen der Körper K dem Körper K_1 unter allen Umständen ebenso viel Wärme zustrahle, wie er von ihm in derselben Zeit durch Strahlung empfängt, lässt sich nicht ohne Weiteres behaupten; denn die Definition der Gleichheit zweier Temperaturen (§. 7) setzt lediglich Wärmemittheilung durch Berührung voraus und lässt sich als Definition auch nicht ohne Vorurtheil erweitern. Bei der Mannigfaltigkeit von möglichen Fällen und den mancherlei Fehlerquellen, mit denen die Versuche über die Wärmestrahlung zu kämpfen haben, lässt sich auch auf dem Wege des Versuchs allein eine vollkommene Feststellung der Bedingungen, unter denen das Wärmegleichgewicht durch Strahlung stattfindet, kaum erwarten.

durch eine mathematische Untersuchung ergeben sie sich in folgender Weise.*

Es seien A, B, C drei Ebenen; in jeder derselben seien zwei rechtwinkelige Coordinatenaxen angenommen, in Beziehung auf welche

x_a und y_a die Coordinaten eines Punktes a in der Ebene A,
x_b und y_b „ „ „ „ b „ „ „ B,
x_c und y_c „ „ „ „ c „ „ „ C

sind. Es seien ferner

t_{bc} = einer Function von x_b, y_b, x_c, y_c,
t_{ac} = „ „ „ x_a, y_a, x_c, y_c,
t_{ab} = „ „ „ x_a, y_a, x_b, y_b

die Minimalzeiten der Wärmestrahlung beziehungsweise von b bis c, von a bis c und von a bis b, also die Zeiten, welche die Fortpflanzung der Wärme durch Strahlung längs den Wärmestrahlen bc, ac und ab oder umgekehrt erfordert.

Es handelt sich zunächst um die Beziehungen, welche zwischen den 6 Coordinaten der drei Punkte a, b, c stattfinden müssen, wenn diese in demselben Strahle liegen sollen, und zwar so, dass c zwischen a und b liegt, der Strahl also acb oder bca ist. Jedenfalls ist dann

$$t_{ac} + t_{bc} = t_{ab};$$

allein diese Bedingung genügt nicht, weil durch zwei der drei Punkte im Allgemeinen der dritte bestimmt ist, durch 4 jener 6 Coordinaten folglich die beiden anderen bestimmt sein müssen. Ist aber α ein Punkt der Ebene A in der Nähe von a, welcher also nicht in der Verlängerung des Strahls bc liegt, so ist die Zeit $t_{\alpha b}$ des directen Strahls αb die kleinste Zeit der Strahlung von α bis b, also kleiner als die Summe der Zeiten längs den Strahlen αc und cb, d. h.

$$t_{\alpha b} < t_{\alpha c} + t_{bc} \text{ oder } t_{\alpha b} - t_{\alpha c} < t_{bc},$$

so dass der Punkt a als in der Verlängerung des Strahls bc gelegen durch die Bedingung

$$t_{ab} - t_{ac} = max.$$

bestimmt ist, woraus folgt:

---

* Vergl. Clausius: „Ueber die Concentration von Wärme- und Lichtstrahlen und die Grenzen ihrer Wirkung.“ Poggendorff's Annalen, Bd. 121.

$$\frac{\partial(t_{ab}-t_{ac})}{\partial x_a}=0\,;\quad \frac{\partial(t_{ab}-t_{ac})}{\partial y_a}=0 \,\ldots\ldots\ldots\, 1$$

Ist ebenso β ein Punkt der Ebene B nahe bei b, so ist

$$t_{a\beta}<t_{ac}+t_{\beta c} \text{ oder } t_{a\beta}-t_{\beta c}<t_{ac},$$

so dass der Punkt b als in der Verlängerung des Strahls ac gelegen der Bedingung

$$t_{ab}-t_{bc}=max.$$

entsprechen muss, woraus folgt:

$$\frac{\partial(t_{ab}-t_{bc})}{\partial x_b}=0\,;\quad \frac{\partial(t_{ab}-t_{bc})}{\partial y_b}=0 \,\ldots\ldots\ldots\, 2$$

Ist endlich γ ein Punkt der Ebene C nahe bei c, so ist

$$t_{ab}<t_{a\gamma}+t_{b\gamma}, \text{ also } t_{ac}+t_{bc}=min.,$$

$$\frac{\partial(t_{ac}+t_{bc})}{\partial x_c}=0\,;\quad \frac{\partial(t_{ac}+t_{bc})}{\partial y_c}=0 \,\ldots\ldots\ldots\, 3$$

Jedes der Systeme (1), (2) und (3) von je zwei Gleichungen drückt die gegenseitige Beziehung der drei Punkte aus, in welchen ein Strahl die drei Ebenen so schneidet, dass der Punkt c zwischen a und b liegt; jedes dieser 3 Paare von Gleichungen hat die beiden anderen Paare und auch die Gleichung $t_{ac}+t_{bc}-t_{ab}$ zur nothwendigen Folge, falls es nur einen Strahl zwischen den Punkten a und b giebt.

Es sei nun in der Ebene A der Punkt a gegeben, in der Ebene B ein unendlich kleines Flächenelement dB; die Strahlen, welche vom Punkte a nach allen Punkten des Umfanges von dB gehen, schneiden dann die Ebene C im Umfange eines Flächenelementes dC, dessen Verhältniss zu dB bestimmt werden soll. Wird das Element dB, dessen Gestalt hierbei gleichgültig ist, als ein Rechteck $= dx_b\, dy_b$ angenommen, so dass die Coordinaten der Endpunkte b, b_1, b_2 und b_3 beziehungsweise

$$= x_b, y_b;\; x_b-dx_b, y_b;\; x_b, y_b+dy_b;\; x_b+dx_b, y_b+dy_b$$

Fig. 3.

sind, so kann das entsprechende Element dC als ein Parallelogramm $c\, c_1\, c_2\, c_3$ (Fig. 3) betrachtet werden. ...nkte c_1 und c_2, welche auf den Strahlen ...iegen, bezüglich auf den Eckpunkt ... dem Strahle ab liegt, die folgenden ...rdinaten haben:

$$cp_1 = \frac{\partial x_c}{\partial x_b} dx_b \qquad cp_2 = \frac{\partial y_c}{\partial y_b} dy_b$$

$$p_1 c_1 = \frac{\partial y_c}{\partial x_b} dx_b \qquad p_2 c_2 = \frac{\partial x_c}{\partial y_b} dy_b$$

Ist nun q_1 der Schnittpunkt von $p_1 c_1$ mit $c_2 c_3$, q_2 der Schnittpunkt von cp_2 mit $c_2 c_3$, und $q_2 q_3$ parallel cp_1, so ist

$$dC = cc_1 c_3 c_2 = c\, c_1 q_1 q_2 = cp_1 q_3 q_2$$

$$= cp_1 (cp_2 - p_2 q_2) = cp_1 \left(cp_2 - \frac{p_2 c_2}{cp_1} p_1 c_1\right) = cp_1 \cdot cp_2 - p_2 c_2 \cdot p_1 c_1$$

$$= \left(\frac{\partial x_c}{\partial x_b}\frac{\partial y_c}{\partial y_b} - \frac{\partial x_c}{\partial y_b}\frac{\partial y_c}{\partial x_b}\right) dx_b\, dy_b$$

$$\text{oder } \frac{dC}{dB} = \frac{\partial x_c}{\partial x_b}\frac{\partial y_c}{\partial y_b} - \frac{\partial x_c}{\partial y_b}\frac{\partial y_c}{\partial x_b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Um die in diesem Ausdrucke vorkommenden partiellen Differentialquotienten als Functionen der Coordinaten der Punkte a, b, c auszudrücken, kann irgend eines der Gleichungenpaare (1), (2), (3) benutzt werden; hier mögen die Gleichungen (1) gewählt werden, welche, sofern hier x_a und y_a Constante sind, sich dadurch auszeichnen, dass

$$\frac{\partial t_{ab}}{\partial x_a} \text{ und } \frac{\partial t_{ab}}{\partial y_a} \text{ nur die Variablen } x_b \text{ und } y_b,$$

$$\frac{\partial t_{ac}}{\partial x_a} \text{ und } \frac{\partial t_{ac}}{\partial y_a} \text{ nur die Variablen } x_c \text{ und } y_c$$

enthalten. Setzt man zur Abkürzung vorübergehend

$$t_{bc} = A, \quad t_{ac} = B, \quad t_{ab} = C$$

und bezeichnet eine Differentiation

nach	x_a	y_a	x_b	y_b	x_c	y_c
durch den Zeiger	a	α	b	β	c	γ,

so lassen jene Gleichungen (1) sich so schreiben:

$$C_a - B_a = 0; \quad C_\alpha - B_\alpha = 0.$$

Wenn man sie nach x_b differenzirt und berücksichtigt, dass x_c und y_c Functionen von x_b sind, so folgt:

$$C_{ab} - B_{ac}\frac{\partial x_c}{\partial x_b} - B_{a\gamma}\frac{\partial y_c}{\partial x_b} = 0$$

$$C_{\alpha b} - B_{\alpha c}\frac{\partial x_c}{\partial x_b} - B_{\alpha\gamma}\frac{\partial y_c}{\partial x_b} = 0;$$

n nach y_b:

$$- B_{ac} \frac{\partial x_c}{\partial y_b} - B_{a\gamma} \frac{\partial y_c}{\partial y_b} = 0$$

$$- B_{ac} \frac{\partial x_c}{\partial y_b} - B_{a\gamma} \frac{\partial y_c}{\partial y_b} = 0.$$

ser 4 Gleichungen folgt:

$- B_{a\gamma} B_{ac}$:

$, - C_{ab} B_{a\gamma} : C_{ab} B_{ac} - B_{ac} C_{ab}$

n:

$- B_{a\gamma} B_{ac}$:

$- C_{a\beta} B_{a\gamma} : C_{a\beta} B_{ac} - B_{ac} C_{a\beta}$;

Doppelproportionen:

$_{ac} B_{a\gamma} - B_{a\gamma} B_{ac})^2$:

$B_{ac} - B_{ac} C_{a\beta}) - (B_{a\gamma} C_{a\beta} - C_{a\beta} B_{a\gamma})$
$(C_{ab} B_{ac} - B_{ac} C$

$B_{ac})^2 : (B_{ac} B_{a\gamma} - B_{a\gamma} B_{ac}) (C_{ab} C_{a\beta} - C_{a\beta} C$

$$= \frac{B_{ac} B_{a\gamma} - B_{a\gamma} B_{ac}}{C_{ab} C_{a\beta} - C_{a\beta} C_{ab}}.$$

äre gefunden worden, wenn das Element dC
echende Element dB dazu bestimmt worden wär
rsichtlich, dass sich mit Hülfe der Gleichung
sdruck für das Verhältniss der Flächenelemente
und C ergiebt, welche einem von einem Punkte
en Strahlenbüschel entsprechen, desgl. mit Hülfe
as Verhältniss der Flächenelemente dA und dB
che einem von einem Punkte c der Ebene C aus
entsprechen. Jedes dieser Verhältnisse ist
verhältnisse zu entnehmen:

$$\left.\begin{array}{l} dA : dB : dC = a : b : c \;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{worin } a,\ b,\ c \text{ die Absolutwerthe der folgenden Ausdrücke} \\ \text{bedeuten:} \\ a = A_{bc}A_{\beta\gamma} - A_{b\gamma}A_{\beta c} = \dfrac{\partial^2 t_{bc}}{\partial x_b\,\partial x_c}\,\dfrac{\partial^2 t_{bc}}{\partial y_b\,\partial y_c} - \dfrac{\partial^2 t_{bc}}{\partial x_b\,\partial y_c}\,\dfrac{\partial^2 t_{bc}}{\partial y_b\,\partial x_c} \\ b = B_{ac}B_{a\gamma} - B_{a\gamma}B_{ac} = \dfrac{\partial^2 t_{ac}}{\partial x_a\,\partial x_c}\,\dfrac{\partial^2 t_{ac}}{\partial y_a\,\partial y_c} - \dfrac{\partial^2 t_{ac}}{\partial x_a\,\partial y_c}\,\dfrac{\partial^2 t_{ac}}{\partial y_a\,\partial x_c} \\ c = C_{ab}C_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}C_{ab} = \dfrac{\partial^2 t_{ab}}{\partial x_a\,\partial x_b}\,\dfrac{\partial^2 t_{ab}}{\partial y_a\,\partial y_b} - \dfrac{\partial^2 t_{ab}}{\partial x_a\,\partial y_b}\,\dfrac{\partial^2 t_{ab}}{\partial y_a\,\partial x_b} \end{array}\right\}\;\ldots (5).$$

Zur Bestimmung der Wärmemenge, welche irgend zwei Elemente dA und dB der Ebenen A und B sich gegenseitig zustrahlen, werde nun zunächst angenommen, dass eine Concentration der Strahlen nicht stattfindet, dass also jeder Punkt des einen Elementes von jedem Punkte des anderen einen und zwar nur einen Strahl (derselben Gattung) erhält.

Um insbesondere die Wärmemenge $= dQ_{ab}$ zu bestimmen, welche das Element dA dem Elemente dB in der Zeiteinheit zustrahlt, werde die Mittelebene C parallel der Ebene A in einem so kleinen Abstande ϱ angenommen, dass das durchstrahlte Mittel zwischen dA und der Ebene C als gleichförmig, jeder der betreffenden Strahlentheile ac folglich als geradlinig vorauszusetzen ist. Ist nun dC das Flächenelement, in welchem der von einem beliebigen Punkte a des Elementes dA nach dem Elemente dB gehende Strahlenbüschel die Ebene C schneidet, so ist den Gleichungen (5) zufolge

$$dC = \frac{c}{b}\,dB,$$

worin die Grösse b sich unter den gemachten Voraussetzungen auf eine sehr einfache Form bringen lässt. Werden nämlich die Coordinatenaxen in den Ebenen A und C einander parallel und so angenommen, dass die Verbindungslinie ihrer Anfangspunkte auf diesen Ebenen senkrecht ist, so ist der Abstand r des Punktes a mit den Coordinaten x_a, y_a von dem beliebigen Punkte c (x_c, y_c) des Elementes dC:

$$r = \sqrt{\varrho^2 + (x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2}$$

und wenn w_a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der strahlenden Wärme in dem Mittel zunächst dem Elemente dA bedeutet, so ist

$$t_{ac} = \frac{r}{w_a}, \quad \text{also } b = \frac{1}{w_a^2}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_a\,\partial x_c}\,\frac{\partial^2 r}{\partial y_a\,\partial y_c} - \frac{\partial^2 r}{\partial x_a\,\partial y_c}\,\frac{\partial^2 r}{\partial y_a\,\partial x_c}\right)$$

usdrucke von r zufolge

$$\frac{\partial r}{\partial x_a} = -\frac{x_c - x_a}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial x_c} = \frac{x_c - x_a}{r}$$

$$\frac{1}{r^2}\left[r - \frac{(x_c - x_a)^2}{r}\right]; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_a \partial y_c} = \frac{1}{r^2}(x_c - x_a)\frac{y_c - y_a}{r}$$

$$\frac{1}{r^2}\left[r - \frac{(y_c - y_a)^2}{r}\right]; \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y_a \partial x_c} = \frac{1}{r^2}(y_c - y_a)\frac{x_c - x_a}{r}$$

$$\frac{1}{r^4}\left[r^2 - (x_c - x_a)^2 - (y_c - y_a)^2\right] = \frac{1}{w_a^2}\frac{\varrho^2}{r^4} \quad \ldots\ldots 6$$

$$dC = w_a^2 \frac{r^4}{\varrho^2} c.\, dB.$$

len des vom Punkte a nach dem Elemente dB gehenden
en unendlich kleinen Winkel mit einander, so dass die
solchen Strahls im Punkte a als die Richtung des ganzen
Punkte bezeichnet werden kann. Bildet diese Richtung
Ebene C hin gerichteten Normalen der Ebenen A und
ist

$$= \frac{\varrho}{r}, \quad \text{also auch } dC = \frac{w_a^2 r^2}{\cos^2\vartheta} c.\, dB.$$

ch ferner um a als Mittelpunkt mit den Halbmessern
beschrieben, so wird letztere Kugelfläche vom Strahl
lächenelemente $= dC.\cos\vartheta$ geschnitten, also die erstere
läche mit dem Halbmesser ϱ im Flächenelemente

$$dK = \frac{\varrho^2}{r^2} dC.\cos\vartheta,$$

cht auf den Ausdruck von dC sich ergiebt:

$$\frac{dK}{\varrho^2} = \frac{w_a^2}{\cos\vartheta} c.\, dB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7$$

= dem Flächenelemente, in welchem der Strahl
einen Ursprung a als Mittelpunkt mit dem Halbmesser
gelfläche schnitte, wenn er bis dahin dieselbe Richtung
kann die **Oeffnungsgrösse des von a nach**
enbüschels genannt werden. Sie ist für die Strahlen
n den verschiedenen Punkten a des Elementes dA nach

dB gehen, nur unendlich wenig verschieden, und es ist somit die Wärmemenge dQ_{ab} einerseits dieser Oeffnungsgrösse und anderseits der Projection von dA auf eine zu den gleichen Richtungen aller Strahlenbüschel senkrechte Ebene proportional zu setzen:

$$dQ_{ab} = \varepsilon \,.\, dA \cos\vartheta \,.\, \frac{dK}{\varrho^2} = \varepsilon w_a^2 c \,.\, dA\, dB,$$

worin ε einen Coefficienten bedeutet, welcher durch die specifische Wärmeemission $= e_a$ des Flächenelementes dA, d. i. durch die Wärmemenge bestimmt ist, welche von demselben pro Flächeneinheit in 1″ im Ganzen gegen die (unendliche) Ebene C hin ausgestrahlt wird. Aus der entsprechenden Gleichung

$$\int \varepsilon\, dA \cos\vartheta\, \frac{dK}{\varrho^2} = \frac{\varepsilon}{\varrho^2}\, dA \int dK \cos\vartheta = e_a\, dA,$$

worin das Integral sich über die ganze Halbkugel zum Halbmesser ϱ erstreckt, also

$$\int dK \cos\vartheta = \pi\varrho^2$$

ist, folgt

$$\varepsilon = \frac{e_a}{\pi}, \text{ also } dQ_{ab} = e_a w_a^2 \frac{c}{\pi}\, dA\, dB \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

= der Wärmemenge, welche das Element dA dem Elemente dB in 1″ durch Strahlung zusendet, worin die Grösse c durch die betreffende Gl. (5) bestimmt ist. Ebenso ist umgekehrt die Wärmemenge, welche dA von dB in 1″ empfängt, wenn e_b und w_b die entsprechenden Bedeutungen für dB wie e_a und w_a für dA haben,

$$dQ_{ba} = e_b w_b^2 \frac{c}{\pi}\, dA\, dB$$

$$dQ_{ab} : dQ_{ba} = e_a w_a^2 : e_b w_b^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9).$$

Es werde jetzt angenommen, die Wärmestrahlung zwischen den Elementen dA und dB sei mit einer Concentration der Strahlen (durch Brechung oder Reflexion) verbunden, und zwar soll zunächst der extreme Fall vorausgesetzt werden, dass alle Strahlen, welche, von irgend einem Punkte a des Elementes dA ausgehend, durch ein gewisses endliches Flächenstück ΔC der Ebene C hindurchgehen, in einem Punkte b von dB, dem conjugirten Brennpunkte von a, zusammentreffen. Das Element dB sei das optische Bild von dA, d. h. der Ort der conjugirten Brennpunkte b aller Punkte a von dA; umgekehrt ist dann auch dA das optische Bild von dB.

Die Grösse c, Gl. (5) ist in diesem Falle unendlich. Denn durch den Punkt (x_a, y_a) des Elementes dA ist sein conjugirter Brennpunkt (x_b, y_b) im Elemente dB zugleich mitgegeben und umgekehrt, so dass die im Ausdrucke von c vorkommenden Differentialquotienten von t_{ab} nach irgend welchen der Coordinaten x_a, y_a, x_b, y_b hier keine endlichen Werthe haben können. In der That sind auch die Verhältnisse $dA:dC$ und $dB:dC$, welche nach Gl. (5) beziehungsweise $= a:c$ und $= b:c$ wären, im vorliegenden Falle unendlich klein, weil ein von a nach dB oder von b nach dA gehender Strahlenbüschel die Ebene C in einer Fläche ΔC von endlicher Grösse schneidet.

Ein Strahlenbüschel dagegen, welcher von irgend einem Punkte c der Fläche ΔC nach dA oder dB geht, schneidet die Ebene B in dB resp. die Ebene A in dA, so dass zwischen diesen Elementen dA und dB nach wie vor die Beziehung stattfindet:

$$dA:dB = a:b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

welche auch in optischer Beziehung von Interesse ist, indem sie mit Rücksicht auf die Bedeutungen von a und b nach Gl. (5) die allgemeinste Gleichung zur Bestimmung des Grössenverhältnisses zwischen einem Gegenstande und seinem optischen Bilde ist.

Ist nun dC ein Element der Fläche ΔC, so ist die Wärmemenge dQ_{ab}, welche das Element dA dem Elemente dB durch dieses Element dC hindurch zusendet, gleich der Wärmemenge, welche überhaupt von dA nach dC gestrahlt wird, indem letztere vollständig in dB concentrirt wird, und da zwischen diesen Elementen dA und dC dieselbe Beziehung stattfindet wie zwischen dA und dB in Gl. (8), dass nämlich von jedem Punkte des einen nach jedem Punkte des anderen Elementes ein und nur ein Strahl geht, so ist hier

$$dQ_{ab} = e_a w_a^2 \frac{b}{\pi} dA\, dC,$$

erhalten aus Gl. (8) durch Vertauschung von dB mit dC und von c mit b, welche letztere Grösse nach Gl. (5) ebenso von t_{ac} abhängt wie c von t_{ab}. Dieselbe Gleichung gilt für alle Elemente von ΔC, und es ist also die ganze Wärmemenge, welche in 1" von dA nach dB gestrahlt wird,

$$\Delta Q_{ab} = e_a w_a^2 \frac{1}{\pi} dA \int b\, dC = \frac{e_a w_a^2}{\pi} \int b\, dA\, dC \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Ebenso ist umgekehrt die Wärmemenge, welche dA von dB in 1" empfängt,

$$\varDelta Q_{ba} = \frac{e_b w_b^2}{\pi} \int a \, dB \, dC,$$

wobei die Integration ebenso wie in Gl. (11) sich über die Fläche $\varDelta C$ erstreckt.

Diese Wärmemengen, welche die Flächenelemente dA und dB mit einander austauschen, sind in Folge der Concentration der Strahlen wesentlich andere wie im vorigen Falle ohne solche Concentration, ihr Verhältniss aber ist dasselbe wie früher, nämlich mit Rücksicht auf Gl. (10):

$$\varDelta Q_{ab} : \varDelta Q_{ba} = e_a w_a^2 : e_b w_b^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9, a).$$

Es seien nun allgemein A und B irgend zwei begrenzte Flächen, welche sich gegenseitig Wärme zustrahlen, C eine zwischen A und B liegende Fläche, $\varDelta C$ das Stück derselben, welches der Ort aller Punkte ist, in welchen die von A nach B oder umgekehrt gehenden Strahlen die Fläche C schneiden. Mag diese Strahlung mit oder ohne Concentration der Strahlen in A und B stattfinden, so kann doch die beliebige Fläche C immer so gewählt werden, dass in ihr keine Concentration der Strahlen stattfindet, dass also von jedem Punkte der Flächen A und B nach irgend einem Punkte von $\varDelta C$ nur ein Strahl geht. Es ist dann die Wärmemenge, welche das Element dA der Fläche A durch das Element dC von $\varDelta C$ hindurch der Fläche B in 1″ zustrahlt, nach Gl. (8) bei Vertauschung von dB mit dC und c mit b:

$$dQ_{ab} = e_a w_a^2 \frac{b}{\pi} \, dA \, dC,$$

wobei die in der Grösse b nach Gl. (5) vorkommenden Coordinaten x_a, y_a und x_c, y_c sich auf Axen in den Berührungsebenen der Flächen A und C beziehen, mit welchen die Elemente dA und dC derselben zusammenfallen. Die Berechnung der ganzen Wärmemenge, welche in 1″ von A nach B gestrahlt wird, erfordert eine zweimal zweifache Integration über die ganze Fläche A und das ganze Flächenstück $\varDelta C$, ist also

$$Q_{ab} = \frac{1}{\pi} \int e_a w_a^2 \, dA \int b \, dC = \frac{1}{\pi} \iint e_a w_a^2 \, b \, dA \, dC \quad \ldots \quad (12),$$

wobei, sofern dA und dC unendlich klein zweiter Ordnung sind, jede der beiden Integrationen zwei einzelne Integrationen in sich begreift und die Grenzen der Integration in Beziehung auf dC durch die Grenzen der Fläche B bestimmt und übrigens Functionen des Ortes sind, wo das Element dA in der Fläche A liegt. Ebenso ist umgekehrt die Wärmemenge, welche die Fläche A in 1″ von der Fläche B empfängt,

$$Q_{ba} = \frac{1}{\pi}\int e_b w_b^2\, dB \int a\, dC = \frac{1}{\pi}\iint e_b w_b^2\, a\, dB\, dC,$$

wobei die Grenzen der Integration in Beziehung auf dC durch die Grenzen der Fläche A bestimmt und übrigens Functionen des Ortes sind, wo das Element dB in der Fläche B liegt. Nun können die Flächen A und B insbesondere so in Elemente zerlegt werden, dass je zwei derselben dA und dB demselben Strahlenbüschel entsprechen, dessen Ursprung c in der Fläche C liegt; dann ist nach Gl. (5)

$$b\, dA = a\, dB$$

und es entspricht jedem Elementargliede $b\, dA\, dC$ im Ausdrucke von Q_{ab} ein gleiches Elementarglied $a\, dB\, dC$ im Ausdrucke von Q_{ba}, so dass, die Integrale zwischen den vorerwähnten Grenzen genommen, auch

$$\iint b\, dA\, dC = \iint a\, dB\, dC$$

ist und somit, wenn e_a und w_a in allen Punkten von A, e_b und w_b in allen Punkten von B gleich sind, sich wieder verhält:

$$Q_{ab} : Q_{ba} = e_a w_a^2 : e_b w_b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9, b)$$

Bei diesen Betrachtungen sind Strahlen von einerlei Gattung (von gleicher sogen. Wärmefarbe) vorausgesetzt worden; sind aber dieselben von ungleicher Gattung, so dass sie mit etwas verschiedenen Geschwindigkeiten in demselben Mittel fortgepflanzt werden, so sind unter w_a und w_b die betreffenden Mittelwerthe zu verstehen. Wenn ferner die Wärmestrahlung zwischen A und B mit Wärmeverlusten unterwegs verbunden ist (durch Brechung, Reflexion oder durch Absorption von Seiten des Mittels), so werden dadurch die Absolutwerthe von Q_{ab} und Q_{ba} zwar vermindert, doch bleibt ihr Verhältniss dasselbe, weil jene Verluste auf demselben Wege oder Strahle stets dieselben sind, mag derselbe im einen oder im umgekehrten Sinne durchlaufen werden.

Schliesslich ist zu bemerken, dass, wenn A und B die Oberflächen von Körpern sind, von der Wärme Q_{ab} im Allgemeinen nur ein Theil $= \alpha_b Q_{ab}$ von der hinter B liegenden Körperschicht absorbirt wird, also eine Temperaturerhöhung derselben bewirkt, während ein zweiter Theil von der Fläche B reflectirt und ein dritter durch die Körperschicht hindurch gestrahlt werden kann. Ebenso sei $\alpha_a Q_{ba}$ derjenige Theil der von B nach A in 1″ gestrahlten Wärme, welcher von der Körperschicht hinter A absorbirt wird. Die sogen. Absorptionscoefficienten α_a und α_b sind von den Beschaffenheiten der betreffenden Körperschichten abhängig,

für vollkommen schwarze Körper = 1. Sollen nun die beiden Körperschichten sich im Temperaturgleichgewichte, d. h. im **Beharrungszustande der gegenseitigen Wärmemittheilung durch Strahlung** befinden, so muss

$$\alpha_b Q_{ab} = \alpha_a Q_{ba}, \quad \text{also} \quad \frac{e_a}{\alpha_a} w_a^2 = \frac{e_b}{\alpha_b} w_b^2$$

sein. Für den Fall, dass die Körper sich in einem gleichförmigen Mittel (z. B. beide in der atmosphärischen Luft) befinden und dass eine Concentration der Strahlen nicht stattfindet, kann es als erfahrungsmässig constatirt betrachtet werden, dass der Beharrungszustand dann stattfindet, wenn die Temperaturen der übrigens beliebig verschieden beschaffenen Oberflächenschichten der beiden Körper einander gleich sind. Setzt man also die specifischen Wärmeemissionen e_a und e_b, welche im Allgemeinen von den materiellen Beschaffenheiten und Temperaturen der Oberflächenschichten und von den Beschaffenheiten der angrenzenden Mittel abhängen können, beziehungsweise

$$e_a = \varepsilon_a e_a' \text{ und } e_b = \varepsilon_b e_b',$$

unter e_a' und e_b' die nur von den Temperaturen der Oberflächenschichten und von den angrenzenden Mitteln abhängigen specif. Wärmeemissionen vollkommen schwarzer Körper, unter ε_a und ε_b also **Emissionscoefficienten** verstanden, welche für vollkommen schwarze Körper = 1 sind, so dass das Temperaturgleichgewicht durch Strahlung nun allgemein an die Bedingung

$$\frac{\varepsilon_a}{\alpha_a} e_a' w_a^2 = \frac{\varepsilon_b}{\alpha_b} e_b' w_b^2$$

gebunden ist, so ist im erwähnten Falle eines zwischen A und B gleichförmigen Mittels ($w_a = w_b$) für den Beharrungszustand auch $e_a' = e_b'$, also $\varepsilon_a : \alpha_a = \varepsilon_b : \alpha_b$. **Die Emissions- und Absorptionscoefficienten ε und α verschiedener Körper haben also bei gleicher Neigung der aus- und einfallenden Strahlen** (wie solche hier überall stattfindet) **ein constantes Verhältniss zu einander.** Die Bedingung des Temperaturgleichgewichtes durch Strahlung reducirt sich dadurch auf:

$$e_a' w_a^2 = e_b' w_b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (13).$$

Wenn es also allgemein wahr sein soll, dass das Temperaturgleichgewicht zweier sich Wärme mittheilender Körper durch die Gleichheit ihrer Oberflächentemperaturen charakterisirt ist, nämlich nicht nur im Falle der Wärmemittheilung durch Berührung, wofür diese Gleichheit durch Definition

dern auch im Falle der Wärmestrahlung, so dass also auch
lbst ein überschüssiger Wärmeübergang von einem kälteren
eren Körper stattfinden kann, so muss man annehmen, dass
hen Wärmeemissionen vollkommen schwarzer Kör-
chen Oberflächentemperaturen den Quadraten der
gsgeschwindigkeiten der Strahlen in den angren-
eln umgekehrt proportional sind, wobei es keinen
macht, ob die Strahlen durch Brechungen oder
in beliebiger Weise concentrirt werden oder nicht

uivalenz von Wärme und Arbeit; Wärmegleichung und Gleichung des Arbeitsvermögens.

n Erfahrungen zufolge kann durch Aufwendung von Arbeit
ien, also der Wärmezustand eines Körpers verändert werden
, durch Aufwendung von Wärme Arbeit verrichtet oder ent-
endige Kraft gewonnen, also der äussere Zustand eines
lert werden. Beispiele der ersten Art von Wirkungen sind
innung durch Reibung und durch die Compression eines
erbrauch von Arbeit oder entsprechender lebendiger Kraft
weiten Art gewähren alle sogenannten calorischen Maschinen
cher Arbeit unter Verbrauch von Wärme gewonnen wird
äfte als die Ursachen der Aenderungen des äusseren Zu-
Körpers definirt wurden, so dass insbesondere die Arbeiten
ie Ursachen von Aenderungen der lebendigen Kraft sind
jenen Erfahrungen auch Wärme dieselbe Wirkung haben
ner die Wärme als Ursache der Aenderungen des inneren
nirt wurde, insoweit derselbe durch Aggregatform, spec
Spannungszustand als sogen. Wärmezustand charakterisirt
ach obigen Erfahrungen auch Arbeiten die gleiche Wirkung
so muss man nothwendig schliessen, dass Wärmemengen
mit einander vergleichbare Grössen sind, welche sich unter
ständen gegenseitig vertreten können, und zwar muss man
eren Definitionen nicht hinfällig werden sollen, diese Ver-
ne Umwandlung betrachten der Art, dass Arbeit sich in
ndelt, indem sie eine Aenderung des Wärmezustandes eines
lge hat, und dass Wärme sich in Arbeit verwandelt, indem
ge Kraft eines Körpers ändert oder eine äussere Kraft als
erwindet.

Der Begriff einer solchen gegenseitigen Verwandlung hat das Princip der Aequivalenz von Arbeit und Wärme zur nothwendigen Folge, d. h. er setzt ein bestimmtes Maassverhältniss der sich in einander verwandelnden Grössen voraus, dessen Zahlenwerth nur von den Einheiten abhängt, durch welche die Grössen gemessen werden. In der That lehrt auch die Erfahrung, dass, wenn durch Aufwendung von Arbeit der Wärmezustand eines Körpers verändert und die aufgewendete oder verbrauchte Arbeit mit der Wärmemenge verglichen wird, welche dem Körper zur Bewirkung derselben Aenderung des Wärmezustandes hätte mitgetheilt werden müssen, oder wenn umgekehrt durch Veränderung des Wärmezustandes eines Körpers Arbeit verrichtet und die verrichtete oder gewonnene Arbeit mit der Wärmemenge verglichen wird, welche dem Körper zur Bewirkung derselben Aenderung des Wärmezustandes hätte entzogen werden müssen, alsdann jene Arbeit dieser Wärme stets so nahe in demselben Verhältnisse $= 1 : A$ proportional ist, dass die Unterschiede den Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können.

Die Wärmemenge A, welche der Arbeit $= 1$ entspricht, heisst der Wärmewerth der Arbeitseinheit (das calorische Arbeitsäquivalent), die Arbeit $\frac{1}{A} = W$, welche der Wärmemenge $= 1$ entspricht, heisst der Arbeitswerth der Wärmeeinheit (das mechanische Wärmeäquivalent). Im Mittel aus vielen experimentellen Bestimmungen (besonders ausgeführt von Joule durch Vergleichung der zur Unterhaltung einer Reibung aufgewendeten Arbeit mit der dadurch gewonnenen Wärmemenge) hat sich ergeben:

$$\frac{1}{A} = W = 424 \text{ Kgmtr.}$$

$$A = \frac{1}{W} = \frac{1}{424} \text{ Cal.}$$

Nach den Principien der Mechanik (§. 6, Gl. 7) sind Arbeiten und lebendige Kräfte im Zahlenverhältnisse $= 1$ einander gleichwerthig, so dass durch Verbrauch einer gewissen Arbeit eine ebenso grosse lebendige Kraft gewonnen wird und umgekehrt; zwischen lebendiger Kraft und Wärme besteht deshalb dieselbe Aequivalenz im Zahlenverhältnisse $1 : A = W : 1$ wie zwischen Arbeit und Wärme.

Dem Vorstehenden zufolge hat ein Körper in Folge seines augenblicklichen Zustandes aus einem doppelten Grunde das Vermögen, Arbeit zu verrichten: in Folge seines äusseren oder Bewegungszustandes und in

Folge seines Wärmezustandes. Das Arbeitsvermögen, welches dem Bewegungszustande des Körpers entspricht, ist = seiner lebendigen Kraft L und heisse sein äusseres Arbeitsvermögen; das dem Wärmezustande entsprechende Arbeitsvermögen heisse das innere Arbeitsvermögen und sei mit U bezeichnet. Das gesammte oder Arbeitsvermögen kurzweg ist dann $= L + U$. Der Wärmewerth des inneren Arbeitsvermögens $= AU$ heisse die Körperwärme; dieselbe kann ebenso wie U nicht absolut, sondern nur relativ, nämlich als Differenz der Körperwärmen resp. der inneren Arbeitsvermögen für den augenblicklichen und einen gewissen anderen anfänglichen Wärmezustand des Körpers bestimmt werden. Für ein Gemisch von Wasser und gesättigtem Wasserdampf lässt sich z. B. bestimmen, um welchen Betrag die Körperwärme oder das innere Arbeitsvermögen desselben in einem gewissen Zustande grösser ist, als wenn sich die ganze Masse im Zustande von Wasser bei 0° Temperatur und einer bestimmten Pressung befände; es lässt sich aber kein Wärmezustand der Masse (als Eis) angeben, welcher einer weiteren Aenderung durch Wärmeentziehung nicht mehr fähig, und für welchen also die Körperwärme resp. das innere Arbeitsvermögen = Null wäre.

Nach dem Princip der Aequivalenz von Arbeit, lebendiger Kraft und Wärme ist für irgend eine unendlich kleine Zustandsänderung eines Körpers der Zuwachs an Arbeitsvermögen desselben = der Arbeitssumme der auf ihn wirkenden äusseren Kräfte + dem Arbeitswerth der ihm von aussen mitgetheilten Wärme. Eine besondere Rolle spielt hierbei die Reibung an der Oberfläche; ihr Erfolg besteht in der Verwandlung einer gewissen Arbeit $= dR$ (oder äquivalenten lebendigen Kraft) in Wärme, welche in einem gewissen Verhältnisse $\alpha : 1 - \alpha$ theils dem Körper selbst, theils seiner Umgebung (den Berührungskörper, längs welchem er mit Reibung in gleitender Bewegung begriffen ist) mitgetheilt wird. Die Arbeitssumme der äusseren Kräfte für die unendlich kleine Zustandsänderung des Körpers enthielte also ausser der Arbeitssumme $= dM + dP$ der Massenkräfte und des äusseren Drucks (§. 6) noch die negative Arbeit $= -dR$ der äusseren Reibung, und der Arbeitswerth der dem Körper an seiner Oberfläche mitgetheilten Wärme enthielte den Bestandtheil $= \alpha\, dR$, so dass in dem Ausdruck für die Aenderung des Arbeitsvermögens mit Rücksicht auf die äussere Reibung das Glied vorkäme:

$$-dR + \alpha\, dR = -(1 - \alpha)\, dR$$

= dem Entgegengesetzten des Arbeitswerthes der an die Umgebung mitgetheilten Reibungswärme. Wenn man aber diese letztere Wärme als

negativen Bestandtheil in die Wärmemenge $= dQ$ einrechnet, welche dem Körper bei seiner unendlich kleinen Zustandsänderung von aussen mitgetheilt, nämlich mehr mitgetheilt, als entzogen wird, indem man sich vorstellen kann, dass zunächst die ganze äussere Reibungswärme an den betrachteten Körper übergeht und erst nachträglich ein Theil derselben ihm wieder entzogen wird, so hat man die Gleichung

$$d(L+U) = dM + dP + WdQ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

welche in der Folge die Gleichung des Arbeitsvermögens genannt werden soll. Durch Verbindung derselben mit der Gleichung der lebendigen Kraft — §. 6, Gl. (7) —

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

ergiebt sich:

$$dU = WdQ + dR + dS - dE \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

In dieser Gleichung bedeutet dS die Arbeit der inneren Widerstände, deren Wirkung erfahrungsmässig ebenso wie die der äusseren Reibung in einer Verwandlung von Arbeit (lebendiger Kraft) in Wärme besteht. Es ist also

$$WdQ + dR + dS$$

der Arbeitswerth der dem Körper im Ganzen mitgetheilten, nämlich theils von aussen mitgetheilten (der Umgebung entzogenen), theils durch die äussere Reibung, theils durch die inneren Widerstände erzeugten Wärme, und die Gl. (2), welche in der Folge die Wärmegleichung heissen mag, drückt aus, dass jene Wärme $= dU + dE$ theils zur Vermehrung des inneren Arbeitsvermögens des Körpers (resp. der Körperwärme AU), theils zur Verrichtung von Deformationsarbeit desselben verwendet wird.

Hiernach findet überhaupt die Verwandlung von Wärme in Arbeit in solcher Weise statt, dass sie zunächst in Deformationsarbeit sich umsetzt, welche dann gemäss der Gleichung der lebendigen Kraft theils zur Vermehrung der lebendigen Kraft des Körpers, theils zur Ueberwindung von Widerstandskräften dienen kann. Die Wärme, welche sich in Deformationsarbeit verwandelt, kann dabei theils solche Wärme sein, welche dem Körper erst mitgetheilt wird, sei es von äusseren Körpern durch Berührung oder Strahlung, sei es an der Oberfläche durch die Verwandlung von Reibungsarbeit (dR) oder im Inneren durch die Verwandlung innerer Widerstandsarbeit (dS) in Wärme, theils kann sie der Körperwärme selbst entnommen sein, entsprechend dem Falle, dass in Gl. (2) dU negativ und dE positiv ist. Umgekehrt kann auch, einem negativen Werthe von dE entsprechend, Deformationsarbeit sich in Wärme verwandeln; aber es kann die Verwand-

lung von Arbeit überhaupt in Wärme, — und dadurch unterscheidet sie sich wesentlich von der umgekehrten Verwandlung, — auch unabhängig von Deformationsarbeit, nämlich durch Vermittelung der secundären Bewegungswiderstände (der äusseren Reibung und der inneren Widerstände) stattfinden. Während also die gegenseitige Verwandlung von Deformationsarbeit und Wärme in einander eine umkehrbare Verwandlung ist, ist die Umsetzung der Arbeit secundärer Bewegungswiderstände in Wärme eine nicht umkehrbare Verwandlung; es liegt im Wesen der secundären Bewegungswiderstände, dass sie immer eine negative Arbeit verrichten, d. h. Arbeit oder entsprechende lebendige Kraft verbrauchen, welche, indem sie als solche verschwindet, als Wärme erhalten wird. Wenn gemäss der Voraussetzung in §. 8 keine Tangentialspannungen in dem betrachteten Körper vorkommen, so ist die hier im Allgemeinen sogenannte Deformationsarbeit dE die in §. 6 näher charakterisirte, nämlich durch Gl. (9) daselbst allgemein bestimmte Expansionsarbeit, welche nur von den Pressungen und den Volumenänderungen der Körperelemente abhängt.

Ihren Begriffen zufolge sind die Körperwärme und das innere Arbeitsvermögen eines Körpers durch den Wärmezustand desselben bestimmt. Das innere Arbeitsvermögen pro 1 Kgr. $= U$ oder das specifische innere Arbeitsvermögen eines Körpers von gleichförmigem Wärmezustande, resp. das specif. innere Arbeitsvermögen in einem gewissen Punkte eines homogenen Körpers von ungleichförmigem Wärmezustande oder eines continuirlichen Gemisches von ungleichförmigem Mischungsverhältnisse, oder auch das mittlere specif. innere Arbeitsvermögen eines discontinuirlichen Gemisches ist also durch dieselben Grössen bestimmt, wie der Wärmezustand, insbesondere z. B. durch v und p bei einem Körper, in welchem keine Tangentialspannungen vorkommen; oder es hängt (formell, wenn auch nicht thatsächlich, noch etwas allgemeiner) U mit jenen den Wärmezustand charakterisirenden Grössen und mit einer anderen, die aber mit Hülfe der Zustandsgleichung (§. 8) eliminirt werden kann, durch eine Gleichung zusammen, welche in der Folge die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens genannt werden soll. —

Das Princip der Aequivalenz und gegenseitigen Umwandelbarkeit von Wärme und Arbeit oder lebendiger Kraft ist mit der Anschauung von der Wärme als einer Materie, somit einer unveränderlichen Grösse, nicht vereinbar, hat dagegen zu der Annahme geführt resp. dieselbe weiter begründet, dass das Wesen der Wärme in dem Molekularzustande der atomistisch constituirten Materie zu suchen sei, nämlich in der Gruppirung, den gegen-

seitigen inneren Kräften und einer unsichtbaren inneren Bewegung der die Körper in discreter Weise mit leeren Zwischenräumen constituirenden kleinsten Massentheilchen, wobei die Gruppirung auf gewisse mittlere Lagen dieser kleinsten Massentheilchen sich bezieht, welche sie bei der inneren Bewegung höchstens periodisch vorübergehend, wenn überhaupt wirklich einnehmen, und wobei die innere Bewegung oder deren Aenderung an und für sich nicht mit einer wahrnehmbaren Aenderung der Massenvertheilung verbunden ist, während eine Aenderung jener Gruppirung sich entweder durch eine Aenderung der Aggregatform oder durch eine messbar veränderte Massenvertheilung (Aenderung des specifischen Volumens) oder durch beides zugleich zu erkennen giebt. Von der ausdrücklichen Zugrundelegung dieser Annahme und ihrer näheren Bestimmung hinsichtlich der Art der constituirenden kleinsten materiellen Theilchen (Aetheratome, Körper-Atome und Moleküle) und der besonderen Art ihrer Gruppirung und inneren Bewegung sowie der Wirkungsgesetze der ihnen immanenten Kräfte, welche zur vollständigen Erklärung der Wärmeerscheinungen und somit zur Rechtfertigung der Annahme an sich vorausgesetzt werden müssten, soll jedoch hier, wie schon einleitungsweise zu diesem Abschnitte bemerkt wurde, umsomehr vorläufig abgesehen werden, als eine solche Deduction der Wärmeerscheinungen aus bestimmten atomistischen Annahmen bisher nur sehr unvollkommen gelungen ist. Das Princip der Aequivalenz von Wärme und Arbeit wird hier also ebenso wie die folgende weitere Ausführung und Ergänzung desselben zunächst als lediglich empirisch inducirt betrachtet.

§. 12. Allgemeine Gleichungen zur Bestimmung der Zustandsänderung einer Flüssigkeit (im weiteren Sinne) unter gegebenen Umständen.

Die in §. 5 entwickelten Differentialgleichungen gewähren noch keine vollständige und allgemeine Lösung dieser Aufgabe; denn abgesehen davon, dass noch eine fünfte Beziehung zwischen den in den Gleichungen (6) und (7) daselbst vorkommenden abhängig variablen Grössen u, v, w, μ, p, welche als Functionen der Coordinaten x, y, z und der Zeit t zu bestimmen waren, fehlte, war dort von Aenderungen der Temperatur gar nicht die Rede, und es wurde die Zustandsänderung lediglich als Wirkung äusserer Kräfte betrachtet, während die hier als gegeben vorausgesetzten Umstände im Allgemeinen zugleich eine Mittheilung oder Entziehung von Wärme einschliessen können.

Wenn die Geschwindigkeitscomponenten zur Zeit t im Punkte (x, y, z) nach der Richtung der Coordinatenaxen, welche in §. 5 mit u, v, w bezeichnet wurden, jetzt mit u_x, u_y, u_z bezeichnet werden, und die specif. Masse $\mu = \frac{1}{gv}$ gesetzt wird, unter v das specif. Volumen verstanden, so ist nach den Gleichungen (6) a. a. O.

$$\left.\begin{aligned}
X - gv\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} \\
&\quad - Rgv\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) \\
Y - gv\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} \\
&\quad - Rgv\left(\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) \\
Z - gv\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} \\
&\quad - Rgv\left(\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 1$$

$$\text{mit } \Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

unter X, Y, Z die Componenten der beschleunigenden Massenkraft und unter R eine Constante verstanden, welche sich auf die innere Reibung bezieht; ferner nach Gl. (7) daselbst:

$$\frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial t} + \frac{\partial \frac{u_x}{v}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{u_y}{v}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{u_z}{v}}{\partial z} = 0,$$

wofür mit Rücksicht auf die Bedeutung von Δ auch geschrieben werden kann:

$$\frac{\Delta}{v} + \frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial t} + u_x\frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial x} + u_y\frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial y} + u_z\frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots 2$$

Bezeichnet ferner t die Temperatur im Punkte (x, y, z) zur Zeit t, λ den Wärmeleitungscoefficienten daselbst, so ist nach §. 9, Gl. (2) die Wärmemenge, welche einem diesen Punkt enthaltenden Massenelemente der Flüssigkeit, dessen Volumen zur Zeit $t = \delta V$ ist, im Zeitelemente dt mitgetheilt wird,

$$dQ = \lambda . \delta V \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) dt,$$

wobei vorausgesetzt ist, dass im Inneren der Flüssigkeit die Wärme nur durch Leitung und ohne Mischungsbewegung übertragen wird. Dieselbe Wärmemenge ist nach der Wärmegleichung — §. 11, Gl. (2) — auch

$$dQ = \frac{dU + dE}{W} = A(dU + dE),$$

indem hier $dR = 0$ ist, sofern das betrachtete Massenelement im Inneren der Flüssigkeit liegt, und auch $dS = 0$ gesetzt, d. h. ebenso wie in den Gleichungen (1) von discontinuirlichen Geschwindigkeitsänderungen abstrahirt werden muss, weil die betreffenden inneren Bewegungswiderstände sich nicht in Elemente zerlegen lassen, ihre Wirkungen vielmehr nur im Ganzen beurtheilt und (nach Ausführung der Integration der hier aufzustellenden Differentialgleichungen über einen gewissen Theil der Flüssigkeit) in Rechnung gebracht werden können. In dem letzteren Ausdrucke von dQ ist nach §. 6, Gl. (9) die Expansionsarbeit

$$dE = p . d\,\delta V$$

und somit ergiebt sich durch Gleichsetzung beider Ausdrücke von dQ:

$$A(dU + p . d\delta V) = \lambda . \delta V \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) dt.$$

Darin bedeutet U das innere Arbeitsvermögen des Flüssigkeitselementes vom Volumen δV zur Zeit t. Bezeichnet man aber mit U das specif. innere Arbeitsvermögen im Punkte (x, y, z) zur Zeit t (§. 11), so ist

$$\text{statt } dU \text{ zu setzen: } \frac{\delta V}{v} dU,$$

und indem ferner gesetzt werden kann:

$$d\,\delta V = \frac{\delta V}{v} dv,$$

erhält die letzte Gleichung nach Multiplication mit $\frac{v}{\delta V}$ und Division mit dt die Form:

$$A\left(\frac{dU}{dt} + p\frac{dv}{dt}\right) = \lambda v \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

In dieser letzten Gleichung sind $\frac{dU}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ vollständige Differentialquotienten, indem U und v auf ein Massenelement bezogen wurden, welches zur

t (x, y, z) enthält; es ist also (analog der Entwickelung §. 5)

$$= \frac{\partial U}{\partial t} + u_x \frac{\partial U}{\partial x} + u_y \frac{\partial U}{\partial y} + u_z \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} + u_x \frac{\partial v}{\partial x} + u_y \frac{\partial v}{\partial y} + u_z \frac{\partial v}{\partial z}.$$

. auch die Gleichungen (1) und (2) mit Hülfe voll quotienten etwas einfacher geschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{l} = \frac{du_x}{dt} - Rgr\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) \\ = \frac{du_y}{dt} - Rgr\left(\frac{\partial \Delta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right) \\ = \frac{du_z}{dt} - Rgr\left(\frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right) \end{array}\right\} \dots \; 1.a$$

$$\frac{\Delta}{v} + \frac{d\frac{1}{v}}{dt} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 2.a$$

ch:

$$v\Delta = \frac{dv}{dt} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 2.b$$

ichungen (1) — (3) in Verbindung mit der Zustands

$$f(v, p, t) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 4$$

s inneren Arbeitsvermögens (§. 11)

$$F(v, p, t, U) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad 5$$

, u_y, u_z, v, p, t, U als Functionen von x, y, z, t bestimmt den Gleichungen vorkommenden Grössen theils als 'unctionen von x, y, z, t gegeben sind und wenn ferner willkürlichen Constanten und Functionen, die durch partiellen Differentialgleichungen eingeführt werden, nd die Oberflächenbedingungen gegeben sind, nämlich r und Wärmezustand) zu einer bestimmten Zeit, die d die Umstände, von welchen der Wärmeaustausch keit und ihrer Umgebung abhängt. Wie dabei die g und wie die inneren Bewegungswiderstände zu sind, wird später in der Hydraulik näher dargelegt

werden. Während die Gleichungen (1) — (3) allgemein für jede Art von Flüssigkeit gelten, sind die Gleichungen (4) und (5) für verschiedene Flüssigkeiten verschieden, weshalb auch, abgesehen von den analytischen Schwierigkeiten, welche die Integration der ersteren Gleichungen darbietet, die weitere Behandlung des Problems auf specielle Fälle beschränkt ist. In dem besonderen Falle eines continuirlichen Gemisches von Flüssigkeit und gesättigtem Dampf derselben Art kommt zu den genannten sieben noch eine achte als Function von x, y, z, t zu bestimmende Grösse, das Mischungsverhältniss, wogegen aber auch eine achte Gleichung $\varphi(p, t) = 0$ zur Verfügung ist.

Wenn die Richtung der Geschwindigkeit u in jedem Punkte x, y, z den Umständen gemäss gegeben ist oder angenommen wird, wie es namentlich dann der Fall ist, wenn die Bewegung der Flüssigkeit durch eine von festen Wänden gebildete Leitung beschränkt wird, und wie es überhaupt meist geboten ist, um die mathematische Untersuchung zu erleichtern oder gar zu ermöglichen, so sind durch u auch die Componenten u_x, u_y, u_z bestimmt, und es reducirt sich die Zahl der zu bestimmenden Functionen auf 5, nämlich

$$u, \ v, \ p, \ t, \ U.$$

Die drei Gleichungen (1) können dann in eine zusammengezogen werden. Multiplicirt man die Gleichungen (1, a) beziehungsweise mit

$$dx = u_x\, dt, \quad dy = u_y\, dt, \quad dz = u_z\, dt,$$

wo also dx, dy, dz die Projectionen des Weges $ds = u\, dt$ auf die Coordinatenaxen sind, welchen ein materieller Punkt im Zeitelemente dt durchläuft, und dividirt man die Gleichungen durch g, so ergiebt sich durch ihre Addition mit

$$\frac{1}{g}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = dM$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \frac{\partial p}{\partial s}ds$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x}dx + \frac{\partial \Delta}{\partial y}dy + \frac{\partial \Delta}{\partial z}dz = \frac{\partial \Delta}{\partial s}ds$$

$$\frac{1}{g}(u_x\,du_x + u_y\,du_y + u_z\,du_z) = \frac{u\,du}{g} = d\frac{u^2}{2g}$$

die folgende Gleichung der lebendigen Kraft pro 1 Kgr. eines beliebigen Massenelementes der Flüssigkeit:

$$Rv\left[\frac{\partial \Delta}{\partial s}ds + \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)u_x\,dt\right.$$
$$+\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right)u_y\,dt$$
$$+\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)u_z\,dt$$

›r rechten Seite sind pro 1 Kgr. des Flüssi
Wege $ds = u\,dt$:
›nkraft,
›e Oberfläche von der umgebenden Flüssigk
›, insoweit sie von der Aenderung des spe
ig ist, also nicht zu Deformationsarbeit ve
›lcher vernichtet wird,
›n Reibung.
$= bu,\ u_z = cu,$
s der Richtungswinkel von u mit den Coor
nen von x, y, z sind, so ist mit den Bezeic

$$\frac{\partial a}{\partial y} = a_y' \qquad \frac{\partial a}{\partial z} = a_z'$$
$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = a_y'' \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = a_z''$$

gen hinsichtlich b und c:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a_x' u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_x'\frac{\partial u}{\partial x} + a_x'' u$$

$$a_x'\frac{\partial u}{\partial x} + a_y'\frac{\partial u}{\partial y} + a_z'\frac{\partial u}{\partial z}\Big) + (a_x'' + a_y'' + a''$$

$$b_x'\frac{\partial u}{\partial x} + b_y'\frac{\partial u}{\partial y} + b_z'\frac{\partial u}{\partial z}\Big) + (b_x'' + b_y'' + b''$$

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2}=$$

$$=c\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+2\left(c_x'\frac{\partial u}{\partial x}+c_y'\frac{\partial u}{\partial y}+c_z'\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\left(c_x''+c_y''+c_z''\right)u.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke ergiebt mit Rücksicht darauf, dass

$$a^2+b^2+c^2=1,$$

also

$$aa_x'+bb_x'+cc_x'=0$$

$$aa_x''+bb_x''+cc_x''=-(a_x'^2+b_x'^2+c_x'^2)$$

ist, worin der Index x auch mit y oder z vertauscht werden kann, die Gleichung der lebendigen Kraft in folgender Form:

$$d\frac{u^2}{2g}=dM-v\frac{\partial p}{\partial s}ds+$$

$$+Rr\left[\frac{\partial \Delta}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left\{\begin{array}{l} a_x'^2+b_x'^2+c_x'^2\\ +a_y'^2+b_y'^2+c_y'^2\\ +a_z'^2+b_z'^2+c_z'^2\end{array}\right\}u\right]ds\;.\;.\;(6).$$

Ist K die beschleunigende Massenkraft im Sinne von u, so ist auch

$$dM=\frac{1}{g}K\,ds$$

und man erhält durch Division von Gl. (6) mit $u\,dt=ds$:

$$\frac{1}{g}\frac{du}{dt}=\frac{1}{g}K-v\frac{\partial p}{\partial s}+$$

$$+Rr\left[\frac{\partial \Delta}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\left\{\begin{array}{l} a_x'^2+b_x'^2+c_x'^2\\ +a_y'^2+b_y'^2+c_y'^2\\ +a_z'^2+b_z'^2+c_z'^2\end{array}\right\}u\right]\;.\;.\;.\;(7).$$

In dieser und in den beiden Gleichungen (2, b) und (3):

$$v\Delta=\frac{dv}{dt}\text{ und }A\left(\frac{dU}{dt}+p\frac{dv}{dt}\right)=\lambda v\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right),$$

wodurch in Verbindung mit der Zustandsgleichung (4), der Gleichung des inneren Arbeitsvermögens (5), den Oberflächenbedingungen und dem Anfangszustande die Grössen u, v, p, t, U im vorliegenden Falle als Functionen von x, y, z, t bestimmt sind, ist

$$K=aX+bY+cZ$$

$$\Delta=a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}+(a_x'+b_y'+c_z')u$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial s}=a\frac{\partial \Delta}{\partial x}+b\frac{\partial \Delta}{\partial y}+c\frac{\partial \Delta}{\partial z}$$

$$\vdash c\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\cdot b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z}\Big) u$$

$$\cdot b\frac{\partial v}{\partial y} + c\frac{\partial v}{\partial z}\Big) u$$

$$+ b\frac{\partial U}{\partial y} + c\frac{\partial U}{\partial z}\Big) u.$$

ıit $R = 0$ auch für einen festen Körper.
.nnungen vorkommen und λ als unabhängig
itung vorausgesetzt werden kann.
tand der Bewegung einer Flüssigkeit.
ıssere und innere Zustand in jedem Punkt
hat man zu setzen:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

ıd sämmtliche Grössen u, v, p, t, U Fun-

**umkehrbare Verwandlungen und Zustands-
änderungen.**

h. das dem Wärmezustande entsprechende
lediglich als Wärme betrachtet, nur mit
gewöhnlichen Wärmeeinheit oder Calorie
rth der Körperwärme, so wird Arbeit oder
lche aus Wärme entsteht, nach den Bemer-
Wärmegleichung (2) daselbst zunächst stets
(als Expansionsarbeit im Falle einer Flüss-
festen Körpers, in welchem keine Tausch
gegen kann umgekehrt Wärme nicht nur au-
ch unmittelbar aus den Arbeiten secundärer
n, nämlich äusserer Reibung und solcher
durch discontinuirliche Geschwindigkeits-
gegenseitige Umsetzung von Deformations-
wurde deshalb eine umkehrbare Ver-

wandlung, die Umsetzung der Arbeit secundärer Bewegungswiderstände in Wärme dagegen eine nicht umkehrbare Verwandlung genannt.

Den Uebergang der Wärme aus einem Körper oder Körpertheile von der Temperatur t_1 in einen Körper oder Körpertheil von der Temperatur t_2 kann man auch als eine Verwandlung betrachten, nämlich als eine Verwandlung oder einen Uebergang der betreffenden Wärme von der Temperatur t_1 in solche von der Temperatur t_2. Abgesehen von elektrischen, überhaupt von anderen inneren Zuständen, als dem Wärmezustande, kann ein solcher Uebergang theils unmittelbar durch Leitung oder Strahlung, theils durch Vermittelung eines dritten Körpers oder Körpertheils stattfinden, mit dessen entsprechender Zustandsänderung dann im Allgemeinen zugleich eine Verwandlung von Wärme in Arbeit oder umgekehrt verbunden ist. Eine unmittelbare Wärmemittheilung durch Berührung (Wärmeleitung) kann der Definition (§. 7) zufolge nur von einem Körper höherer zu einem solchen niederer Temperatur stattfinden; dasselbe gilt für den Fall der Strahlung unter der in §. 10 gefundenen Bedingung. Wird letztere als erfüllt vorausgesetzt (wie es auch ohne erschöpfende directe Bestätigung durch den Versuch mit Rücksicht auf die Uebereinstimmung der aus dieser Voraussetzung gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung gerechtfertigt erscheint), so kann also ein unmittelbarer Uebergang der Wärme immer nur von höherer zu niederer Temperatur stattfinden; derselbe ist eine nicht umkehrbare Verwandlung.

Damit die Zustandsänderung eines Körpers mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden sei, ist hiernach zunächst erforderlich, dass Arbeitsverluste, d. h. Verwandlungen von Arbeit in Wärme durch Bewegungswiderstände nicht vorkommen. Ein unmittelbarer Uebergang von Wärme ist freilich streng genommen unvermeidlich, sofern überhaupt Wärmemittheilungen nicht ausgeschlossen werden sollen, allein dem Begriffe des Unendlichkleinen als einem Grenzbegriffe gemäss genügt zur Realisirung einer Zustandsänderung mit nur umkehrbaren Verwandlungen in dieser Hinsicht die Bedingung, dass bei einer Zustandsänderung von endlicher Grösse eine endliche Wärmemenge eine nur unendlich kleine Temperaturänderung erfahre. Dazu ist mit Rücksicht zunächst auf den Wärmeaustausch an der Körperoberfläche nöthig, dass die Differenzen zwischen den Temperaturen t_1 der verschiedenen Elemente der Oberflächenschicht des Körpers und den betreffenden äusseren Temperaturen t_0, d. h. den Temperaturen der unmittelbar angrenzenden Elemente anderer Körper, mit welchen eine Wärmemittheilung durch Berührung, sowie der Oberflächenelemente entfernter Körper, mit denen ein Wärmeaustausch durch Strahlung statt-

findet, überall unendlich klein seien. Dabei könnten diese entsprechenden Temperaturen t_1 und t_0 jede für sich an verschiedenen Stellen um Endliches verschieden sein. Wenn man dann aber durch Flächen constanter Temperatur den Körper in unendlich dünne Schichten zerlegt denkt, so würde zwar die bei der endlichen Zustandsänderung des Körpers von einer solchen Schicht zur benachbarten geleitete endliche Wärmemenge nur eine unendlich kleine Temperaturänderung erfahren, ebenso wie die durch die Oberfläche gehende Wärme; sofern aber der Körper aus unendlich vielen solchen Schichten besteht, würde im Ganzen eine unendlich grosse Wärmemenge eine unendlich kleine Temperaturänderung oder eine endliche Wärmemenge eine endliche Temperaturänderung erfahren können. Damit also auch mit Rücksicht auf Wärmeleitung im Inneren des Körpers seine Zustandsänderung nur mit umkehrbaren Verwandlungen verbunden sei, müssen noch, wenn der Körper homogen ist, die Temperaturdifferenzen zwischen je zwei unendlich nahen Körperpunkten als unendlich klein höherer Ordnung oder zwischen je zwei beliebigen Punkten des Körpers als unendlich klein vorausgesetzt werden, so dass dann auch die äusseren Temperaturen t_0 an verschiedenen Stellen nur unendlich wenig unter sich verschieden sein dürfen. Ist aber der Körper nicht homogen, sondern ein Gemisch von Bestandtheilen gleicher Art und verschiedener Aggregatform, welche sich in Grenzzuständen bezüglich auf den Uebergang aus der einen in die andere Aggregatform befinden, so ist das Temperaturgleichgewicht hinsichtlich der Wärmemittheilung im Inneren des Körpers nicht an eine gleichförmige, sondern an eine solche Vertheilung der Temperatur gebunden, dass dieselbe überall zur betreffenden Pressung in einer bestimmten Beziehung steht; zur Ermöglichung nur umkehrbarer Verwandlungen muss also in diesem Falle die Körpertemperatur in jedem Punkte der Pressung entsprechend (von der ihr entsprechenden Grenztemperatur höchstens um ein Unendlichkleines höherer Ordnung verschieden sein, wobei die Oberflächentemperaturen t_0 an verschiedenen Stellen um Endliches verschieden sein können unbeschadet der unendlich kleinen Differenzen zwischen den sich entsprechenden Temperaturen t_1 und t_0. —

Die Zustandsänderung eines Körpers heisst im Ganzen umkehrbar, wenn die Umkehrung des Aenderungsgesetzes ihrer Ursachen (äusseren Kräfte und mitgetheilten resp. entzogenen Wärmemengen) genügt, um sie in umgekehrtem Sinne d. h. so stattfinden zu lassen, dass dabei der Körper mit allen seinen Elementen durch dieselben äusseren und Wärmezustände wie zuvor in umgekehrter Aufeinanderfolge hindurchgeht, die äusseren Zustände betreffend zugleich mit entgegengesetzten Geschwindigkeitsrichtungen

Es ist dazu erforderlich und genügend, dass mit der Zustandsänderung nur umkehrbare Verwandlungen verbunden sind und dass zu Ende derselben, also in dem Augenblicke, in welchem die Umkehrung stattfinden soll, die Differenz $t_a - t_1$ zwischen der äusseren und der Oberflächentemperatur des Körpers an jeder Stelle seiner Oberfläche, wo ein Wärmeaustausch mit der Umgebung überhaupt stattfinden kann, = Null, sowie dass der Körper selbst in Ruhe, somit auch die Differenz $p_0 - p_1$ zwischen dem äusseren Druck p_0 und der Körperpressung p_1 an jeder in normaler Richtung beweglichen Stelle der Oberfläche = Null ist. Während der Zustandsänderung kann dann der Körper nicht streng genommen beständig in Ruhe und können jene Differenzen $t_0 - t_1$ und $p_0 - p_1$ nicht streng genommen beständig = Null sein; sie sind vielmehr unendlich klein und von entgegengesetzten Zeichen, jenachdem der Durchgang durch den betreffenden Zustand in dem einen oder im umgekehrten Sinne stattfindet. Gleichwohl kann der Begriff einer nicht nur im Ganzen, sondern im Einzelnen, d. h. in jedem Augenblicke umkehrbaren, einer kurzweg sogenannten umkehrbaren Zustandsänderung als der eines Grenzfalles aufgestellt werden, dessen Betrachtung von besonderem Interesse ist. Es ist darunter eine Zustandsänderung zu verstehen, welche mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist und mit verschwindend kleiner Geschwindigkeit stattfindet, wobei dann freilich noch die Voraussetzung einer vorgängigen unendlich kleinen Aenderung der äusseren Temperaturen t_0, der äusseren Drucke p_0 und der Geschwindigkeiten gemacht werden muss, wenn von irgend einem Augenblicke an die Umkehrung der Zustandsänderung durch die Umkehrung des Aenderungsgesetzes ihrer Ursachen bewirkt werden soll.

Bei verschwindend kleinen Geschwindigkeiten hängt das Gesetz, nach welchem sich die augenblickliche Pressung von Punkt zu Punkt des Körpers ändert, nur von den Massenkräften ab (siehe die Gleichungen (1) in §. 12, welche mit $R = 0$ auch für feste Körper ohne Tangentialspannungen gelten); wird von ihnen abgesehen, insbesondere also von der Schwere, was namentlich bei Gasen und Dämpfen meistens zulässig ist, so ist (bei Vernachlässigung unendlich kleiner Differenzen) die augenblickliche Pressung in allen Punkten des Körpers gleich und gleich dem äusseren Druck. Bei Gemischen gleichartiger Theile von verschiedenen Aggregatformen ist dann ebenso wie bei homogenen Körpern (bei Vernachlässigung unendlich kleiner Differenzen) auch die augenblickliche Temperatur in allen Punkten des Körpers gleich und gleich der äusseren Temperatur, so dass in beiden Fällen kurzweg von der augenblicklichen Pressung und Temperatur des Körpers geredet werden kann; beide Fälle unterscheiden sich aber dadurch,

dass die gleichförmige Pressung und Temperatur nur bei dem homogenen Körper auch ein gleichförmiges specif. Volumen, überhaupt einen gleichförmigen Wärmezustand bedingt.

In der Differentialgleichung der lebendigen Kraft (§. 6, Gl. 7):

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE$$

ist im Falle einer Zustandsänderung mit nur umkehrbaren Verwandlungen

$$dR = 0 \text{ und } dS = 0,$$

im Falle einer umkehrbaren Zustandsänderung zugleich $dL = 0$ zu setzen, wodurch die Expansionsarbeit

$$dE = \int p . d\,\delta\,V = -(dM + dP)$$

wird und bei Abstraction von Massenkräften, also bei gleichförmiger Körperpressung

$$dE = p\,dV = -dP.$$

In diesem Falle ist also die Expansionsarbeit gleich dem Entgegengesetzten der Arbeit des äusseren Drucks, also gleich der Arbeit des Drucks, welchen der Körper vermöge seines Pressungszustandes auf seine unmittelbare Umgebung ausübt, welche Arbeit im Allgemeinen nur ein Theil der Expansionsarbeit ist und die oberflächliche Expansionsarbeit oder die Oberflächenarbeit des Körpers genannt werden kann.

Bei umkehrbaren Zustandsänderungen eines Körpers kann es sich immer nur um die Aenderungen seines Wärmezustandes handeln, und zwar reduciren sich alle dahin gehörigen Aufgaben auf die Bestimmung der Wärmemenge, welche dem Körper mitgetheilt oder entzogen werden muss behufs einer gegebenen und nach einem gegebenen Gesetze stattfindenden Aenderung seines Zustandes, d. h. seines Wärmezustandes. Dazu dient die Wärmegleichung (2), §. 11, nach welcher mit $dR = 0$ und $dS = 0$

$$WdQ = dU + dE = dU + \int p . d\delta V \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1$$

ist, wobei das Integral sich auf δV bezieht und über den ganzen Körper auszudehnen ist. Bezieht man diese Gleichung auf 1 Kgr. eines Körperelementes, welches nöthigenfalls unendlich klein 3ter Ordnung angenommen wird, um seinen Zustand als gleichförmig voraussetzen zu dürfen, und bezeichnet mit v sein specif. Volumen, mit p seine Pressung, mit U = einer Function von v und p sein specif. inneres Arbeitsvermögen, so ist

$$WdQ = dU + p\,dv \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2$$

der Arbeitswerth der Wärme, welche dem Körperelement pro 1 Kgr. behufs einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitzutheilen ist, bei welcher

sich v um dv und U um dU ändert; ist dQ negativ, so bedeutet der Absolutwerth eine zu entziehende Wärmemenge. Hat der Körper wegen Abstraction von Massenkräften eine gleichförmige augenblickliche Pressung, so kann Gl. (2) auch auf 1 Kgr. des ganzen Körpers bezogen werden, wenn, falls er nicht homogen ist, unter v das mittlere specif. Volumen und unter U das mittlere specif. innere Arbeitsvermögen desselben verstanden wird.

Hiernach ist der Arbeitswerth der Wärme Q, welche dem Körperelement resp. dem ganzen Körper pro 1 Kgr. behufs einer endlichen Zustandsänderung mitgetheilt werden muss, wenn das specif. Volumen, die Pressung und das specif. innere Arbeitsvermögen

im Anfangszustande $= v_1, p_1, U_1$,

im Endzustande $= v_2, p_2, U_2$ sind,

$$WQ = U_2 - U_1 + \int p\,dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

wobei das Integral = der Expansionsarbeit zwischen den Grenzen v_1, p_1 und v_2, p_2 zu nehmen ist. Seine Berechnung erfordert die Kenntniss des Gesetzes, nach welchem die Zustandsänderung erfolgt, nämlich der Beziehung, welche dabei zwischen v und p beständig stattfindet, welche also gegeben sein muss, wenn die Aufgabe nicht unbestimmt sein soll. Die Gleichung

$$f(v, p) = 0,$$

wodurch diese Beziehung allgemein ausgedrückt werden kann, lässt sich als die auf rechtwinkelige Coordinatenaxen der v (als Abscissenaxe) und der p als Ordinatenaxe) bezogene Gleichung einer ebenen Curve betrachten, welche die **Zustandscurve** genannt werden soll. Das fragliche Integral = der Expansionsarbeit ist dann = dem Inhalte der Fläche, welche von der v-Axe, der Zustandscurve und den Ordinaten p_1 und p_2 begrenzt wird, welche dem Anfangs- und Endzustande entsprechen; bei den folgenden Untersuchungen wird diese geometrische Darstellung oft nützliche Verwendung finden.

Indem die obigen Gleichungen (1) bis (3) aus der allgemeinen Wärmegleichung unter der Voraussetzung $dR = dS = 0$ abgeleitet wurden, ohne dass dabei die für eine umkehrbare Zustandsänderung ausserdem charakteristische Voraussetzung $dL = 0$ in Betracht gekommen wäre, so gelten jene Gleichungen überhaupt für **umkehrbare Aenderungen des Wärmezustandes**, d. h. für die Aenderungen des Wärmezustandes bei solchen Zustandsänderungen, welche mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind, übrigens aber mit beliebigen Geschwindigkeiten stattfinden können. Nur folgt in solchen Fällen aus der Abstraction von Massenkräften nicht

auch eine gleichförmige Körperpressung, so dass selbst bei dieser Abstraction zur Untersuchung der Aenderung des Wärmezustandes eines Körpers im Allgemeinen eine Zerlegung desselben in Elemente nöthig ist, und die Gleichungen (2) und (3) nur auf 1 Kgr. eines solchen Elementes zu beziehen sind. Mit dieser Einschränkung gelten alle Gesetze, welche im Folgenden der Einfachheit wegen für umkehrbare Zustandsänderungen noch aufgestellt werden, allgemein für die Aenderungen des Wärmezustandes bei Zustandsänderungen mit nur umkehrbaren Verwandlungen, d. h. für umkehrbare Aenderungen des Wärmezustandes. Bei der Herleitung fraglicher Gesetze kann übrigens immer ein Körper von gleichförmiger Temperatur und Pressung vorausgesetzt werden von 1 Kgr. Gewicht, dessen Volumen also $= v$ ist; nur ihre Anwendung ist an Einschränkungen gebunden, nämlich im Allgemeinen auf unendlich kleine Körperelemente beschränkt, wenn nicht die Geschwindigkeiten und Massenkräfte verschwindend klein sind, wobei zudem im Falle nicht homogener Körper von endlicher Grösse v und U als Mittelwerthe zu verstehen sind.

Besondere Arten umkehrbarer Zustandsänderungen von Interesse für die Anwendungen sind folgende:

1) Zustandsänderung bei constantem Volumen: $dv = 0$. Die Zustandscurve ist eine zur p-Axe parallele Gerade.

2) Zustandsänderung bei constanter Pressung: $dp = 0$. Die Zustandscurve ist eine zur v-Axe parallele Gerade.

3) Zustandsänderung bei constanter Temperatur: $dt = 0$. Die Zustandscurve heisst die isothermische Curve.

4) Zustandsänderung bei constantem innerem Arbeitsvermögen (constanter Körperwärme): $dU = 0$. Die Zustandscurve heisse (nach Cazin) die isodynamische Curve.

5) Zustandsänderung ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme: $dQ = 0$. Die Zustandscurve heisse (nach Rankine) die adiabatische Curve (Undurchlässigkeitscurve, nämlich der Zustandsänderung eines Körpers in einer für Wärme undurchdringlichen Hülle entsprechend). —

Solche Zustandsänderungen, welche nicht nur mit wesentlichen Aenderungen des äusseren Zustandes (Bewegungszustandes), sondern auch mit nicht umkehrbaren Verwandlungen verbunden sind, lassen sich häufig selbst durch Zerlegung des Körpers in Elemente nicht in ihren einzelnen Theilen bezüglich auf Raum und Zeit verfolgen, besonders wenn solche discontinuirliche Geschwindigkeitsänderungen (Mischungen, Stösse, Wirbelbewegungen etc.) im Inneren vorkommen, deren Gesetzmässigkeit nicht mathematisch ausdrückbar oder ganz unbekannt ist. Unter den speciellen

Fragen, welche indessen auch in solchen Fällen auf Grund der allgemeinen Gleichungen in §. 11 leicht zu beantworten sind, ist die folgende Aufgabe bemerkenswerth: Bestimmung der Aenderung des inneren Arbeitsvermögens für den Fall, dass nur im Anfangs- und Endzustande der Körper sich in Ruhe befindet, falls gegeben sind die mitgetheilte Wärme $= Q$, die Volumenänderung des Körpers und der äussere Druck p_0 in den normal zur Oberfläche bewegten Punkten der letzteren während der Dauer dieser Bewegung. Ein specieller solcher Fall findet z. B. statt, wenn ein luftförmiger Körper, der sich in einem Gefässe in Ruhe befindet, nach der Oeffnung eines Verschlusses zum Theil in ein anderes, zuvor luftleer gemachtes Gefäss überströmt, bis in den communicirenden Gefässen ein neuer Ruhezustand eintritt.

Durch Integration der Gleichung des Arbeitsvermögens

$$d(L+U)=dM+dP+WdQ$$

für die ganze Dauer der Zustandsänderung, für welche $\int dL = 0$ ist, ergiebt sich hier

$$U_2-U_1=M+P+WQ;$$

dabei ist, unter p_0 den specif. äusseren Druck für ein Oberflächenelement dF verstanden, während dasselbe sich um ds im Sinne der Normalen auswärts bewegt,

$$-P=\iint p_0\,dF\,ds$$

= der Oberflächenarbeit des Körpers. Insbesondere bei der Abstraction von Massenkräften ist also

$$U_2-U_1=WQ-\iint p_0\,dF\,ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4);$$

in dem Doppelintegral hat sich die eine Integration über den in normaler Richtung bewegten Theil F der Körperoberfläche, die andere über den ganzen Betrag dieser Bewegung zu erstrecken. Der Vorgang besteht hierbei darin, dass sich Körperwärme in Expansionsarbeit verwandelt, von welcher ein Theil den äusseren Druck überwindet, der Rest sich in lebendige Kraft umsetzt, die aber demnächst, indem sie durch die Arbeit von Bewegungswiderständen verbraucht wird, in Körperwärme sich zurückverwandelt; der Arbeitswerth der letzteren, das innere Arbeitsvermögen, würde also schliesslich um den Betrag der Oberflächenarbeit abgenommen haben, wenn nicht von aussen Wärme $= Q$ mitgetheilt würde, welche die Körperwärme um einen ihr selbst gleichen Betrag oder das innere Arbeitsvermögen um ihren Arbeitswerth $= WQ$ vergrössert.

t der äussere Druck auf F in jedem Augenblicke der Normalbe- dieser Fläche F gleichförmig vertheilt, so ist

$$U_2 - U_1 = WQ - \int p_0 \int dF\, ds = WQ - \int p_0\, dV \quad \ldots \ldots (5).$$

V das veränderliche Körpervolumen in irgend einem Augenblicke d seiner Aenderung von V_1 bis V_2 verstanden. Bleibt dabei p_0 be- gleich, so ist

$$U_2 - U_1 = WQ - p_0(V_2 - V_1) \quad \ldots \ldots \ldots (6).$$

B. in dem oben erwähnten Specialfall der in ein luftleeres Gefäss ise überströmenden luftförmigen Flüssigkeit, wobei zugleich $p_0 = 0$,

$$U_2 - U_1 = WQ$$

ɔesondere $U_2 = U_1$, wenn von der Wärmeleitung der Gefässwände cksicht auf deren Beschaffenheit und wegen unbedeutender Differenz ıeren und äusseren Temperaturen sowie der mässigen Dauer der lsänderung abgesehen werden kann. Das Aenderungsgesetz der n Ursachen, welches hier ein unverändertes inneres Arbeitsvermögen rpers (der luftförmigen Flüssigkeit) trotz der Zunahme des Volumens bis V_2 zur Folge hatte, bestand darin, dass die äusseren Kräfte ıkräfte und äusserer Druck auf den normal bewegten Theil der che) beständig = Null waren und dass Wärme von Aussen weder eilt noch entzogen wurde. Die Umkehrung dieses Aenderungsge- würde dasselbe hier unverändert lassen, wobei es offenbar unmöglich en Körper in den ursprünglichen Zustand zurückzuversetzen, indem r die Arbeit eines äusseren Drucks, also ein von Null verschiedener von p_0, und die Entziehung von Wärme = dem Wärmewerth jener endeten Arbeit dazu erforderlich wäre.

§ 14 Kreisprocesse und Aequivalenz der Verwandlungen.

es einfacheren Ausdrucks wegen soll in der Folge eine gegenseitige ıdlung von Wärme und Arbeit in einander eine Verwandlung der Art, eine Verwandlung von Wärme in eben solche von anderer ratur eine Verwandlung der zweiten Art genannt werden. Jede en kann in zweierlei Sinn stattfinden, und zwar soll die Verwandlung irme in Arbeit eine positive, die umgekehrte von Arbeit in Wärme ›gative Verwandlung der ersten Art, der Wärmeübergang von r zu höherer Temperatur eine positive, der umgekehrte von höherer

zu niederer Temperatur eine negative Verwandlung der zweiten Art heissen. Dem Früheren zufolge kann eine positive Verwandlung der ersten Art nur so stattfinden, dass die in Arbeit sich umsetzende Wärme zunächst als Deformationsarbeit eines diese Verwandlung vermittelnden Körpers erhalten wird; ebenso kann eine positive Verwandlung der zweiten Art nicht durch unmittelbare Leitung oder Strahlung der Wärme von einem Körper niederer zu einem solchen höherer Temperatur, sondern stets nur durch Vermittelung eines dritten Körpers erfolgen. Jede positive Verwandlung erfordert also die Zustandsänderung eines vermittelnden Körpers. Dabei ist der Fall bemerkenswerth, dass die letztere ein sogenannter Kreisprocess, d. h. eine solche Zustandsänderung ist, welche den vermittelnden Körper in seinen Anfangszustand zurückführt. Darauf bezieht sich nämlich das von Clausius aufgestellte Princip der Aequivalenz der Verwandlungen, welches behauptet, dass, wenn ein solcher Kreisprocess mit einer positiven Verwandlung verbunden ist, dann nothwendig zugleich eine negative Verwandlung erfolgt sein muss, welche zu jener in einer gewissen Beziehung steht der Art, dass, wenn jede Verwandlung bezüglich auf ihre Art, ihre Grösse und ihren Sinn durch einen gewissen algebraischen Ausdruck, ihren sogenannten Verwandlungswerth, dargestellt wird, alsdann bei jedem Kreisprocesse die Summe aller Verwandlungswerthe = Null oder negativ ist, nämlich = Null für den Grenzfall eines umkehrbaren Kreisprocesses, d. h. eines solchen, welcher in allen seinen Theilen aus umkehrbaren Zustandsänderungen besteht. Die Herleitung dieses Princips nach Clausius* beruht auf einer Erweiterung der in §. 13 bezüglich der Unmöglichkeit eines unmittelbaren Wärmeüberganges von niederer zu höherer Temperatur gemachten Voraussetzung, nämlich auf der Annahme, dass auch mittelbar niemals Wärme von einem kälteren zu einem wärmeren Körper übergehen könne ohne irgend eine diesen Vorgang begleitende sonstige Veränderung, sei es die Zustandsänderung eines vermittelnden Körpers oder eine andere gleichzeitig stattfindende Verwandlung. Ebenso wie jene Voraussetzung in §. 13 bezüglich der Wärmestrahlung, findet auch diese erweiterte Annahme ihre Rechtfertigung in der Uebereinstimmung der daraus gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung.

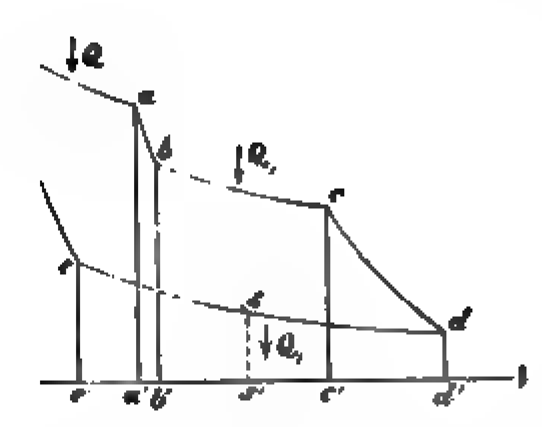
Zur Herleitung des fraglichen Princips kann man sich nach Clausius einen Körper K unter Abstraction von Massenkräften einem umkehrbaren Kreisprocesse von besonderer Art, nämlich von solcher Art unterworfen

* Poggendorff's Annalen, Dec. 1854.

dass die Zustandscurve (§. 13), wodurch das Gesetz der Zustands-
g (Aenderung des Wärmezustandes) geometrisch dargestellt werden
d welche bei einem Kreisprocesse eine geschlossene, in sich zurück-
e Linie ist, abwechselungsweise aus isothermischen und adiabatischen
im Ganzen aus je drei Curvenstücken dieser beiden Arten zusam-
tzt ist. Die Zustandsänderung nach einer adiabatischen Curve kann
dadurch vermittelt denken, dass der Körper K in eine Hülle ein-
sen wird, welche für Wärme undurchdringlich ist ohne die Volumen-
g des Körpers zu hindern, die Zustandsänderung nach einer isother-
Curve dadurch, dass der Körper höchstens an einem Theile seiner
he von einer die Wärme nicht durchlassenden Wand begrenzt, an
Theile dagegen mit einem anderen Körper von constanter Tempe-
Berührung gebracht wird, welche somit auch im Körper K (dessen
änderung beliebig langsam stattfindend gedacht werden kann) er-
leibt, so lange diese Berührung dauert. Die Art des Körpers K
d soll zunächst nur vorausgesetzt werden, dass bei gleichem
n die Pressung um so grösser sei, je höher die Temperatur
d dass bei constanter Temperatur die Volumenzunahme
ittheilung von Wärme, also die Volumenabnahme eine
hung von Wärme erfordere.

r Körper K habe 1 Kgr. Gewicht. Sein Volumen und seine
g seien im Anfangszustande $= v$ und p, dargestellt in Fig. 4 durch
twinkeligen Coordinaten des Punktes a:

$$Oa' = v, \quad a'a = p;$$



die entsprechende Anfangstemperatur sei $= t$. Die umkehrbare Zustandsänderung dieses Körpers K erfolge 1) nach der adiabatischen Curve ab bis im Zustande b seine Temperatur $= t_1$ geworden ist, 2) in Berührung mit einem Körper K_1 von constanter Temperatur t_1 nach der isothermischen Curve bc unter Volumenzunahme, also unter Aufnahme einer gewissen Wärmemenge Q_1, welche K_1 entnommen wird, 3) nach der adiabatischen Curve cd ... lass die Temperatur abnimmt, etwa bis t_2, 4) in Berührung mit Körper K_2 von constanter Temperatur t_2 nach der isothermischen e unter Volumenabnahme, also Abgabe einer gewissen Wärme...

an den Körper K_2, und zwar so lange bis im Zustande e eine ebenso grosse Wärmemenge Q_1 an diesen Körper K_2 abgegeben ist wie zuvor bei der Zustandsänderung nach bc dem Körper K_1 entnommen worden war, 5) nach der adiabatischen Curve ef in solchem Sinne und so lange bis die Temperatur wieder = der Anfangstemperatur t geworden ist, 6) nach einer isothermischen Curve in solchem Sinne und so lange bis auch das Volumen wieder = dem Anfangsvolumen v geworden ist; dann ist die resultirende Zustandsänderung ein umkehrbarer Kreisprocess, die Pressung also auch wieder = p geworden, die resultirende Zustandscurve durch die isothermische Curve fa im Punkte a geschlossen, wenn der augenblickliche Wärmezustand als durch v und t vollkommen bestimmt vorausgesetzt wird, was nach §. 8 bei einem homogenen Körper sowohl wie bei einem Gemische gleichartiger Bestandtheile von verschiedener Aggregatform selbst mit Rücksicht auf die daselbst erwähnten Ausnahmezustände (z. B. des Wassers in der Nähe des Gefrierpunktes) der Fall ist. Es ist nun leicht einzusehen, dass unter den gemachten Voraussetzungen das Volumen Of' des Körpers im Zustande f kleiner sein muss, als das Volumen Oa' im Anfangszustande a, dass also die unter 6) genannte letzte Zustandsänderung nach der isothermischen Curve fa, nämlich bei constanter Temperatur = t, die Mittheilung einer gewissen Wärmemenge Q an den Körper K erfordert. Ist nämlich s (Fig. 4) der Durchschnittspunkt der isothermischen Curve de mit der adiabatischen Curve ab (die eine oder die andere oder beide nöthigenfalls bis zum Durchschnitt verlängert gedacht), so werde zunächst angenommen, der Kreisprocess erfolge gemäss der Zustandscurve $abcdsa$, und es sei Q_2 die Wärmemenge, welche bei der Compression nach ds an den Körper K_2 abgegeben wird. Da nun nach der Voraussetzung bei gleichem Volumen der höheren Temperatur auch die grössere Pressung des Körpers K entspricht, also die Curve ds auf derselben Seite von bc wie die Abscissenaxe liegt, so wird bei dem Kreisprocesse $abcdsa$ eine überwiegende Expansionsarbeit verrichtet, nämlich die Arbeit

$$a'abcdd'a' - d'dsaa'd' = bcdsb.$$

Diese Arbeit kann nur aus Wärme entstanden sein, und da der Körper K in seinen Anfangszustand zurückgekehrt ist, somit nach wie vor dieselbe Körperwärme besitzt, so muss jene gewonnene Arbeit das Aequivalent einer dem Körper mehr mitgetheilten, als entzogenen Wärme sein. Dem Körper ist aber im vorliegenden Falle nur die Wärme Q_1 mitgetheilt, die Wärme Q_2 entzogen worden; letztere ist also $< Q_1$, und es muss folglich der Körper bei der Temperatur t_2 weiter, als von d bis s comprimirt werden, damit er die Wärmemenge Q_1 an den Körper K_2 abgebe. Daraus folgt

die Behauptung mit Rücksicht darauf, dass die adiabatischen Curven *as* und *ef* (wie überhaupt zwei verschiedene Zustandscurven derselben Art) sich nicht schneiden können.

Bei dem ursprünglich vorausgesetzten Kreisprocesse *abcdefa* wird also in der That eine überschüssige Wärmemenge

$$Q_1 - Q_1 + Q = Q$$

dem Körper K mitgetheilt, welche als solche verschwindet, also in die Arbeit E = der von der Zustandscurve umschlossenen Fläche *abcdefa* sich verwandelt gemäss der Gleichung

$$Q = AE;$$

zugleich wird die Wärmemenge Q_1 von dem Körper K_1 an den Körper K_2 übertragen, oder es geht diese Wärme von der Temperatur t_1 zu der kleineren Temperatur t_2 über. Mit diesem Kreisprocesse ist also eine positive Verwandlung der ersten Art und zugleich eine negative Verwandlung der zweiten Art verbunden; er heisse **rechtläufig**, sofern ein beweglicher Punkt, welcher seine Zustandscurve im Sinne *abcdefa* durchläuft, dabei eine resultirende Drehung im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers ausführt.

Bei dieser Betrachtung ist die Höhe der Anfangstemperatur t, bei welcher auch die Wärme Q dem Körper K mitgetheilt wird, an keine einschränkende Bedingung geknüpft. Die Fig. 4 bezieht sich auf den Fall $t > t_1$; in anderen Fällen ändert sich nur die Figur ohne dass die Schlussfolgerung dadurch berührt würde. Wäre insbesondere $t < t_2$, so liesse sich (Fig. 5) der Kreisprocess in einen rechtläufigen *sbcds* und einen rückläufigen *asefa* zerlegen; bei ersterem wird Arbeit gewonnen, bei letzterem verbraucht. Weil aber auch hier der obige Schluss unverändert gilt, dass unter den gemachten Voraussetzungen dem Körper bei der Zustandsänderung nach *fa* eine gewisse Wärmemenge Q mitgetheilt werden müsse, so muss auch im Ganzen Arbeit

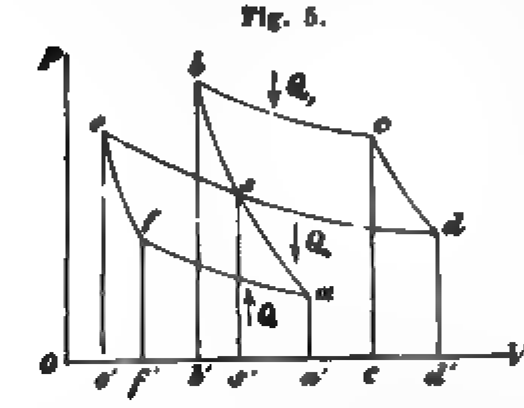


Fig. 5.

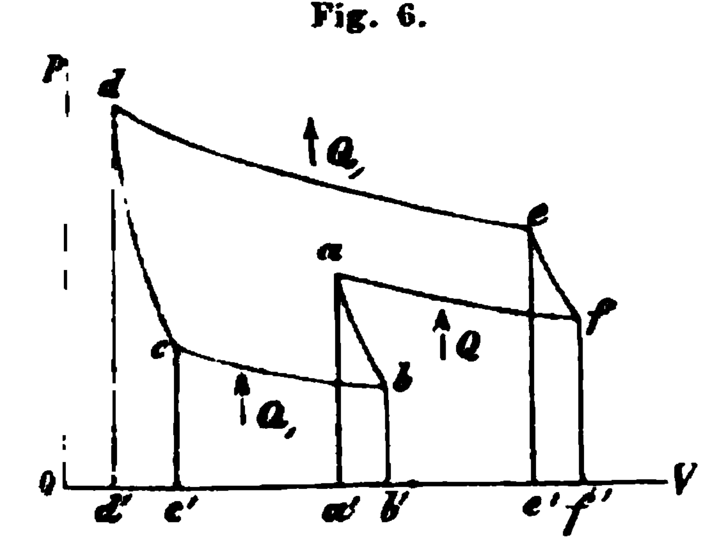
$$E = sbcds - asefa = W \cdot Q$$

= dem Arbeitswerth der mitgetheilten Wärme gewonnen werden, und es ist also auch in diesem Falle **eine positive Verwandlung der ersten und eine negative Verwandlung der zweiten Art mit dem Kreisprocesse verbunden.** Jede dieser beiden Verwandlungen hat die andere zur Folge und mag als Merkmal eines **rechtläufigen umkehrbaren Kreisprocesses** im weiteren Sinne betrachtet werden, welcher also aus-

rechtläufigen und rückläufigen Kreisprocessen im engeren Sinne zusammengesetzt sein kann.

Was aber die ferner hier zu Grunde liegenden Voraussetzungen betrifft, dass bei gleichem Volumen der höheren Temperatur die grössere Pressung entspreche, und dass bei constanter Temperatur die Volumenzunahme eine Mittheilung, die Volumenabnahme eine Entziehung von Wärme erfordere, welche Voraussetzungen der Erfahrung zufolge im Allgemeinen zutreffen, insbesondere z. B. bei Gasen, Dämpfen und Gemischen von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit, so kann man bemerken, dass das obige Resultat, betreffend die nothwendige Verbindung einer positiven Verwandlung der ersten Art mit einer negativen Verwandlung der zweiten Art, bei irgend einem (durch eine dieser beiden Verwandlungen als rechtläufig charakterisirten) umkehrbaren Kreisprocesse selbst dann noch gültig bleibt, wenn zugleich **in beiden** fraglichen Beziehungen das entgegengesetzte Verhalten stattfindet, wenn also, **falls ausnahmsweise Volumenverkleinerung des Körpers** K **mit Wärmemittheilung an denselben bei constanter Temperatur verbunden ist, dann auch bei gleichem Volumen der höheren Temperatur die kleinere Pressung entspricht.** Sämmtliche Curvenstücke, aus denen die Zustandscurve *abcdefa* des Kreisprocesses besteht, haben dann entgegengesetzte Richtungen wie im ursprünglich vorausgesetzten Falle, so dass die Rechtläufigkeit bestehen bleibt, wie

Fig. 6.



z. B. Fig. 6 für den Fall $t_1 > t > t_2$ erkennen lässt, wobei wie in den vorigen Figuren die Pfeile bei Q und Q_1 mitgetheilte oder entzogene Wärmemengen andeuten, jenachdem sie gegen die von der Zustandscurve umschlossene Fläche hin- oder von derselben weggerichtet sind. Dieses entgegengesetzte Verhalten zeigt z. B. ein Gemisch von Eis und Wasser; wenn durch Wärmemittheilung bei constanter Temperatur Eis geschmolzen wird, nimmt das Volumen nicht zu, sondern ab, dagegen aber nimmt auch die Schmelztemperatur des Eises (wie schon früher in der Anmerkung zu §. 8 hervorgehoben wurde), also die Temperatur des Gemisches mit zunehmender Pressung nicht zu, sondern ab.*

---

* Nach **James** und **William Thomson** um 0,0075 Grad für eine Druckzunahme von 1 Atmosphäre. Wenn man umgekehrt das Princip, um dessen Entwickelung es sich hier handelt, als allgemein gültig voraussetzt, nachdem es auf Grund der Annahme eines den Gasen analogen Verhaltens des vermittelnden Körpers K hergeleitet worden ist, so kann man daraus resp. aus an-

ı nun den Kreisprocess mit demselben Körper K und
Berührungskörper K_1 und K_2 im umgekehrten Sinne
so sind auch die begleitenden Vorgänge die entgegen-
der Zustandsänderung nach af bei constanter Tempe-
me Q dem Körper K entzogen, während der Zustands-
i constanter Temperatur t_2 wird die Wärme Q_1 dem
›r K_2 mitgetheilt, und während derselben nach eb bei
ır t_1 giebt K die Wärme Q_1 an K_1 ab. Diese Wärme
h von K_2 an K_1 übertragen, sie ist als Wärme von
n solche von der höheren Temperatur t_1 verwandelt
›m Körper K eine überschüssige Wärme Q von der
›n worden, welche, da dieser Körper K in seinen An-
›kehrt ist, einen schliesslichen Verlust an Körperwärme
t, nur durch Verwandlung aus Arbeit entstanden sein
›rjenigen Arbeit, welche zur Compression des Körpers
werden musste, als bei seiner Expansion von ihm ver-
elche Arbeit $E = W'Q$ wieder durch die von der Zu-
umschlossene Fläche geometrisch dargestellt wird.
kehrten oder rückläufigen Kreisprocesse ist
› Verwandlung der ersten Art und eine posi-
der zweiten Art verbunden.
ıebenen recht- oder rückläufigen umkehrbaren Kreis-
nn auch die Temperaturen t, t_1 und t_2 unverändert
Q und Q_1 bezeichneten Wärmemengen sehr verschie-
Körper K im Anfangszustande trotz der gegebenen
erschiedene Werthe von v und p entsprechen können,
lrei Zustandsänderungen bei constanter Temperatur t
big weit ausgedehnt werden kann, endlich auch die
thermische und adiabatische Curven), aus denen die
des Kreisprocesses besteht, von verschiedenem geome-
ein können, wenn statt des Körpers K ein Körper K'

en Formeln jene Beziehung zwischen der Pressung und
ıtur des Wassers mit Clausius (Pogg. Ann., September
ng des allgemeinen Princips ableiten. Ich habe hier das
rgezogen, a priori die Bedingungen allgemein zu bezeich
fragliche Princip gültig ist, wonach dann die Gültigkeit
ısch aus Wasser und Eis erst aus dem Umstande gefolgert
ıe Bedingungen sich u. A. auch bei einem solchen Ge-
Einzelnen abnormen Verhaltens erfüllt finden.

von anderer Art gewählt wird. Sind bei einem solchen Kreisprocesse von der durch Fig. 4—6 dargestellten Art, ausgeführt mit dem Körper K', etwa Q' und Q'_1 die Werthe der Wärmemengen, welche bei einem denselben Temperaturen t, t_1 und t_2 entsprechenden solchen Kreisprocesse des Körpers K mit Q und Q_1 bezeichnet wurden, so ist es nun wesentlich zu bemerken, dass, wie auch Q und Q', Q_1 und Q'_1 verschieden sein mögen, doch das Verhältniss dieser Wärmemengen stets dasselbe, also

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{Q_1}{Q'_1} \text{ oder } \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q'}{Q'_1} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

ist. Denn wäre etwa

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{m}{n} \text{ und } \frac{Q_1}{Q'_1} < \frac{m}{n},$$

unter m und n ganze Zahlen verstanden, so dass, wenn dieselben nur hinlänglich gross genommen werden, $\frac{m}{n}$ jedes beliebige rationale und in der Grenze selbst ein irrationales Verhältniss darstellen kann, so werde der Kreisprocess n mal rechtläufig mit dem Körper K, dann m mal rückläufig mit dem Körper K' ausgeführt gedacht. Dadurch wird zuerst die Wärme nQ von der Temperatur t in Arbeit verwandelt und die Wärme nQ_1 vom Körper K_1 zum Körper K_2 übergeführt (von der Temperatur t_1 in die Temperatur t_2 versetzt), dann dieselbe Arbeit in Wärme $mQ' = nQ$ von der Temperatur t zurückverwandelt und die Wärme $mQ'_1 > nQ_1$ von K_2 zu K_1 übergeführt. Schliesslich befänden sich beide vermittelnde Körper K und K' in ihren anfänglichen Zuständen, und es bestände das Endresultat darin, dass eine gewisse Wärmemenge $= mQ'_1 - nQ_1$ von dem Körper K_2 zu dem wärmeren Körper K_1 ohne Compensation, d. h. ohne irgend eine andere gleichzeitige Veränderung übergeführt worden wäre, was nach dem oben erwähnten Clausius'schen Grundsatze unmöglich ist. Denselben Widerspruch hat die Annahme

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{m}{n} \text{ und } \frac{Q_1}{Q'_1} > \frac{m}{n}$$

zur Folge, wenn man dann nur den n-maligen Kreisprocess des Körpers K rückläufig und den m-maligen Kreisprocess von K' rechtläufig stattfinden lässt.

Vermittels eines umkehrbaren Kreisprocesses von der hier vorausgesetzten Art kann jede der zweierlei in Rede stehenden Verwandlungen auf unendlich mannigfache Weise durch eine andere Verwandlung derselben Art oder durch eine Verwandlung der anderen Art ersetzt werden. Ist

ıer gewissen Wärmemenge Q von der Temperatur
ann ein rückläufiger solcher Kreisprocess auf un-
se so eingerichtet werden, dass dabei Arbeit in
von derselben Temperatur t verwandelt, also die
ickgängig gemacht oder aufgehoben wird; dab:
risse Wärmemenge Q_1 von der Temperatur t_1 in
$_1$ versetzt, wo Q_1 so unendlich mannigfach ver-
und t_2 verschieden gewählt werden, indem das
erhältniss zwischen Q und Q_1 wesentlich auf der
ıs t, t_1 und t_2 in verschiedenen Fällen dieselbe
üuglich gegebene positive Verwandlung der ersten
rch eine positive Verwandlung der zweiten Art
Veränderung ersetzt. Nun kann ferner der recht-
ingerichtet werden, dass die so eben erhalt-
gehoben, nämlich die Wärmemenge Q_1 von der
mperatur t_2 zurückversetzt, dafür aber eine ge-
on der Temperatur t' in Arbeit verwandelt wird.
ne von t' unendlich mannigfach verschieden sein
gegebene Verwandlung der ersten Art findet sich
re solche derselben Art ersetzt u. s. f.

it Clausius zwei Verwandlungen äquivalent,
erweitige resultirende Aenderung gegenseitig er-
man sich die Aufgabe stellen, jede Verwandlung
n Ausdruck so zu repräsentiren und zu messen,
llungen durch gleiche Werthe dieser Ausdrücke,
Verwandlungswerthe charakterisirt werden,
der negativen Verwandlungen auch positive resp.
rthe entsprechen.

$f(Q, t)$ den Werth der Verwandlung der Wärme
in Arbeit, und $F(Q, t_1, t_2)$ den Werth der Ver-
von der Temperatur t_1 in eben solche von der
die Werthe der umgekehrten Verwandlungen
$(Q, t_2, t_1) = -F(Q, t_1, t_2)$. Nun ist von den
und B, welche mit einem umkehrbaren Kreis-
Rede stehenden Art (Fig. 4 — Fig. 6) verbunden
ten anderen äquivalent. Denn wenn man den
tem Sinne wiederholt, womit die Verwandlungen
n sind, so wird die frühere Verwandlung A durch
sie durch die Verwandlung $-B$ ohne sonstige

resultirende Aenderung ersetzt erscheint; ebenso wird B durch $-B$ aufgehoben, also durch $-A$ ersetzt. Die Summe der Verwandlungswerthe A und B muss also $=$ Null sein. Findet etwa der Kreisprocess rechtläufig statt, und ist Q die Wärmemenge von der Temperatur t, welche dabei in Arbeit verwandelt wird, Q_1 die Wärmemenge, welche von der Temperatur t_1 zur kleineren Temperatur t_2 übergeht, so hat man

$$f(Q, t) + F(Q_1, t_1, t_2) = 0.$$

Die Functionen f und F müssen aber von solcher Art sein, dass dieser Gleichung für gegebene Werthe von t, t_1 und t_2 dem obigen Gesetze unter 1 zufolge immer dasselbe Verhältniss $Q : Q_1$ entspricht, zu welchem Ende zu setzen ist:

$$f(Q, t) = Q f(t) \text{ und } F(Q, t_1, t_2) = Q F(t_1, t_2).$$

Hiernach entspricht dem obigen rechtläufigen Kreisprocesse die Gleichung:

$$Q f(t) + Q_1 F(t_1, t_2) = 0,$$

und wenn man dann einen rückläufigen Kreisprocess derselben Art so stattfinden lässt, dass dabei die Wärme Q_1 von der Temperatur t_2 zur höheren Temperatur t_1 übergeht und eine gewisse Wärmemenge Q' von der Temperatur t' durch Verwandlung aus Arbeit erhalten wird, so ist für diesen die Summe der Verwandlungswerthe:

$$-Q' f(t') + Q_1 F(t_2, t_1) = -Q' f(t') - Q_1 F(t_1, t_2) = 0,$$

also

$$Q f(t) - Q' f(t') = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Dieser rückläufige Kreisprocess ist unbeschadet der gegebenen Werthe von Q, t_1 und t_2 auf unendlich mannigfache Weise möglich (entsprechend verschiedenen Lagen des Punktes a auf den adiabatischen Curven ab der obigen Figuren, während die Figurentheile $bcde$ für einen bestimmten vermittelnden Körper K gegeben sind); insbesondere kann er so eingerichtet werden, dass $Q' < Q$ ist. Dann ist aber das Resultat der beiden entgegengesetzten Verwandlungen der ersten Art, welche durch die beiden Kreisprocesse zusammengenommen bewirkt wurden, nämlich der Verwandlung der Wärme Q von der Temperatur t in Arbeit und der Verwandlung von Arbeit in die Wärme Q' von der Temperatur t', ganz dasselbe, als ob die Wärme $(Q - Q')$ von der Temperatur t in Arbeit und die Wärme Q' von der Temperatur t in ebensolche von der Temperatur t' verwandelt worden wäre. Diese beiden Verwandlungen verschiedener Art sind also zusammen den beiden vorgenannten Verwandlungen erster Art, deren Verwandlungswerthe nach Gl. (2) die Summe Null haben, äquivalent, so dass auch die

ndlungswerthe = Null sein, somit die Gleichung statt-

$$(Q-Q')f(t) - Q'F(t,t') = 0,$$

it auf Gl. (2) folgt:

$$F(t,t') = f(t) - f(t') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

ierdurch auf die Function f zurückgeführt; für letztere. estimmt bleibt, mag eine einfachere Bezeichnung ein-h die Gleichung

$$f(t) = \frac{1}{T},$$

eine Temperaturfunction bedeutet, welche unabhängig dem Zustande des in Betracht gezogenen Körpers, so-durch die Temperatur allein nicht bestimmt ist. In-T_2 etc. diejenigen Werthe dieser Function T, welche t_1, t_2 etc. entsprechen. Somit ist

$$\frac{Q}{T} \text{ resp. } -\frac{Q}{T}$$

swerth, welcher der Umsetzung der Wärme Q ur t in äquivalente Arbeit resp. der Umsetzung Wärme Q von der Temperatur t entspricht, und

$$Q\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2}$$

swerth der Wärme Q beim Uebergange von der ur Temperatur t_2. Eine Verwandlung der zweiten sieht, immer als Combination einer positiven und einer ng der ersten Art für dieselbe Wärmemenge betrachtet hrt. —

rbaren Kreisprocesse von der durch Fig. 4 dargestellten erselbe rechtläufig stattfindet, wie durch die beigesetzten angedeutet ist, die Summe der Verwandlungswerthe:

$$\frac{Q}{T} - \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

r den Fall $t = t_1$.

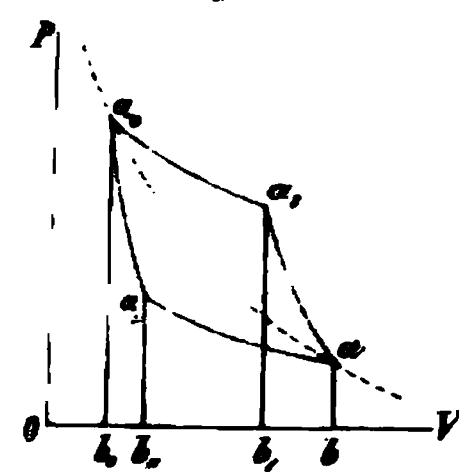
$$\frac{Q - Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

$-Q_1$ mit Q_1 und Q_2 mit Q_2 bezeichnet wird.

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0 \text{ mit } Q_1 - Q_2 = AE \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

= dem Wärmewerth der gewonnenen Arbeit. Die Zustandscurve $a_0 a_1 a a_2 a_0$ des Kreisprocesses (Fig. 7), welcher in diesem Falle ein einfacher umkehrbarer Kreisprocess heissen soll, besteht aus zwei isothermischen Curven $a_0 a_1$, $a a_2$ und zwei adiabatischen Curven $a_1 a$, $a_2 a_0$; $\frac{Q_1}{T_1}$ ist der Verwandlungswerth, welcher der Zustandsänderung $a_0 a_1 a$ entspricht, indem die bei der Temperatur t_1 dem Körper mitgetheilte Wärme Q_1 als in Arbeit verwandelt betrachtet werden kann, $-\frac{Q_2}{T_2}$ ist der Verwandlungswerth, welcher der Zustandsänderung $a a_2 a_0$ entspricht, indem die bei der Temperatur $t_2 < t_1$ dem Körper entzogene Wärme $Q_2 < Q_1$ als aus Arbeit entstanden zu betrachten ist. Findet dieser einfache Kreisprocess rückläufig statt, so bedeutet Q_1 eine dem betreffenden Körper entzogene, Q_2 eine mitgetheilte Wärmemenge, E eine aufgewendete Arbeit, und die betreffenden Verwandlungswerthe bei den Zustandsänderungen $a_0 a_2 a$ und $a a_1 a_0$ sind $\frac{Q_2}{T_2}$ und $-\frac{Q_1}{T_1}$.

Fig. 7.



Wenn ein Körper in beliebiger umkehrbarer Zustandsänderung begriffen ist, wobei seine Temperatur t sich im Allgemeinen stetig ändert, und wenn dann für ein unendlich kleines Element dieser Zustandsänderung, entsprechend dem Bogenelement $a_0 a$ der (in Fig. 7 punktirten) Zustandscurve, wobei sich t um dt ändert, dQ die dem Körper mitgetheilte Wärme bezeichnet und zwar wie dt algebraisch verstanden, so dass der Absolutwerth eines negativen dQ eine entzogene Wärme bedeutet, so kann man sich für jedes Element der Zustandsänderung die Wärmemittheilung und die Temperaturänderung nach einander statt gleichzeitig stattfindend denken, entsprechend dem Ersatz des Bogenelementes $a_0 a$ der Zustandscurve durch die Bogenelemente einer isothermischen und einer adiabatischen Curve: $a_0 a_1$ und $a_1 a$ oder $a a_2$ und $a_2 a_0$, jenachdem die Zustandsänderung im Sinne $a_0 a$ oder im Sinne $a a_0$ stattfindet. Dem Vorigen zufolge ist dann der Verwandlungswerth für eine unendlich kleine Zustandsänderung allgemein $= \frac{dQ}{T}$, also für eine Zustandsänderung von endlicher Grösse:

$$N = \int \frac{dQ}{T} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Einen beliebigen umkehrbaren Kreisprocess kann man in einfache Kreisprocesse zerlegt denken, entsprechend der Zerlegung der von

chlossenen Fläche durch eine Schaar unendlich
ischer Curven nebst Ersatz der dazwischen liegen-
ıstandscurve durch isothermische Curvenelemente
dung der auf diese elementaren einfachen Krei-
ungen (4) ergiebt sich also

$$\int dQ = AE; \quad N = \int \frac{dQ}{T} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 6$$

len ganzen Kreisprocess auszudehnen und Q und
nitgetheilte Wärme und gewonnene Arbeit, nämls entzogene Wärme, mehr gewonnene als ver-
tig positiv und negativ sind. Bei jedem um-
ıse eines Körpers ist somit die demselben
ilte oder entzogene Wärme = dem Wärme-
g gewonnenen oder verbrauchten Arbeit.
Werth aller damit verbundenen Verwand-

liche Temperatur des Körpers nicht, wie bisher
ınkten gleich wäre, wie es unbeschadet der Um-
änderung bei einem Gemische gleichartiger Be-
Aggregatform unter Berücksichtigung des Ein-
der Fall sein kann, so würde die Berechnung
emeinen eine zweifache Zerlegung in Elemente

$$N = \iint \frac{d^2Q}{T},$$

standen, welche bei einer unendlich kleinen Zu-
er durch ein Element seiner Oberfläche mitge-
seine augenblickliche Temperatur $= t$ ist. Für
aber die Gleichungen (6) allgemein, ist insbe-
'alle der resultirende Verwandlungswerth N -
tiv, so könnte die resultirende Verwandlung als
n höherer Temperatur betrachtet werden, ohne
Veränderung als Compensation verbunden wäre.
den Annahme gemäss unmöglich ist; wäre N ne-
ırung des Kreisprocesses N positiv werden und
h sich ergeben.
nen Bemerkung in §. 13 gelten schliesslich die-
nen Kreisprocess, welcher, ohne in jedem Augen-

blicke umkehrbar zu sein, ohne nämlich mit verschwindend kleiner Geschwindigkeit stattzufinden, mit nur umkehrbaren Zustandsänderungen verbunden ist. Dagegen ist der resultirende Verwandlungswerth $N < 0$ bei einem Kreisprocesse, welcher mit nicht umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist, indem dergleichen stets negativ sind, also eine negative Gesammtsumme aller Verwandlungswerthe ergeben, sofern die Werthe der umkehrbaren Verwandlungen für sich nach wie vor zusammen den Werth Null haben.

§. 15. Verschiedene Formen der Wärmegleichung; erste und zweite Hauptgleichung.

Das in §. 12 erörterte allgemeine Verfahren, die Zustandsänderungen einer Flüssigkeit (oder auch eines festen Körpers, in welchem keine Tangentialspannungen vorkommen) unter beliebig gegebenen Umständen zu bestimmen, setzt ausser der Zustandsgleichung (§. 8) auch die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens (§. 11) für den betreffenden Körper als bekannt voraus; ebenso erfordert die Wärmegleichung (2) in §. 13:

$$W dQ = dU + p\, dv$$

zur Bestimmung der Wärme Q, welche der Gewichtseinheit eines Körpers oder Körperelementes behufs einer gegebenen und nach gegebenem Gesetze stattfindenden umkehrbaren Aenderung seines Wärmezustandes mitzutheilen ist, die Kenntniss des specifischen inneren Arbeitsvermögens U als Function von v und p, welche letzteren Grössen hier im Allgemeinen als die den Wärmezustand charakterisirenden Veränderlichen angenommen werden. Indem aber diese Kenntniss a priori nicht vorauszusetzen, auch empirisch die Grösse U kaum direct als Function von v und p bestimmbar ist, so ist es nützlich, durch die Einführung anderer Grössen von leichter bestimmbaren Abhängigkeitsgesetzen statt der unbekannten Function U die Wärmegleichung auf entsprechende andere Formen zu bringen, sei es zu unmittelbarem Gebrauch bei den oben erwähnten Problemen, sei es zur indirecten Ableitung der Gleichung des inneren Arbeitsvermögens und selbst unter Umständen der Zustandsgleichung.

Durch die Substitution von

$$dU = \frac{\partial U}{\partial v} dv + \frac{\partial U}{\partial p} dp$$

wird die obige Wärmegleichung, welche sich auf eine umkehrbare Zustandsänderung bezieht,

$$WdQ = Ydv + Xdp \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ 1).$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial v} + p; \quad X = \frac{\partial U}{\partial p}$$

gt:

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial p} + 1 - \frac{\partial^2 U}{\partial p \partial v} = 1.$$

hung, von **Zeuner** die **erste Hauptgleichung** emeine Beziehung zwischen den Functionen X und lche in der neuen Form (1) der Wärmegleichung rkommen; sie lässt es auch analytisch unmittelbar megleichung nicht ohne Weiteres (nicht ohne dass en wäre) integrabel, nämlich dass ihre rechte Seite ential ist, weil dazu

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = 0 \text{ statt} = 1$$

n indessen den Ausdruck

$$Ydv + Xdp$$

action von v und p multiplicirt, so lässt sich die ts so wählen, dass das Product ein vollständiges ist bemerkenswerth, dass der reciproke Werth der en Temperaturfunction T hier eine solche Function, render Factor der rechten Seite von Gl. (1) ist. Constante und für einen umkehrbaren Kreisprocess

össe $W\int\frac{dQ}{T}$, wie sie auch im Verlaufe der umrung eines Körpers sich ändern mag, doch immer rieder annimmt, so oft der Körper in seinen Ant, so muss

$$\frac{WdQ}{T} = \frac{Y}{T}dv + \frac{X}{T}dp$$

ntial einer Function der den Wärmezustand charakund p sein, woraus dann folgt:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Y}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{T}\right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - Y\frac{\partial T}{\partial p} = T\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial T}{\partial v}$$

oder mit Rücksicht auf die erste Hauptgleichung:

$$T = Y\frac{\partial T}{\partial p} - X\frac{\partial T}{\partial v}.$$

Diese Gleichung, welche mit Zeuner die zweite Hauptgleichung genannt werden mag, ist als eine besondere Ausdrucksform des Princips der Aequivalenz der Verwandlungen zu betrachten, während die erste Hauptgleichung eine unmittelbare Folge der Aequivalenz von Wärme und Arbeit ist. Wenn man in der Wärmegleichung (1) mit Hülfe der zweiten Hauptgleichung erstlich Y durch X und T, dann X durch Y und T ausdrückt, ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dass

$$dT = \frac{\partial T}{\partial v}dv + \frac{\partial T}{\partial p}dp$$

ist,

$$W\,dQ = \frac{X\frac{\partial T}{\partial v} + T}{\frac{\partial T}{\partial p}}dv + X\,dp = \frac{X\,dT + T\,dv}{\frac{\partial T}{\partial p}}$$

$$\text{und}\quad W\,dQ = Y\,dv + \frac{Y\frac{\partial T}{\partial p} - T}{\frac{\partial T}{\partial v}}dp = \frac{Y\,dT - T\,dp}{\frac{\partial T}{\partial v}}:$$

Somit haben sich drei neue Formen der Wärmegleichung ergeben:

$$W\,dQ = Y\,dv + X\,dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$= \frac{X\,dT + T\,dv}{\frac{\partial T}{\partial p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$= \frac{Y\,dT - T\,dp}{\frac{\partial T}{\partial v}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

In der ersten sind X und Y Functionen von v und p, welche in der durch die erste Hauptgleichung

$$1 = \frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

gegebenen Beziehung zu einander stehen und übrigens von der Art und Aggregatform des Körpers abhängen. Die in der zweiten und dritten Gleichung ausserdem vorkommende Grösse T ist unmittelbar eine unter allen Umständen gleiche Temperaturfunction und dadurch mittelbar auch

eine von der Körperart und Aggregatform abhängige Function von v und p; ihre Beziehung zu X und Y ist durch die zweite Hauptgleichung

$$T = Y\frac{\partial T}{\partial p} - X\frac{\partial T}{\partial v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

gegeben. Wäre T als Function der Temperatur t bekannt, desgl. t als Function von v und p (durch die Zustandsgleichung im Falle eines homogenen Körpers), so könnten die Gleichungen (4) und (5) zur Bestimmung von X und Y, demnächst auch zur Bestimmung der Gleichung des inneren Arbeitsvermögens dienen vermittels der Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial U}{\partial v} = Y - p\,; \quad \frac{\partial U}{\partial p} = X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6).$$

Indessen mögen die Gleichungen (1) — (5) schon jetzt in noch anderer Weise umgeformt werden durch Einführung zweier anderer Grössen von einfacher physikalischer Bedeutung statt X und Y, wenn auch diese Bedeutung erst später nach Bestimmung der Temperaturfunction T vollständig hervortreten wird. Setzt man nämlich

$$c_v = \frac{dQ}{dT} \text{ im Falle } v = Const.,$$

$$c_p = \frac{dQ}{dT} \text{ im Falle } p = Const.,$$

so ist nach den Gleichungen (2) und (3):

$$\left.\begin{aligned} c_v &= \frac{X}{W\frac{\partial T}{\partial p}}, \quad \text{also } X = W c_v \frac{\partial T}{\partial p} \\ c_p &= -\frac{Y}{W\frac{\partial T}{\partial v}}, \quad \text{also } Y = W c_p \frac{\partial T}{\partial v} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Die Substitution dieser Ausdrücke von X und Y in den Gleichungen (1) — (3) ergiebt für die Wärmegleichung $\left(\text{mit } A = \frac{1}{W}\right)$ die Formen:

$$dQ = c_p \frac{\partial T}{\partial v} dv + c_v \frac{\partial T}{\partial p} dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8)$$

$$= c_v\, dT + \frac{AT}{\frac{\partial T}{\partial p}} dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

$$= c_p\, dT - \frac{AT}{\frac{\partial T}{\partial v}} dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

und für die beiden Hauptgleichungen, welche die Beziehungen der Functionen c_p, c_v und T zu einander ausdrücken:

$$A = \frac{\partial}{\partial p}\left(c_p \frac{\partial T}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(c_v \frac{\partial T}{\partial p}\right) \quad \text{. . . . . (11)}$$

$$AT = (c_p - c_v) \frac{\partial T}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial p} \quad \text{. . . . . (12).}$$

Die hier eingeführten Grössen c_v und c_p stehen in einfacher Beziehung zu der sogenannten specifischen Wärme. Unter der specifischen Wärme eines Körpers für einen gewissen gleichförmigen Wärmezustand und ein gewisses Aenderungsgesetz desselben versteht man nämlich das Verhältniss der Wärme, welche einer Gewichtseinheit des Körpers behufs einer unendlich kleinen jenem Gesetze folgenden Aenderung des fraglichen Wärmezustandes mitzutheilen ist, zu der entsprechenden Temperaturzunahme, also den Differentialquotienten

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dT} \cdot \frac{dT}{dt};$$

hiernach ist, wenn insbesondere c die specif. Wärme für constantes Volumen und c_1 die specif. Wärme für constante Pressung bedeutet,

$$c = c_v \frac{dT}{dt} \text{ und } c_1 = c_p \frac{dT}{dt} \quad \text{. . . . . (13).}$$

Dabei sind c und c_1 im Allgemeinen als Functionen von v und p zu betrachten, deren Formen von der Aggregatform und deren Coefficienten von der Art des Körpers abhängen.

Wenn man statt v und p andere Grössen als unabhängig Veränderliche zur Charakterisirung des Wärmezustandes wählt, so können die obigen Gleichungen leicht entsprechend umgeformt werden. Unter den verschiedenen in dieser Hinsicht möglichen Fällen sind diejenigen bemerkenswerth, wo ausser einer der Grössen v und p noch die Temperatur oder, was auf dasselbe hinaus kommt, die Temperaturfunction T als unabhängig Veränderliche angenommen wird. Es sind dann statt der Differentialquotienten

$$\frac{\partial T}{\partial v} \text{ und } \frac{\partial T}{\partial p}$$

bei der Wahl von v und T: $\frac{\partial p}{\partial v}$ und $\frac{\partial p}{\partial T}$,

bei der Wahl von p und T: $\frac{\partial v}{\partial p}$ und $\frac{\partial v}{\partial T}$

in die Gleichungen einzuführen, zu welchem Zwecke es nützlich ist, die zwischen diesen 6 partiellen Differentialquotienten stattfindenden Bezieh-

ungen allgemein festzustellen. Wenn man aber eine der drei Grössen v, p, T als constant voraussetzt, so ist von den übrigen jede durch die andere allein bestimmt; von jenen 6 Differentialquotienten sind also je zwei, welche dieselbe der Grössen v, p, T als constant voraussetzen, einander reciprok, d. h. es ist

$$\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial T}=\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Um durch je zwei solche jener 6 Differentialquotienten, welche sich auf die nämlichen unabhängig Veränderlichen v und p, v und T oder p und T beziehen, die übrigen 4 ausdrücken zu können, bedarf es also ausser den drei Beziehungen (14) nur noch einer zwischen den Differentialquotienten

$$\frac{\partial p}{\partial T},\ \frac{\partial T}{\partial v},\ \frac{\partial v}{\partial p} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial T}{\partial p},\ \frac{\partial v}{\partial T},\ \frac{\partial p}{\partial v}.$$

Wenn man aber zunächst T als Function von v und p betrachtet und in der entsprechenden Differentialgleichung

$$dT=\frac{\partial T}{\partial v}\,dv+\frac{\partial T}{\partial p}\,dp$$

dann $T = Const.$, also $dT = 0$ setzt, so wird v eine Function von p, also

$$dv=\frac{\partial v}{\partial p}\,dp$$

und man erhält:

$$0=\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}+\frac{\partial T}{\partial p}$$

oder wegen $\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}=1$:

$$\frac{\partial p}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}=-1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

Werden z. B. p und T als unabhängig Veränderliche angenommen, so ist nach Gl. (12) mit Rücksicht auf die Beziehungen (14):

$$c_p-c_v=AT\frac{\partial v}{\partial T}\frac{\partial p}{\partial T}$$

oder mit $\frac{\partial p}{\partial T}=-\dfrac{\frac{\partial v}{\partial T}}{\frac{\partial v}{\partial p}}$ nach Gl. (15):

$$c_p - c_v = AT \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)^2}{-\frac{\partial v}{\partial p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16),*$$

woraus u. A. folgt, dass immer

$$c_p > c_v$$

ist, weil bei constanter Temperatur stets v mit wachsender Pressung p abnimmt, d. h. $\frac{\partial v}{\partial p}$ negativ ist.

Die Wärme dQ, welche der Gewichtseinheit eines Körpers behufs einer unendlich kleinen umkehrbaren Zustandsänderung mitzutheilen ist, wird, jenachdem die letztere durch die unendlich kleinen Aenderungen von v und p, v und t resp. T, p und t resp. T gegeben ist, unmittelbar durch die Gleichungen (1) oder (8), (2) oder (9) resp. (3) oder (10) ausgedrückt. Dabei sind, sofern diese Veränderliche, durch deren Differentiale die Zustandsänderung gegeben ist, als unabhängig Veränderliche vorausgesetzt werden, gemäss den Beziehungen (14) die Gleichungen (2) und (9) zu schreiben:

$$W\,dQ = \frac{\partial p}{\partial T}(X\,dT + T\,dv) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$dQ = c_v\,dT + AT\frac{\partial p}{\partial T}dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und die Gleichungen (3) und (10):

$$W\,dQ = \frac{\partial v}{\partial T}(Y\,dT - T\,dp) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$dQ = c_p\,dT - AT\frac{\partial v}{\partial T}dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

wobei es, da hier überhaupt nur die drei Grössen v, p, T als event. unabhängig Veränderliche in Betracht gezogen sind, auch ohne besondere Bezeichnung durch Indices (wie solche z. B. von Clausius angewendet werden) selbstverständlich ist, dass $\frac{\partial p}{\partial T}$ der Voraussetzung $v = Const.$ und $\frac{\partial v}{\partial T}$ der Voraussetzung $p = Const.$ entspricht.

---

* Siehe Clausius: „Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie, Gl. (31)" in Pogg. Ann., Juli 1865.

§. 16. Geometrische Darstellung der Vorgänge bei umkehrbaren Zustandsänderungen.

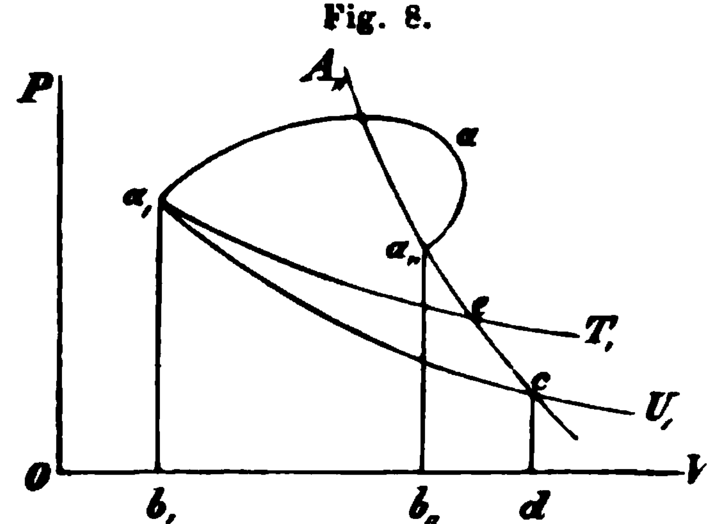
Nachdem im Vorhergehenden die sogenannte Zustandscurve wiederholt dazu benutzt wurde, das Gesetz der gleichzeitigen Aenderungen von v und p, sowie die gewonnene oder aufgewendete Arbeit bei irgend einer umkehrbaren Zustandsänderung geometrisch darzustellen, mag schliesslich darauf hingewiesen werden, wie mit Hülfe der in §. 13 erwähnten besonderen Zustandscurven, nämlich der isothermischen, der isodynamischen und adiabatischen Curve, auch andere mit irgend einer umkehrbaren Zustandsänderung verbundene Vorgänge, insbesondere die Aenderung des inneren Arbeitsvermögens U, die mitgetheilte Wärme Q und deren Verwandlungswerth N durch geometrische Darstellung zur Anschauung gebracht werden können.*

Es werde ein Körper von 1 Kgr. Gewicht vorausgesetzt, und es seien die Werthe von v, p, t, T, U

im Anfangszustande $= v_1 \;\; p_1 \;\; t_1 \;\; T_1 \;\; U_1$

im Endzustande $= v_2 \;\; p_2 \;\; t_2 \;\; T_2 \;\; U_2$.

Fig. 8.



Jenem entspricht (Fig. 8) der Punkt a_1 mit den Coordinaten

$$Ob_1 = v_1, \quad b_1 a_1 = p_1,$$

diesem der Punkt a_2 mit den Coordinaten

$$Ob_2 = v_2, \quad b_2 a_2 = p_2;$$

$a_1 a a_2$ sei die Zustandscurve, welche das Abhängigkeitsgesetz von v und p, also das Gesetz darstellt, nach welchem die umkehrbare Zustandsänderung stattfindet. Ist dann

E die hierbei vom Körper verrichtete Expansionsarbeit, Q die ihm mitgetheilte Wärme, so ist

$$WQ = U_2 - U_1 + E \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1$$

und $E =$ der Fläche $b_1 a_1 a a_2 b_2$. Zur Darstellung von $U_2 - U_1$ werde
durch den Punkt a_1 die isodynamische Curve $U = Const. = U_1$,
durch den Punkt a_2 die adiabatische Curve A_2 gelegt
und durch ihren Schnittpunkt c die Ordinate cd.

---

* Vergl. Zeuner: Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, 2. Aufl. Seite 80 und ff.

Dann ist für die Zustandsänderung nach der adiabatischen Curve A_2 von a_2 bis c entsprechend Gl. (1)

$$0 = U_1 - U_2 + \text{Fläche } b_2 a_2 c d,$$

also $U_2 - U_1$ = der Fläche $b_2 a_2 cd$ und somit

$$WQ = b_1 a_1 a a_2 b_2 + b_2 a_2 cd = b_1 a_1 a a_2 cd.$$

Der Arbeitswerth der mitgetheilten Wärme Q ist also = dem Inhalte der Fläche, welche begrenzt wird 1) von der v-Axe, 2) von der Zustandscurve $a_1 a_2$ und der durch den Endpunkt a_2 derselben gehenden adiabatischen Curve A_2, 3) von der Ordinate des Anfangspunktes a_1 und 4) von der Ordinate des Punktes, in welchem die adiabatische Curve A_2 von der durch den Anfangspunkt a_1 gehenden isodynamischen Curve U_1 geschnitten wird. Diese Fläche wird durch die Ordinate des Endpunktes a_2 der Zustandscurve in zwei Theile getheilt, von welchen der eine, begrenzt von der Zustandscurve $a_1 a_2$, = der Expansionsarbeit E, der andere, begrenzt von der adiabatischen Curve A_2, = $U_2 - U_1$ = der Zunahme des inneren Arbeitsvermögens in Folge der Zustandsänderung ist. Dabei sind die Inhalte dieser Flächen positiv oder negativ zu setzen der Art, dass, wenn sie von einer beweglichen Ordinate beschrieben gedacht werden, welche zur Erzeugung der Flächen = E und = WQ von der Ordinate des Anfangspunktes a_1 und zur Erzeugung der Fläche = $U_2 - U_1$ von der Ordinate des Endpunktes a_2 der Zustandscurve ausgeht, diese Ordinate positive oder negative Flächenelemente beschreibt, jenachdem sie sich im Sinne der positiven oder der negativen v-Axe bewegt.

Um auch den der Zustandsänderung nach $a_1 a a_2$ entsprechenden Verwandlungswerth $N = \int \frac{dQ}{T}$ auf eine geometrische Darstellung zurückzuführen, werde durch den Punkt a_1 noch die isothermische Curve $T = Const. = T_1$ gelegt; e sei ihr Schnittpunkt mit der adiabatischen Curve A_2. Denkt man sich dann den Körper aus dem Zustande a_2 (v_2, p_2) in den Anfangszustand a_1 (v_1, p_1) nach der Zustandscure $a_2 e a_1$ in umkehrbarer Weise zurückgeführt, so ist der entsprechende Verwandlungswerth $= -\frac{Q_1}{T_1}$, wenn Q_1 die Wärme bedeutet, welche dem Körper behufs der Zustandsänderung nach $a_1 e$ mitgetheilt werden müsste, so dass ihm dieselbe Wärme Q_1 bei der umgekehrten Zustandsänderung nach $e a_1$ entzogen werden muss. Indem nun für den umkehrbaren Kreisprocess $a_1 a a_2 e a_1$ der resultirende Verwandlungswerth = Null ist, hat man

$$N - \frac{Q_1}{T_1} = 0, \text{ also } N = \frac{Q_1}{T_1} \qquad (2)$$

Der Arbeitswerth der Wärme Q_1 kann dem Obigen zufolge durch eine Fläche mit Hülfe der Curven U_1 und A_2 dargestellt werden; somit ist auch

$$W N T_1 = W Q_1 = \text{Fläche } b_1 a_1 e c d$$

= einer Fläche, deren Bildungsgesetz sich von demjenigen der zur Darstellung von WQ dienenden Fläche nur dadurch unterscheidet, dass die durch den Anfangspunkt a_1 gehende isothermische Curve T_1 an die Stelle der Zustandscurve $a_1 a a_2$ tritt.

Der Gl. (2) zufolge ist die Grösse N für einen gegebenen Körper vollkommen bestimmt durch das Curvenstück $a_1 e$, also durch den Punkt a_1 und die Curve A_2, unabhängig von der Lage des Punktes a_2 auf der Curve A_2 und von der Form der Zustandscurve $a_1 a a_2$. So oft letztere dieselbe adiabatische Curve A_2 irgendwo schneidet, hat der Verwandlungswerth N eine dieser Curve A_2 eigenthümliche Grösse; er entspricht in dieser Hinsicht der sogenannten Kraftfunction der Mechanik, während die adiabatischen Curven den Niveauflächen analog sind.

B. Verhalten der Gase, insbesondere der atmosphärischen Luft.

§. 17. Definitionen, Erfahrungssätze und Annahmen; Zustandsgleichung der Gase.

Unter einem permanenten Gase oder auch kurzweg einem Gase pflegt ein luftförmiger Körper verstanden zu werden, welcher uns nur als solcher bekannt ist, indem er durch die uns zu Gebote stehenden Mittel der Druckerhöhung und der Wärmeentziehung bisher nicht in die flüssige oder feste Aggregatform hat gebracht werden können. Dazu gehören u. A. Sauerstoff und Stickstoff sowie beliebige Gemische dieser einfachen Gase, z. B. reine (von ihren nebensächlichen Bestandtheilen, insbesondere Wasserdampf und Kohlensäure befreite) atmosphärische Luft. Das Verhalten dieser permanenten Gase ist mit grosser Annäherung an zwei einfache Gesetze gebunden, welche unter den Namen des Mariotte'schen und des Gay-Lussac'schen Gesetzes bekannt sind und wodurch ihr physikalischer Charakter wesentlich bestimmt wird. Weil aber jener Begriff eines permanenten Gases nicht an sich bestimmt, sondern abhängig von unseren augen-

blicklichen Kenntnissen und Hülfsmitteln ist, mit deren Vervollkommnung ein bisher als permanent erschienenes Gas diesen Charakter verlieren kann, weil ferner auch andere luftförmige Körper, die uns zugleich in flüssiger und fester Aggregatform bekannt sind, in gewissen Wärmezuständen (bei sehr grossem specif. Volumen) den fraglichen zwei Gesetzen ebenso gut entsprechen können wie permanente Gase, so wird es vorgezogen, unter einem Gase hier jeden luftförmigen Körper von solcher Art oder von solchem Wärmezustande zu verstehen, dass seine jeweils in Betracht gezogenen Zustandsänderungen als dem Mariotte'schen und dem Gay-Lussac'schen Gesetze unterworfen ohne in Betracht kommenden Fehler vorausgesetzt werden dürfen. Der Zustand eines vollkommenen Gases ist ein Grenzzustand, für welchen jene Gesetze genau gelten und welchem bei gleicher Pressung und Temperatur die permanenten Gase nur näher kommen, als andere luftförmige Körper (Dämpfe).

Nach dem Mariotte'schen Gesetze sind das specif. Volumen v und die Pressung p eines Gases bei constanter Temperatur t einander umgekehrt proportional; ihre Zustandsgleichung hat also die Form

$$pv = f(t),$$

woraus für $p = Const.$ sich ergiebt:

$$p\frac{dv}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t).$$

Wäre das Gas reine atmosphärische Luft und p = dem normalen Atmosphärendruck, so wäre der Temperatur-Definition zufolge der in dieser Gleichung vorkommende Differentialquotient $\frac{dv}{dt}$ constant (siehe §. 7, Gl. 1), also auch $f'(t) = Const.$ Nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze sind aber für alle Gase und beliebige Werthe der constanten Pressung die gleichzeitigen Aenderungen von v und t einander stets in demselben Verhältnisse proportional, ist also $f'(t)$ = einer Constanten. Wird dieselbe mit R bezeichnet, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$pv = S + Rt,$$

unter S eine andere Constante verstanden. Dies ist die Zustandsgleichung der Gase, welche auch geschrieben werden kann:

$$pv = S(1 + \alpha t) \text{ mit } \alpha = \frac{R}{S} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

oder

$$pv = R(a + t) \text{ mit } a = \frac{S}{R} = \frac{1}{\alpha} \quad \dots\dots\dots (2).$$

Die Constante α ist der sogenannte Ausdehnungscoefficient des Gases = dem Verhältnisse der Volumenzunahme Δv, welche einer Temperaturzunahme um $\Delta t = 1^0$ bei constanter Pressung p entspricht, zu dem Volumen $= v_0$ bei $t = 0$ und derselben Pressung p; aus Gl. (1) folgt nämlich unter diesen Voraussetzungen und mit diesen Bezeichnungen:

$$p\,\Delta v = S\alpha \text{ und } p\,v_0 = S, \text{ also } \alpha = \frac{\Delta v}{v_0}.$$

Zur Bestimmung des Ausdehnungscoefficienten eines Gases kann man übrigens auf Grund der Zustandsgleichung (1) ebensowohl die Werthe von v messen, welche für $p = Const.$, als die Werthe von p, welche für $v = Const.$, als auch die Werthe von v und p, welche zugleich verschiedenen Temperaturen entsprechen; als letztere empfehlen sich die (durch schmelzendes Eis und kochendes Wasser) leicht längere Zeit constant zu erhaltenden Temperaturen $t = 0$ und $= 100$. Sind dann

v_0 und p_0 die Werthe von v und p für $t = 0$,
v_1 und p_1 die Werthe von v und p für $t = 100$,

so ist nach Gl. (1)

$$\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} = 1 + 100\,\alpha; \quad \alpha = \frac{p_1 v_1 - p_0 v_0}{100\,p_0 v_0},$$

$$\text{insbesondere } \alpha = \frac{v_1 - v_0}{100 v_0} \text{ für } p_1 = p_0 \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

$$\alpha = \frac{p_1 - p_0}{100 p_0} \text{ für } v_1 = v_0 \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Für ein vollkommenes Gas müsste nach diesen beiden Specialformeln immer derselbe Werth von α gefunden werden, und zwar für beliebige Werthe von v_0 und p_0. Die Regnault'schen Versuche mit wirklichen Gasen ergaben dagegen den Coefficienten α etwas verschieden, jenachdem er nach Gl. (3) oder nach Gl. (4) bestimmt wurde, ferner nach jeder von beiden Formeln etwas verschieden je nach dem Werthe von v_0 oder p_0, nämlich um so kleiner, je kleiner p_0, je grösser also v_0 gewählt wurde. Für Wasserstoffgas sind diese Verschiedenheiten am kleinsten. Für verschiedene Gase ist α unter gleichen Umständen nicht mehr verschieden, als für dasselbe Gas unter verschiedenen Umständen.

Hiernach ist der Ausdehnungscoefficient für den Grenzzustand eines vollkommenen Gases als eine von der Gasart unabhängige Constante zu betrachten und dem kleinsten Werthe von α höchstens gleich zu setzen, welcher für irgend ein Gas unter irgend welchen Umständen bisher gefunden wurde, weil jedes Gas jenem Grenzzustande um so näher kommt, je grösser

bei gegebener Temperatur sein specif. Volumen v ist, mit wachsendem v aber α abnimmt. Dieser kleinste Werth ist $\alpha = 0{,}003661$, gefunden für Wasserstoffgas nach Gl. (3) für atmosphärischen Druck. Indem aber eine Steigerung dieses Druckes bis 3 Atm. noch kaum einen Einfluss auf die letzte Decimalstelle ausübte, lässt sich erwarten, dass auch durch Verminderung der Pressung, also durch Vergrösserung des specifischen Volumens eine merkliche Abnahme von α nicht herbeigeführt werden würde, d. h. es lässt sich annehmen, dass das Wasserstoffgas schon bei atmosphärischem Drucke und $t = 0^0$ von dem Grenzzustande eines vollkommenen Gases unmerklich abweicht. Indem es aber für die Folge bequemer ist, statt des Ausdehnungscoefficienten α seinen reciproken Werth a in die Rechnung einzuführen gemäss der obigen zweiten Form der Zustandsgleichung:

$$pv = R(a + t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

soll, wie es üblich geworden ist, in runder Zahl gesetzt werden:

$$a = 273, \text{ entsprechend } \alpha = \frac{1}{a} = 0{,}003663.$$

Der Unterschied zwischen diesem Grenzwerthe von α und demjenigen, welcher insbesondere für atmosphärische Luft als das für die technischen Anwendungen wichtigste Gasgemenge gefunden wurde, ist so klein, dass davon bei diesen Anwendungen abgesehen werden darf. Es fand z. B. Regnault für reine atmosphärische Luft

nach Gl. (4): $\alpha = 0{,}003665$ bei $p_0 = 1$ Atm.,
nach Gl. (3): $\alpha = 0{,}003670$ bei $p_0 = p_1 = 1$ Atm.,
$\alpha = 0{,}003694$ bei $p_0 = p_1 = 3{,}3$ Atm.

Wenn nun auch a in der Zustandsgleichung (2) als eine für alle Gase gleiche Constante zu betrachten ist, so ist doch R von der Gasart wesentlich abhängig und durch irgend ein System zusammengehöriger Werthe von p, v und t bestimmt, insbesondere z. B. für reine atmosphärische Luft durch ihr specif. Gewicht $\gamma = \frac{1}{v} = 1{,}2932$ Kgr. für $t = 0$ und normalen atmosphärischen Druck. Letzterer ist in Kgr. pro Quadratm. ausgedrückt = dem Gewichte einer Quecksilbersäule von 1 Quadratm. Grundfläche und 0,76 Mtr. Höhe bei 0° Temperatur des Quecksilbers. Bei dieser Temperatur ist die Dichtigkeit des Quecksilbers = 13,596, die grösste Dichtigkeit des Wassers (bei $t = 4^0$) = 1 gesetzt, also das specif. Gewicht des Quecksilbers von 0° = 13596 Kgr. pro Cubikm., und der normale Atmosphärendruck

$$p = 13596 \,.\, 0{,}76 = 10333 \text{ Kgr. pro Quadratm.}$$

Hiernach ergiebt sich aus Gl. (2) mit $a = 273$ für reine atmosphärische Luft:

$$R = \frac{10333}{1,2932 \, . \, 273} = 29,27.$$

Ist δ die Dichtigkeit eines anderen Gases oder Gasgemenges in Beziehung auf atmosph. Luft von gleicher Pressung und Temperatur, so ist für dasselbe nach Gl. (2)

$$R = \frac{29,27}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Die natürlich vorkommende und zu technischen Zwecken benutzte atmosphärische Luft enthält verschiedene Beimischungen, namentlich von Wasserdampf und Kohlensäure, jedoch in so kleinen Mengen, dass dadurch der Gas-Charakter des Gemisches nicht wesentlich beeinträchtigt wird, den betreffenden Rechnungen also nach wie vor eine Zustandsgleichung von der Form der Gl. (2) zu Grunde gelegt werden darf, besonders wenn gleichzeitig der Constanten R ein Werth beigelegt wird, welcher nach Gl. (5) der durch die nebensächlichen Bestandtheile bedingten Dichtigkeit δ entspricht. Uebrigens ist es nur der Wassergehalt der Luft, welcher diese Werthe von δ und R einigermassen merklich beeinflussen kann. Ist dann p die Gesammtpressung der feuchten Luft, p' die Pressung des darin enthaltenen Wasserdampfes, also $p-p'$ die Pressung der trockenen Luft für sich allein, so ist mit Rücksicht darauf, dass das specif. Gewicht des Wasserdampfes etwa $^5/_8$ so gross ist wie das der trockenen Luft bei gleicher Pressung und Temperatur, die Dichtigkeit δ der feuchten Luft:

$$\delta = \frac{p-p'}{p} + \frac{5}{8}\frac{p'}{p} = 1 - \frac{3}{8}\frac{p'}{p}$$

und die Constante R ihrer Zusandsgleichung:

$$R = \frac{29,27}{1 - \frac{3}{8}\frac{p'}{p}}, \text{ z. B.} = 29,38 \text{ für } \frac{p'}{p} = 0,01.$$

Was die specifische Wärme der Gase $= c$ für constantes Volumen, resp. $= c_1$ für constante Pressung (§. 15) betrifft, so ist nur letztere (namentlich von Regnault) für verschiedene Gase direct bestimmt und dabei nur abhängig von der Gasart, dagegen unabhängig von dem augenblicklichen Zustande des Gases gefunden worden wenigstens mit einer ebenso grossen Annäherung, als mit welcher das Gas dem Mariotte'schen und dem Gay-

Lussac'schen Gesetze folgt. Insbesondere für atmosphärische Luft ergab sich*

$$c_1 = 0{,}2375.$$

In Betreff der specif. Wärme c ist man einstweilen auf das aus verschiedenartigen Versuchen (siehe §. 21) zu abstrahirende Verhältniss

$$n = \frac{c_1}{c}$$

angewiesen, welches, freilich nicht so zuverlässig bestimmt wie c_1, für atmosphärische Luft $= 1{,}41$ gesetzt werden kann, woraus dann folgt:

$$c = \frac{0{,}2375}{1{,}41} = 0{,}1684.$$

Für irgend ein anderes Gas kann die specif. Wärme c theoretisch abgeleitet werden aus seiner specif. Wärme c_1, seiner Dichtigkeit δ in Beziehung auf atmosphärische Luft und aus den Werthen von c und c_1 für atm. Luft (siehe §. 19), so dass die Frage, ob auch c ebenso wie c_1 für jedes Gas von dem augenblicklichen Zustande desselben unabhängig sei, sich auf die Frage reducirt, ob für atmosphärische Luft die specif. Wärme $c = 0{,}1684$ oder das Verhältniss $n = 1{,}41$ ebenso constant sei wie die specif. Wärme $c_1 = 0{,}2375$. Die bisherigen experimentellen Bestimmungen, aus welchen $n = 1{,}41$ als angenäherter und bis auf höchstens die zweite Decimalstelle voraussichtlich zuverlässiger Werth des Verhältnisses n für atm. Luft abgeleitet wurde, sind nun zwar nicht umfassend und genau genug, um jene Frage sicher zu entscheiden, indessen spricht die innere Wahrscheinlichkeit für ihre Bejahung. Während die bei constantem Volumen einem Gase mitgetheilte Wärme nur eine Veränderung seines Zustandes bewirkt, hat die bei constanter Pressung mitgetheilte zugleich eine Expansionsarbeit $= pdv$ pro 1 Kgr. des Gases zu verrichten; die specif. Wärme c erscheint somit von einfacherer Bedeutung, als c_1, und wenn schon letztere sich als eine Constante für jedes Gas herausstellt, so lässt sich dasselbe um so eher von c vermuthen.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass beide specif. Wärmen c und c_1 für jedes Gas constant sind, ihre Werthe also nur von der Art, nicht vom Zustande des Gases abhängen.

---

* Für eine Temperaturerhöhung

von -30° bis $+10^\circ$ wurde gefunden $c_1 = 0{,}2377$
„ 0° „ $+100^\circ$ „ „ $c_1 = 0{,}2374$
„ 0° „ $+200^\circ$ „ „ $c_1 = 0{,}2375$.

§. 18. Bestimmung der Temperaturfunction T.

Da die durch die Betrachtungen in §. 14 eingeführte Temperaturfunction T, welche in den allgemeinen Gleichungen des §. 15 eine so wesentliche Rolle spielt, von der Art des betreffenden Körpers unabhängig ist, so sind die einfachen und verhältnissmässig sicher bekannten Gesetze, welchen das Verhalten der Gase unterworfen ist, zur allgemeinen Bestimmung dieser Function T besonders geeignet. Ihre Bedeutung ergiebt sich aus den beiden Hauptgleichungen (11) und (12), §. 15, in Verbindung mit der Zustandsgleichung

$$pv = R(a + t)$$

der Gase und der begründeten Annahme, dass die beiden specif. Wärmen c und c_1 derselben constant sind. Setzt man in jenen Gleichungen (11) und (12), §. 15, gemäss Gl. (13) daselbst

$$c = c_v \frac{dT}{dt}, \quad c_1 = c_p \frac{dT}{dt},$$

ferner

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{dT}{dt}\frac{\partial t}{\partial v}, \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{dT}{dt}\frac{\partial t}{\partial p}$$

oder mit der kürzeren Bezeichnung: $\frac{dT}{dt} = T'$

$$c_v = \frac{c}{T'}, \quad c_p = \frac{c_1}{T'}; \quad \frac{\partial T}{\partial v} = T'\frac{\partial t}{\partial v}, \quad \frac{\partial T}{\partial p} = T'\frac{\partial t}{\partial p},$$

so ist nach der ersten Hauptgleichung:

$$A = \frac{\partial}{\partial p}\left(c_1 \frac{\partial t}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(c \frac{\partial t}{\partial p}\right)$$

oder, sofern c und c_1 constant sind,

$$A = (c_1 - c)\frac{\partial^2 t}{\partial v\, \partial p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 1.$$

und nach der zweiten Hauptgleichung:

$$AT = (c_1 - c)\, T' \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial t}{\partial p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2$$

Durch Division von Gl. (1) und (2) folgt

$$\frac{T}{T'} = \frac{\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial t}{\partial p}}{\frac{\partial^2 t}{\partial v\, \partial p}}$$

oder mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung der Gase, nach welcher

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{p}{R}, \quad \frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v}{R}, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial v\, \partial p} = \frac{1}{R}$$

ist, auch

$$\frac{T}{T'} = \frac{pv}{R} = a + t$$

$$\frac{T' dt}{T} = \frac{dT}{T} = \frac{dt}{a+t}; \quad T = Const.\,(a + t)$$

oder endlich, wenn der willkürlich zu wählende constante Coefficient $= 1$ gesetzt wird,

$$T = a + t = 273 + t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Die Temperaturfunction T unterscheidet sich also von der Temperatur t nur durch einen constanten Summanden; sie ist selbst eine Temperatur, nur von einem Nullpunkte aus gerechnet, welcher um 273^0 unter dem Gefrierpunkte des Wassers liegt und der absolute Nullpunkt genannt wird, während dann T entsprechend die absolute Temperatur heisst. Mit $T = 0$ oder $t = -273$ braucht man übrigens nicht nothwendig den Begriff der kleinstmöglichen Temperatur überhaupt zu verbinden; nur im Gaszustande, wenn derselbe beständig durch die Gleichung

$$pv = R(a + t)$$

charakterisirt wird, kann ein Körper bei einer geringeren Temperatur, als $t = -a = -273$ nicht bestehen.

Wegen $T' = 1$ bedeutet jetzt in den allgemeinen Gleichungen, §. 15, für einen beliebigen Körper

c_v die specif. Wärme bei constantem Volumen,

c_p „ „ „ „ constanter Pressung;

dT und dt können in den Formeln beliebig mit einander vertauscht werden. In der Regel soll im Folgenden die absolute Temperatur T statt der vom Gefrierpunkte des Wassers aus gerechneten oder thermometrischen (durch die üblichen Thermometer direct angezeigten) Temperatur t in die Rechnung eingeführt werden, indem dadurch manche Formeln eine etwas einfachere Form erhalten und der Buchstabe t zur Bezeichnung der Zeit disponibel wird.

Insbesondere ist dann die Zustandsgleichung der Gase:

$$pv = RT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

und wenn für sie die specif. Wärmen c_v und c_p wie bisher mit c und c_1 bezeichnet werden, so erhalten mit

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R} \text{ und } \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}$$

die Gleichungen (8)—(10), §. 15, die Formen:

$$dQ = \frac{1}{R}(c_1 p\, dv + c\, v\, dp) \ldots\ldots (5)$$

$$= c\, dT + \frac{ART}{v} dv = c\, dT + A p\, dv \ldots\ldots (6)$$

$$= c_1 dT - \frac{ART}{p} dp = c_1 dT - A v\, dp \ldots\ldots (7).$$

Sie drücken die Wärmemenge aus, welche einem Kgr. eines Gases behufs einer unendlich kleinen Aenderung seines Wärmezustandes mitzutheilen ist, jenachdem letztere gegeben ist durch die Aenderungen von v und p, oder von v und T, oder von p und T.

§. 19. Specifische Wärme und inneres Arbeitsvermögen der Gase.

Aus Gl. (1) des vor. §. folgt mit $\frac{\partial^2 t}{\partial v\, \partial p} = \frac{1}{R}$

$$c_1 - c = c(n-1) = AR \ldots\ldots (1).$$

Für verschiedene Gase ist also die Differenz ihrer specif. Wärmen bei constanter Pressung und bei constantem Volumen proportional der Constanten R ihrer Zustandsgleichung, somit umgekehrt proportional ihrer Dichtigkeit δ: Gl. (5), §. 17.

Sofern die Grössen R und c_1 mit grosser Zuverlässigkeit insbesondere für atmosphärische Luft bekannt sind, kann Gl. (1) zur Berechnung der Constanten A dienen mit nahe derselben Annäherung, mit welcher auch c oder $n = \frac{c_1}{c}$ bekannt ist. Mit den im vorigen §. angeführten Werthen dieser Constanten bezüglich auf atmosphärische Luft ergiebt sich:

$$\frac{1}{A} = W = \frac{29,27}{0,2375 - 0,1684} = 423,6$$

in sehr guter Uebereinstimmung mit directen Bestimmungen besonders von Joule, nach welchen in §. 11 angegeben wurde: $W = 424$. Diese Uebereinstimmung gewährt eine werthvolle gegenseitige Controle der directen Bestimmungen von $n = 1,41$ für Luft und $W = 424$ allgemein, von denen es fraglich ist, welche an sich das grössere Zutrauen verdient, während beide jedenfalls weniger zuverlässig sind, als die Bestimmungen von R and c_1. —

Da die Differenz $= c_1 - c$ der Dichtigkeit eines Gases umgekehrt proportional, für atmosph. Luft aber

$$c_1 - c = 0{,}2375 - 0{,}1684 = 0{,}0691$$

ist, so ist für irgend ein anderes Gas oder Gasgemenge von der Dichtigkeit δ bezüglich auf atmosph. Luft

$$c_1 - c = \frac{0{,}0691}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

wonach der Werth von c aus den beobachteten Werthen von c_1 und δ berechnet werden kann. In der folgenden Tabelle sind für die (bis jetzt) permanenten Gase* Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenoxyd, sowie für einige andere luftförmige Körper, welche mit Rücksicht auf spätere Anwendungen von Interesse sind, ausser den chemischen Molekularformeln und entsprechenden Molekulargewichten m, die von Regnault gefundenen Werthe von δ und c_1 enthalten nebst den nach Gl. (2) daraus abgeleiteten Werthen von c und $n = \frac{c_1}{c}$.

		m	δ	c_1	c	n	δ'
Wasserstoff	H_2	2	0,0693	3,4090	2,4119	1,413	0,0692
Sauerstoff	O_2	32	1,1056	0,2175	0,1550	1,403	1,1072
Stickstoff	N_2	28	0,9714	0,2438	0,1727	1,412	0,9688
Kohlenoxyd	CO	28	0,9673	0,2450	0,1736	1,411	0,9688
Sumpfgas	CH_4	16	0,5527	0,5929	0,4679	1,267	0,5536
Oelbildendes Gas .	C_2H_4	28	0,9672	0,4040	0,3326	1,215	0,9688
Kohlensäure	CO_2	44	1,5201	0,2169	0,1714	1,265	1,5224
Wasserdampf . . .	H_2O	18	0,6219	0,4805	0,3694	1,301	0,6228

Das Verhältniss n ergiebt sich, wie man sieht, für die permanenten Gase sehr nahe gleich gross und $=$ dem Werthe $n = 1{,}41$ für atmosph. Luft. Während nach Gl. (2) die Differenz

$$c_1\delta - c\delta = 0{,}0691$$

* Die Permanenz des Gaszustandes bei beliebiger Verstärkung des äusseren Druckes oder Erniedrigung der Temperatur, wovon hier allein die Rede ist, schliesst die Möglichkeit einer Aenderung der Aggregatform unter der Einwirkung von Molekularkräften nicht aus. So mag bei der Absorption von Gasen durch flüssige oder feste Körper, z. B. bei der auffallend bedeutenden Absorption von Wasserstoffgas durch Platin und Palladium, das Gas als flüssig oder fest geworden zu betrachten sein; allein die Eigenschaften des absorbirten Gases an sich, d. h. unabhängig von den fraglichen Molekularkräften, sind uns in dem fraglichen Zustande nicht bekannt.

für alle Gase gleich gross ist, entsprechen jenen Gasen, für welche n gleich gross ist, auch gleiche Einzelwerthe der Producte $c\delta$ und $c_1\delta$. Da δ dem specif. Gewichte (Gewichte der Volumeneinheit) eines Gases bei gegebener Pressung und Temperatur proportional ist, so sind jene Producte $c\delta$ und $c_1\delta$ den betreffenden specifischen Wärmen der Volumeneinheit verschiedener Gase bei gleicher Pressung und Temperatur derselben proportional. Während also für alle Gase die Differenz der specif. Wärmen der Volumeneinheit (bei gleichen Werthen von p und t) beziehungsweise für constantes Volumen und für constante Pressung gleich gross ist, sind diese specif. Wärmen auch einzeln gleich gross für solche Gase, für welche n denselben Werth hat, insbesondere also fast genau für die 4 ersten Gase der obigen Tabelle.

Dieses Gesetz kann auf einen anderen bemerkenswerthen Ausdruck gebracht werden, wenn es mit der von Avogadro zuerst ausgesprochenen und in der theoretischen Chemie ziemlich allgemein anerkannten Hypothese verbunden wird, dass im Gaszustande bei gleichen Werthen von p und t von allen Substanzen gleich viel Moleküle in gleichen Räumen enthalten seien. Hiernach wäre, unter C eine Constante und unter m das Molekulargewicht verstanden,

$$\delta = Cm, \text{ insbesondere } \delta = 0{,}0346\, m \quad \ldots\ldots\ldots (3),$$

wenn die Constante im Mittel den Werthen von m und δ für Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff entsprechend bestimmt wird. Die nach Gl. (3 berechneten Werthe von δ sind in obiger Tabelle in der Columne unter δ' enthalten und sind, wie man sieht, durchweg sehr wenig von den beobachteten Werthen verschieden. Indem also die Producte $c\delta$ und $c_1\delta$ auch den Producten mc und mc_1, also den specifischen Molekularwärmen (specif. Wärmen eines Moleküls) proportional gesetzt werden können, kann das obige Gesetz auch dahin ausgesprochen werden, dass im Gaszustande bei gleichen Werthen von p und t die specif. Molekularwärmen, welche beziehungsweise $v = Const.$ und $p = Const.$ entsprechen, für alle Substanzen dieselbe Differenz und für solche Gase, für welche n gleich gross ist, auch einzeln dieselben Werthe haben. —

Die Werthe von δ und c_1, welche in obiger Tabelle für Sumpfgas, oelbildendes Gas, Kohlensäure und Wasserdampf angegeben sind, beziehen sich auf solche Wärmezustände dieser Gase resp. Dämpfe, in welchen dieselben, und zwar in zunehmendem Grade nach der Reihenfolge ihrer Aufführung in der Tabelle, schon so weit von dem vollkommenen Gaszustande entfernt sind, dass sie kaum oder entschieden nicht als Gase im Sinne der

Erklärung von §. 17 gelten können. Die Anwendung von Gl. (2) zur Berechnung von c und n war deshalb in diesen Fällen eigentlich nicht zulässig, wenigstens nicht mit demselben Rechte wie für die ersten in der Tabelle aufgeführten Gase im engeren Sinne, so dass die Werthe von c und n in diesen Fällen sowohl für diejenigen Zustände, auf welche sich die beobachteten Werthe von δ und c_1 beziehen, als auch für die betreffenden Grenzzustände eines vollkommenen Gases von den in der Tabelle angeführten Werthen merklich abweichen können. Man könnte nun vermuthen, dass nur durch diesen letzteren Umstand die bedeutende Verschiedenheit der Werthe von n in der zweiten Hälfte von denen in der ersten Hälfte obiger Tabelle begründet sei, dass aber in allen Fällen sich n derselben Grenze nähere in dem Maasse wie der Zustand sich dem vollkommenen Gaszustande nähert; allein dann müsste wegen

$$\frac{c}{c_1} = \frac{1}{n} = 1 - \frac{0{,}0691}{c_1 \delta} \text{ gemäss Gl. (2)}$$

auch das Product $c_1 \delta$ sich in allen Fällen derselben Grenze nähern, also wenigstens einer von beiden Factoren c_1 und δ in viel höherem Grade veränderlich sein, als es erfahrungsmässig selbst bei Dämpfen in der Nähe des Uebergangszustandes zur flüssigen Aggregatform der Fall ist. Dass die Dichtigkeit δ der Dämpfe bezüglich auf atmosphärische Luft sich selbst beim Uebergange in den vollkommenen Gaszustand nicht erheblich ändern werde, lässt auch der Umstand vermuthen, dass das Avogadro'sche Gesetz bei Dämpfen kaum weniger zutrifft, als bei den permanenten Gasen. Endlich lassen auch die Werthe von n in den letzten 4 Fällen der Tabelle (ebenso auch bei anderen Dämpfen) nicht sowohl eine Abhängigkeit vom Unvollkommenheitsgrade des Gaszustandes, als vielmehr von der atomistischen Constitution des Moleküls erkennen, und zwar so, dass n um so kleiner ist, je grösser die Atomzahl $= a$ des Moleküls ist. Von Dr. A. Naumann* ist diese Beziehung auf die Formel

$$n = \frac{a + 5}{a + 3}$$

gebracht worden, wonach z. B. für Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenoxyd ($a = 2$) sich $n = 1{,}4$, für Kohlensäure und Wasserdampf ($a = 3$): $n = 1{,}333$, für Sumpfgas ($a = 5$): $n = 1{,}25$, für ölbildendes Gas ($a = 6$): $n = 1{,}222$ ergeben würde. Prof. Dr. G. Schmidt stellte das Verhältniss n als abhängig dar nicht nur von der Atomzahl des Moleküls,

* Annalen der Chemie und Pharmacie, Bd. 142, Seite 266.

sondern zugleich von einer den verschiedenartigen Atomen in wenigen einfachen Abstufungen zugeschriebenen verschiedenen Werthigkeit.* Diese und andere Formeln werden erst dann von erheblichem Werthe sein, wenn sie aus einfachen Hypothesen rationell abgeleitet erscheinen, oder wenn sie wenigstens als empirische Formeln besser und ausnahmsloser, als bisher, mit den Thatsachen in Einklang gebracht werden können. —

Für die Wärmemenge, welche einem Kgr. eines Körpers behufs einer unendlich kleinen umkehrbaren Zustandsänderung mitzutheilen ist, hat man allgemein nach §. 13, Gl. (2)

$$WdQ = dU + p\,dv,$$

während für ein Gas nach §. 18, Gl. (6) auch

$$WdQ = Wc\,dT + p\,dv$$

ist. Daraus folgt

$$dU = Wc\,dT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4.$$

Wegen $c = Const.$ ist also die Aenderung des inneren Arbeitsvermögens eines Gases seiner Temperaturänderung proportional. Ist U_1 der Werth von U für $T = T_1$, so ist

$$U - U_1 = Wc(T - T_1)$$

oder mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung

$$U - U_1 = \frac{c}{AR}(pv - p_1 v_1)$$

und mit Rücksicht auf Gl. (1)

$$U - U_1 = \frac{pv - p_1 v_1}{n - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5.$$

§. 20. Zustandsänderung nach dem Gesetze: $pv^m = Const.$ Isothermische, isodynamische und adiabatische Curve der Gase.

Die umkehrbare Zustandsänderung eines Gases erfolge nach dem Gesetze

$$pv^m = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1.$$

unter C und m Constante verstanden. Es ist dann

$$v^m dp + pmv^{m-1} dv = 0;\quad \frac{dp}{dv} = -m\frac{p}{v} \quad \ldots\ldots\ldots 2.$$

* Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, 1866, Heft IX—XII.

Wenn C und m endliche Werthe haben, sind

$$v=0,\quad p=\infty,\quad \frac{dp}{dv}=\infty$$

$$v=\infty,\quad p=0,\quad \frac{dp}{dv}=0$$

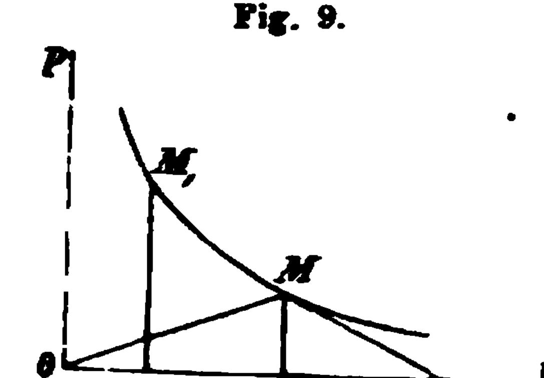


Fig. 9.

zusammengehörige Werthe; die Zustandscurve (Fig. 9) hat die Axen der v und der p zu Asymptoten. Ist $ST=s$ die Subtangente für den beliebigen Punkt M der Zustandscurve mit den Coordinaten $OS=v$, $SM=p$, so ist für denselben

$$\frac{dp}{dv}=-\frac{p}{s},\ \text{also}\ m=\frac{v}{s}=\frac{OS}{ST}.$$

Ist p_1 die Pressung und T_1 die absolute Temperatur, welche dem specifischen Volumen v_1 (mit $OS_1=v_1$ dem Punkte M_1 der Zustandscurve) entspricht, so folgt aus den Gleichungen

$$pv^m=p_1v_1^m \text{ und } pv=RT$$

$$\frac{p}{p_1}=\left(\frac{v_1}{v}\right)^m;\quad \frac{T}{T_1}=\frac{pv}{p_1v_1}=\left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}=\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} \quad \ldots\ldots (3).$$

Die Expansionsarbeit E, welche von 1 Kgr. des Gases beim Uebergang aus dem Zustande M_1 (v_1, p_1, T_1) in den Zustand $M(v, p, T)$ verrichtet wird, ist

$$E=S_1M_1MS=\int_{v_1}^{v} p\,dv=p_1v_1^m\int_{v_1}^{v}\frac{dv}{v^m}=\frac{p_1v_1^m}{m-1}\left(\frac{1}{v_1^{m-1}}-\frac{1}{v^{m-1}}\right)$$

$$\text{oder } E=\frac{p_1v_1}{m-1}\left[1-\left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4);$$

vermittels der Gleichungen (3) kann sie statt durch v auch durch p oder T ausser durch die mit dem Anfangszustande M_1 gegebenen Grössen ausgedrückt werden.

Die specifische Wärme, welche als Function von m hier mit μ bezeichnet sei, ist mit Rücksicht auf §. 18, Gl. (6) und auf die Zustandsgleichung:

$$\mu=\frac{dQ}{dT}=c+Ap\frac{dv}{dT}=c+AR\frac{p\,dv}{d(pv)}$$

oder wegen $AR=c(n-1)$ und $d(pv)=p\,dv+v\,dp$

$$\mu = c + \frac{c(n-1)}{1 + \frac{v}{p}\frac{dp}{dv}}$$

oder endlich nach obiger Gl. (2)

$$\mu = \left(1 + \frac{n-1}{1-m}\right) c = \frac{m-n}{m-1} c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5.$$

Diese specif. Wärme ist positiv für $m < 1$ oder $m > n$,
negativ für $1 < m < n$.

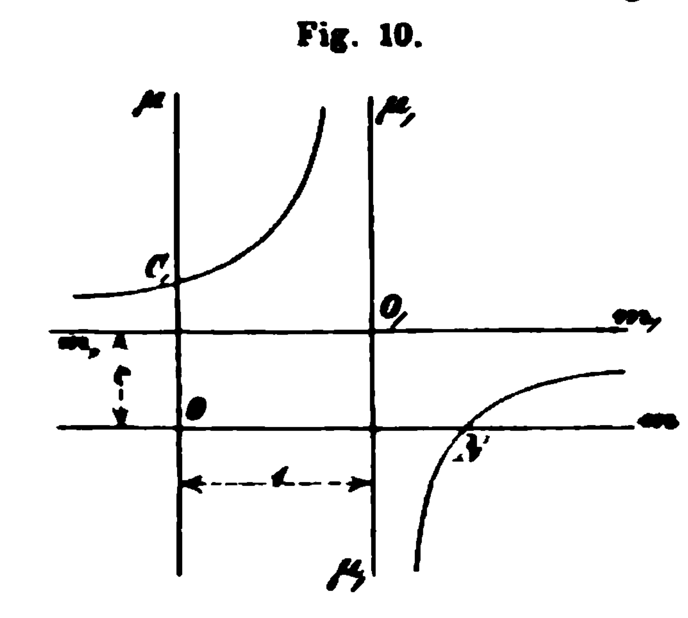


Fig. 10.

Das Gesetz, nach welchem sich μ mit m ändert, ist in Fig. 10 durch die Curve dargestellt, deren Coordinaten m und μ sind; sie schneidet die Axe der μ in der Entfernung $OC_1 = c_1$, die Axe der m in der Entfernung $ON = n$ vom Anfangspunkte O. Die Curve ist eine gleichseitige Hyperbel mit den Asymptoten $m_1\, m_1$ in der Entfernung $= c$ von Om und $\mu_1\, \mu_1$ in der Entfernung $= 1$ von $O\mu$; denn mit

$$m = m_1 + 1 \text{ und } \mu = \mu_1 + c$$

wird ihre Gleichung für die Axen $O_1 m_1$ und $O_1 \mu_1$:

$$m_1 \mu_1 = -(n-1)c = -(c_1 - c).$$

Schliesslich ist die (positive oder negative) Wärme, welche dem Gase pro 1 Kgr. beim Uebergang aus dem Zustande M_1 in den Zustand M mitgetheilt werden muss,

$$Q = \mu (T - T_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6.$$

worin nach den Gleichungen (3) auch T durch v oder p ersetzt werden kann. Wegen

$$T - T_1 = -T_1 \left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}\right] = -\frac{p_1 v_1}{R} \frac{m-1}{p_1 v_1} E$$

$$= -\frac{m-1}{AR} AE = -\frac{m-1}{c(n-1)} AE = -\frac{m-n}{\mu(n-1)} AE$$

ist auch

$$Q = \frac{n-m}{n-1} AE \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 7.$$

also Q von gleichem oder entgegengesetztem Zeichen wie E, jenachdem $m < n$ oder $m > n$ ist. —

Eine Zustandsänderung von dieser Art $pv^m = Const.$ kann im Allgemeinen, zunächst wenigstens versuchsweise vorbehaltlich entsprechender

Bestimmung von m, vorausgesetzt werden, wenn die Zustandscurve oder das Gesetz der Wärmemittheilung nicht gegeben sind, sondern aus Beobachtungen abgeleitet werden müssen. Lässt sich aus denselben mit Hülfe der Gleichungen (3) und (4) der Werth von m bestimmen, so ergiebt sich das Gesetz der Wärmemittheilung aus Gl. (5) und (6); ob die Voraussetzung des Gesetzes $pv^m = Const.$, unter m eine Constante verstanden, überhaupt zulässig war, lässt die mehr oder weniger vollkommene Uebereinstimmung der aus verschiedenen Beobachtungen abgeleiteten Werthe von m erkennen.

Die in §. 13 unter 1) bis 5) erwähnten besonderen Arten von Zustandsänderungen sind in dem Gesetze $pv^m = Const.$ als Specialfälle enthalten.

1) Mit $m = 0$, also $pv^m = p$, erhält man die Zustandsänderung bei constanter Pressung p. Dafür ist

$$\mu = c_1;\quad \frac{T}{T_1} = \frac{v}{v_1};\quad E = p\,(v - v_1).$$

2) Mit $m = 1$ wird $pv = Const.$, also $T = Const.$ Für diese Zustandsänderung bei constanter Temperatur ist

$$\mu = \infty \text{ und } \frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v}.$$

Die Expansionsarbeit, welche nach Gl. (4) in unbestimmter Form erscheint, ist

$$E = \int_{v_1}^{v} p\,dv = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \, ln\, \frac{v}{v_1}.$$

Die isothermische Curve $pv = Const.$ ist eine gleichseitige Hyperbel; die isodynamische Curve fällt mit ihr zusammen, weil für $dT = 0$ nach §. 19, Gl. (4) auch $dU = 0$ ist.

3) Mit $m = n$ wird $\mu = 0$, also $dQ = 0$. Die Zustandscurve mit der Gleichung

$$pv^n = Const.$$

ist also die adiabatische Curve, entsprechend einer Zustandsänderung ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme. Von demselben Punkte (v, p) aus nähert sie sich mit wachsendem v schneller der v-Axe, als die isothermische Curve; ist nämlich φ_n der spitze Winkel, welchen die erstere, φ_1 derjenige, welchen die letztere Curve in demselben Punkte mit der v-Axe bildet, so ist nach Gl. (2)

$$tg\,\varphi_n = n\, tg\,\varphi_1.$$

Diese Zustandsänderung nach der adiabatischen Curve ist von besonderer Wichtigkeit für die Anwendungen; es ist bei derselben

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^n; \quad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$E = \frac{p_1 v_1}{n-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1}\right].$$

4) Mit $m = \infty$, also $p^{\frac{1}{m}} v = v$ erhält man die Zustandsänderung bei constantem Volumen v. Dafür ist

$$\mu = c; \quad \frac{T}{T_1} = \frac{p}{p_1}; \quad E = 0.$$

§. 21. Bestimmung des Verhältnisses $n = \frac{c_1}{c}$.

Mit Rücksicht auf die Wichtigkeit des Verhältnisses n der beiden specif. Wärmen für constantes Volumen und für constante Pressung, sowie zugleich als Anwendungsbeispiele der im Vorhergehenden entwickelten Formeln mögen hier zwei Methoden begründet werden, welche zur Bestimmung dieses Verhältnisses insbesondere für atmosphärische Luft bisher angewendet wurden.

Erste Methode. — In einem Behälter, welcher mit einer verschliessbaren Ausflussmündung und mit einem Manometer zur Messung des Druckes im Inneren des Behälters versehen ist, befinde sich ein Gas, dessen Pressung $= p_1$ grösser ist, als die des umgebenden Mediums (z. B. der Atmosphäre), während seine (absolute) Temperatur = der äusseren = T_1 sei. Die Ausflussmündung werde einige Secunden lang geöffnet, und sogleich nach ihrem Schluss die im Inneren gesunkene Pressung $= p_2$ beobachtet. Die entsprechend auf T_2 gesunkene Temperatur würde, auch wenn der Behälter mit einem in sein Inneres reichenden Thermometer versehen wäre, nicht mit Sicherheit beobachtet werden können, weil dessen Stand der veränderten Temperatur viel langsamer folgt, als der des Manometers der veränderten Pressung, einige Zeit nach dem Schluss der Ausflussmündung aber der Zustand des Gases sich schon merklich geändert haben kann infolge des Eindringens von Wärme durch die Wand des Behälters. Wenn man aber von derjenigen Wärmemenge absieht, welche schon während der kurzen Zeit des theilweisen Ausflusses des Gases aus der geöffneten Mündung durch die Gefässwand von aussen her eindringt, so lässt sich die der Pressung p_2

entsprechende, sofort nach dem Schlusse der Mündung innen herrschende Temperatur nach vorigem §. unter 3) berechnen, nämlich

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

setzen. Bei geschlossener Mündung des Behälters steigt nun in Folge des Eindringens von Wärme die Temperatur im Inneren allmählig wieder bis T_1, welcher Werth als erreicht zu betrachten ist, wenn das Manometer eine weitere Zunahme der allmählig auf p_3 gewachsenen Pressung nicht mehr erkennen lässt. Da diese Zustandsänderung des im Behälter abgesperrten Gases bei constantem Volumen stattfand, so ist dem vorigen §. unter 4) zufolge

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_3}{p_2}.$$

Durch die Multiplication beider Gleichungen ergiebt sich

$$1 = \frac{p_3}{p_2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{n}} = \frac{p_3}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left(\frac{p_1}{p_3}\right)^n = \frac{p_1}{p_2};\ n = \frac{lg\,p_1 - lg\,p_2}{lg\,p_1 - lg\,p_3} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (1).$$

Auf diese Weise hat Weisbach für atmosph. Luft gefunden: bei einem Versuche $n = 1{,}400$, bei einem anderen $n = 1{,}405$.* Da die Luft in ihrem natürlichen Zustande benutzt wurde, also etwas Wasser- und Kohlensäuredampf enthielt, für welche Bestandtheile nach der Tabelle in §. 19 das Verhältniss n kleiner ist, als für Sauerstoff- und Stickstoffgas, so entspricht auch den Versuchen ein etwas kleinerer Werth von n, als reiner Luft. Auch die geringe Wärmemenge, welche während der Oeffnung der Ausflussmündung von aussen her in den Behälter eindringt, liefert das Verhältniss n etwas zu klein. Ist nämlich hierbei $pv^m = Const.$ das wahre Aenderungsgesetz des Gaszustandes im Inneren des Behälters, so hat

$$\mu = \frac{dQ}{dT}$$

einen kleinen negativen Werth, sofern mit dem negativen Werthe von dT ein positiver Werth von dQ verbunden ist; also ist m etwas kleiner, als $ON = n$: siehe Fig. 10.

Zweite Methode. — Eine andere Methode, das Verhältniss n zu bestimmen, beruht auf der Beziehung, welche zwischen ihm und der Ge-

* „Civilingenieur" 1859, Seite 46.

schwindigkeit $= w$ stattfindet, mit welcher der Schall, überhaupt irgend eine durch einen Impuls hervorgebrachte örtliche Verdichtung oder Verdünnung in einem Gase fortgepflanzt wird. Für diese Geschwindigkeit w mag zunächst ein allgemeinerer Ausdruck abgeleitet werden, welcher nicht nur für Gase, sondern auch für beliebige Flüssigkeiten und selbst für feste Körper gilt, in welchen eine örtliche Dichtigkeitsänderung (eine Verdichtungs- oder Verdünnungswelle) durch Longitudinalschwingungen, d. h. durch solche Schwingungen der Massentheilchen fortgepflanzt wird, welche überall normal gegen die Wellenflächen gerichtet sind; eine Wellenfläche ist der Ort aller Punkte, in welchen in demselben Augenblicke gleiche Schwingungszustände stattfinden.

Im Punkte A des von dem betrachteten Körper eingenommenen Raumes sei AA' die Richtung der Normalen zu der durch A gehenden Wellenfläche, genommen im Sinne der Fortpflanzung der Wellen; v sei das specif. Volumen, p die Pressung, u die Vibrationsgeschwindigkeit zur Zeit t im Punkte A, diese Geschwindigkeit u positiv oder negativ gesetzt, jenachdem sie die Richtung AA', also die Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit w, oder die entgegengesetzte Richtung hat. Wird dann die Richtung der x-Axe im Sinne AA' angenommen, so ist nach §. 12, Gl. 1, unter X die Componente der beschleunigenden Massenkraft (insbesondere z. B. der Schwerkraft) im Punkte A nach der Richtung AA' verstanden, mit

$$u_y = u_z = 0, \quad u_x = u$$

und abgesehen von innerer Reibung:

$$X - gv\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2$$

Ist $AA' = dx$, so ist im Punkte A' die Vibrationsgeschwindigkeit zur Zeit $t = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$, also zur Zeit $t + dt$:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dt = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Ist zugleich $AA' = w\,dt =$ dem Weg, um welchen vom Punkte A aus die Welle während des Zeitelementes dt fortgepflanzt wird, so müsste diese Vibrationsgeschwindigkeit im Punkte A' zur Zeit $t + dt =$ der Vibrationsgeschwindigkeit u im Punkte A zur Zeit t sein, falls die Schwingungen mit unveränderter Intensität fortgepflanzt würden; sofern aber letzteres im Allgemeinen nicht der Fall ist, werde

$$u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt = u - a\frac{\partial u}{\partial x}dx \text{ mit } w = \frac{dx}{dt}$$

gesetzt, unter α einen im Allgemeinen veränderlichen kleinen Bruch verstanden. Daraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(1+\alpha)\,w\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

und durch Substitution in Gl. (2)

$$X - gv\frac{\partial p}{\partial x} = -\Big[(1+\alpha)\,w - u\Big]\frac{\partial u}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Das Massenelement des Körpers, welches sich zur Zeit t in dem parallelepipedischen Raumelemente $dx\,dy\,dz$ mit dem Eckpunkte A befindet, erfährt infolge des Schwingungszustandes im Zeitelemente dt die Volumenvergrösserung

$$dy\,dz\Big[(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx)\,dt - u\,dt\Big] = dx\,dy\,dz.\frac{\partial u}{\partial x}dt\,;$$

somit ist die verhältnissmässige Vergrösserung des specif. Volumens im Punkte A während des Zeitelementes dt:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t}dt = \frac{\partial u}{\partial x}dt,$$

und die Substitution des hieraus sich ergebenden Ausdruckes für $\frac{\partial u}{\partial x}$ in Gl. (3) giebt:

$$-vX + gv^2\frac{\partial p}{\partial x} = \Big[(1+\alpha)\,w - u\Big]\frac{\partial v}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Wird nun mit $AA' = dx = w\,dt$, ebenso wie oben die Vibrationsgeschwindigkeit, auch die Pressung im Punkte A' zur Zeit $t + dt$ im Allgemeinen etwas verschieden von der Pressung $= p$ im Punkte A zur Zeit t gesetzt trotz gleicher Schwingungsphase, etwa

$$p + \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial t}dt = p - \beta\frac{\partial p}{\partial x}dx \text{ mit } w = \frac{dx}{dt},$$

so liefert die Substitution des entsprechenden Ausdruckes

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{(1+\beta)\,w}\frac{\partial p}{\partial t}$$

in Gl. (4):

$$-vX - \frac{gv^2}{(1+\beta)\,w}\frac{\partial p}{\partial t} = \Big[(1+\alpha)\,w - u\Big]\frac{\partial v}{\partial t}$$

oder, wenn das Verhältniss der gleichzeitigen elementaren Aenderungen von p und v in demselben Punkte, nämlich

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial p}{\partial t}dt}{\frac{\partial v}{\partial t}dt} = \frac{dp}{dv} \text{ gesetzt wird,}$$

$$(1+\alpha)w = -\frac{gv^2}{(1+\beta)w}\frac{dp}{dv} - \frac{vX}{\frac{\partial v}{\partial t}} + u.$$

Die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung sind periodisch positiv und negativ und zwar so, dass, falls X unabhängig von der Zeit t ist, ihre Mittelwerthe = Null sind. Der **Mittelwerth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit** der Wellen im Punkte A, welcher allein beobachtet werden kann und in Betracht kommt, entspricht also der Gleichung

$$(1+\alpha)(1+\beta)w^2 = -gv^2\frac{dp}{dv} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5.$$

Je mehr der Körper bei der Fortpflanzung der Wellen sich vollkommen elastisch verhält, die lebendige Kraft der Vibrationsbewegung also keinen Verlust (durch Umsetzung in Wärme) erleidet, und je schwächer die Wellenflächen gekrümmt sind, je geringer also ihre verhältnissmässige Vergrösserung oder Verkleinerung bei der Fortpflanzung (einer im Sinne von w convexen oder concaven Krümmung entsprechend) ist, was insbesondere bei der Fortpflanzung im unbegrenzten Mittel um so mehr zutrifft, je weiter die betrachtete Stelle A vom Erregungsorte der Wellen entfernt ist, desto mehr verschwinden die Grössen α und β, so dass man erhält:

$$w = \sqrt{-gv^2\frac{dp}{dv}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6$$

Die periodischen Zustandsänderungen der einander benachbarten Körperschichten erfolgen so schnell, dass dabei ein merklicher Wärmeaustausch zwischen ihnen nicht stattfinden kann. In Gl. (6), welche in dieser Form allgemein gültig ist, bedeutet deshalb $\frac{dp}{dv}$ das Verhältniss der gleichzeitigen elementaren Aenderungen von p und v, welche der Voraussetzung entsprechen, dass eine Mittheilung oder Entziehung von Wärme nicht stattfinde, oder es ist $\frac{dp}{dv}$ die **Richtungstangente der adiabatischen Curve.**

Insbesondere für **Gase** ist also nach §. 20, Gl. (2) mit $m = n$ zu setzen.

$$\frac{dp}{dv} = -n\frac{p}{v}.$$

Dadurch wird

$$w = \sqrt{gnpv} = \sqrt{gnRT} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

unter T die mittlere oder diejenige absolute Temperatur verstanden, welche im Zustande der Ruhe an der betreffenden Stelle herrscht; mit den periodischen Schwingungen und Dichtigkeitsänderungen sind nämlich auch entsprechende periodische Temperaturänderungen verbunden, welche aber so schnell stattfinden, dass sie nicht gemessen werden können. Für atmosphärische Luft ergiebt sich mit

$$g = 9{,}81;\ R = 29{,}27;\ n = 1{,}41$$

$$w = 20{,}12\sqrt{T}$$

z. B. für	$t = 0^0$	10^0	20^0	30^0	
oder	$T = 273$	283	293	303	
	$w = 332{,}5$	338,5	344,4	350,2	Mtr. pro 1″

in guter Uebereinstimmung mit wiederholten Messungen der Schallgeschwindigkeit in der Luft.

C. Verhalten fester und flüssiger Körper.

Die experimentellen Grundlagen, welche die Anwendung der allgemeinen Gleichungen in §. 15 auf die Untersuchung der Aenderungen des Wärmezustandes der Körper ermöglichen, werden hauptsächlich gewonnen

1) durch die Messung der specif. Volumina, welche verschiedenen Temperaturen bei constanter Pressung entsprechen,

2) durch die Messung der specif. Volumina, welche verschiedenen Pressungen bei constanter Temperatur entsprechen,

3) durch die Bestimmung der specif. Wärme bei constanter Pressung und verschiedenen Temperaturen.

Wären diese Bestimmungen bei hinlänglich vielen verschiedenen Werthen der Pressung und der Temperatur ausgeführt, so würden die Messungen sub 1) und 2) zur empirischen Erkenntniss der Zustandsgleichung führen; aus dem Ausdrucke für die specif. Wärme c_p bei constanter Pressung könnte vermittels der zweiten Hauptgleichung — §. 15, Gl. (12) — zunächst die specif. Wärme c_v bei constantem Volumen und dann durch Vergleichung der verschiedenen Ausdrücke von dQ als Functionen von c_v und c_p — §. 15, Gl. (8) bis (10) — mit der allgemeinen Form

$$W\,dQ = dU + p\,dv$$

der Wärmegleichung für eine umkehrbare Aenderung des Wärmezustandes auch die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens gefunden werden. Die erste Hauptgleichung — §. 15, Gl. 11 — sowie gewisse sonstige physikalische Erfahrungswerthe, z. B. der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in dem betreffenden Körper, würden noch zur Controle verwendbar bleiben.

Die Erfahrungen über feste und flüssige Körper sind freilich nicht umfassend genug, um daraus ihre Zustandsgleichung und die Gleichung ihres inneren Arbeitsvermögens in der angedeuteten Weise zuverlässig ableiten zu können; die Bestimmungen der gleichzeitigen Aenderungen von Volumen und Temperatur, sowie die der specif. Wärme bei constanter Pressung sind im Wesentlichen bisher auf den Fall beschränkt, dass diese constante Pressung dem Atmosphärendruck gleich ist, und ebenso sind die Bestimmungen der sich entsprechenden Aenderungen von Volumen und Pressung, für Flüssigkeiten überhaupt nur in sehr geringer Zahl vorhanden, fast nur bei gewöhnlicher Lufttemperatur ausgeführt worden. Indessen können doch die vorliegenden Erfahrungen dazu benutzt werden, mit Hülfe der allgemeinen Gleichungen in §. 15 gewisse Folgerungen daraus zu ziehen, welche im Folgenden, besonders bei der Untersuchung des für die technischen Anwendungen wichtigeren Verhaltens der Dämpfe, zum Theil Verwendung finden werden. Jene Folgerungen beruhen darauf, dass durch die oben unter 1) und 2) genannten Messungen die Werthe der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial v}{\partial t} \text{ und } \frac{\partial v}{\partial p},$$

welche beziehungsweise den Voraussetzungen $p = Const.$ und $t = Const.$ entsprechen, für gewisse Fälle bekannt sind, und dass daraus innerhalb gewisser Grenzen, für welche diese Werthe als gültig betrachtet werden, auch die Werthe der übrigen aus den Variablen v, p, t gebildeten Differentialquotienten gefunden werden können gemäss den aus §. 15 bekannten Beziehungen

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial p} = \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v} = 1$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} = -1,$$

in welchen auf Grund der aus §. 18 bekannten Bedeutung der Temperaturfunction $T = 273 + t$ die Differentiale von T und t sich ersetzen können.

§. 22. Verhalten von Flüssigkeiten, insbesondere des Wassers.

Ueber die Ausdehnung flüssiger Körper durch die Wärme bei constanter atmosphärischer Pressung sind einige sehr vollständige Versuchsreihen vorhanden, welche gestatten, das Verhältniss des specif. Volumens v bei irgend einer zwischen gewissen Grenzen liegenden Temperatur t zu dem specif. Volumen v' bei der willkürlich zu wählenden Anfangstemperatur t' als Function von t darzustellen:

$$\frac{v}{v'} = f(t),$$

also auch den Ausdehnungscoefficienten

$$a = \frac{1}{v'}\frac{\partial v}{\partial t} = f'(t),$$

welcher das Verhältniss der bei constanter atmosphärischer Pressung sich entsprechenden elementaren Aenderungen von v und t ausdrückt, erstere $= \frac{dv}{v'}$ gemessen in Theilen des $= 1$ gesetzten specif. Volumens bei der Temperatur t'. Dabei ist $f(t)$ als ganze algebraische Function von t darstellbar gefunden worden. So ist insbesondere für Wasser,* wenn v_4 sein specif. Volumen bei 4^0 (im Zustande grösster Dichte) bedeutet, nach Weidner zu setzen für $t < 4^0$:

$$\frac{v}{v_4} = 1 + 0{,}0000082\,(4-t) + 0{,}000005444\,(4-t)^2 + 0{,}000000267\,(4-t)^3$$

und nach Matthiessen für $4^0 < t < 32^0$:

$$\frac{v}{v_4} = 1 - 0{,}00000253\,(t-4) + 0{,}000008389\,(t-4)^2 - 0{,}00000007173\,(t-4)^3,$$

sowie für $t > 32^0$:

$$\frac{v}{v_4} = 0{,}999695 + 0{,}0000054724\,t^2 - 0{,}00000001126\,t^3.$$

Hiernach kann in allen Fällen gesetzt werden:

$$\frac{v}{v_4} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

---

* Siehe u. A. Hirzel und Gretschel: Jahrbuch der Erfindungen und Fortschritte auf den Gebieten der Physik und Chemie etc., Jahrg. 1867, S. 111 u. ff.

also der auf das kleinste specif. Volumen v_4 bezogene Ausdehnungscoefficient

$$\alpha = \frac{1}{v_4}\frac{\partial v}{\partial t} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

wenn dabei den Coefficienten a_0, a_1, a_2, a_3 je nach den Temperaturgrenzen die aus der folgenden Zusammenstellung zu entnehmenden Werthe beigelegt werden.

	a_0	$a_1 . 10^9$	$a_2 . 10^{10}$	$a_3 . 10^{11}$
$t < 4$	1,0001370	− 64568	86480	− 26700
$4 < t < 32$	1,0001489	− 73085	92498	− 7173
$t > 32$	0,9996950	0	54724	− 1126

Mit diesen Werthen sind nach Gl. (1) und (2) für Wasser die Werthe von $\frac{v}{v_4}$ und α in der weiter unten folgenden Tabelle berechnet.

Gewöhnlich wird die Temperatur $t = 0$ als Anfangstemperatur gewählt und auf das entsprechende specif. Volumen v_0 jedes andere v sowie der Ausdehnungscoefficient α bezogen. So ist nach Regnault für Quecksilber

$$\frac{v}{v_0} = 1 + 0{,}000\,179\,007\,t + 0{,}000\,000\,0252\,t^2$$

$$\alpha = \frac{1}{v_0}\frac{\partial v}{\partial t} = 0{,}000\,179\,007 + 0{,}000\,000\,0504\,t.$$

Auch wird der Ausdehnungscoefficient häufig als Mittelwerth $= \alpha'$ für das Temperatur-Intervall 0 bis t in die Rechnung eingeführt, entsprechend der Gleichung

$$v = v_0\,(1 + \alpha' t)$$

$$\text{wonach } \alpha' = \frac{1}{t}\left(\frac{v}{v_0} - 1\right) = \frac{f(t) - 1}{t}$$

ist, z. B. für Quecksilber

$$\alpha' = 0{,}000\,179\,007 + 0{,}000\,000\,0252\,t,$$

insbesondere für das Intervall von 0° bis $t = 100°$

$$\alpha' = 0{,}000\,18153.$$

Die Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten ist ihrer geringen Grösse wegen schwieriger zu messen und deshalb auch weniger vollkommen und zuverlässig bekannt, als ihre Ausdehnung durch die Wärme. Nur wenige Versuche liegen vor, aus welchen sich der Werth des Compressionscoefficienten

$$\beta = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

entnehmen lässt, welcher das Verhältniss der bei constanter Temperatur t sich entsprechenden Aenderungen von v und p ausdrückt, erstere $= -\frac{dv}{v}$, gemessen in Theilen des $= 1$ gesetzten specif. Volumens v bei der Temperatur t und bei atmosphärischer Pressung.

Für einige Flüssigkeiten (Salzäther, Alkohol, Schwefeläther) fand Colladon den Coefficienten β etwas abnehmend mit wachsender Pressung (von 1 bis 24 Atm.). Insbesondere für Wasser scheint jedoch diese Veränderlichkeit sehr gering zu sein; für dasselbe ist nach Grassi,* wenn p in Atmosphären ausgedrückt wird,

bei	$t = 0^0$	25^0	50^0
	$\beta = 0{,}0000\,503$	$0{,}0000\,456$	$0{,}0000\,441$

In der Nähe von 0^0 vermuthet Grassi ein Maximum von β, auch mag vielleicht β wieder zunehmen, wenn t über 50^0 hinaus wächst, wie auch für Aether und Alkohol bei $t = 14^0$ resp. 13^0 etwas grössere Werthe von β gefunden wurden, als bei $t = 0^0$ resp. 7^0. Hiernach ist in der folgenden Tabelle für Wasser die Interpolation der Werthe von $\beta.10^7$ zwischen $t = 0$ und 25^0, $t = 25^0$ und 50^0 mit Hülfe einer stetigen Curve ausgeführt worden, welche durch die 3 Punkte mit den Abscissen $= 0, 25, 50$ und den Ordinaten $= 503, 456, 441$ so gelegt wurde, dass sie in den Endpunkten parallel der Abscissenaxe war; für $t > 50^0$ wurde in Ermangelung anderweitiger Anhaltspunkte β constant $= 0{,}0000\,441$ gesetzt.

Für Aether und Alkohol fand Grassi den Compressionscoefficienten 2 bis 3 Mal so gross, als für Wasser, für Quecksilber von 0^0 aber nur

$$\beta = 0{,}00000\,295.$$

Durch die Werthe von $\frac{\partial v}{\partial t}$ und $\frac{\partial v}{\partial p}$ ist nun auch der Differentialquotient

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{-1}{\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p}} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{\frac{\partial v}{\partial p}}$$

bestimmt, d. h. das Verhältniss der bei constantem Volumen sich entsprechenden elementaren Aenderungen von p und t. In der

* Krönig's Journal für Physik und phys. Chemie des Auslands, Bd. II, S. 129.

weiter unten folgenden Tabelle sind insbesondere für **Wasser** die Werthe von

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\frac{1}{v_4}\frac{\partial v}{\partial t}}{-\frac{v}{v_4}\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}} = \frac{v_4}{v}\frac{\alpha}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4$$

enthalten, welche sich aus den in den vorhergehenden Columnen enthaltenen Werthen von $\frac{v}{v_4}$, α und β ergeben, wobei aber freilich die Annahme gemacht ist, dass die für atmosphärische Pressung gefundenen Werthe von α auch bei anderen constanten Pressungen unter übrigens gleichen Umständen gelten. Ebenso wie die Werthe von β setzen natürlich auch die daraus abgeleiteten Werthe von $\frac{\partial p}{\partial t}$ voraus, dass p in Atmosphären ausgedrückt sei.

Wird der Ausdehnungscoefficient auf das specif. Volumen v_0 bei der Temperatur 0 bezogen, so ist

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\frac{1}{v_0}\frac{\partial v}{\partial t}}{-\frac{v}{v_0}\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}} = \frac{\alpha}{(1+\alpha' t)\beta},$$

wobei α' den mittleren Ausdehnungscoefficienten für das Temperaturintervall von 0 bis t bedeutet. Insbesondere für **Quecksilber** ergiebt sich

$$\text{bei } t = 0: \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{179007}{2950} = 60{,}7. \; -$$

Kennt man die Werthe von $\frac{\partial p}{\partial t}$ für verschiedene Temperaturen, so kann man die **Steigerung** $= \Delta p$ **der Pressung** berechnen, **welche in einer an der Ausdehnung gehinderten Flüssigkeit durch ihre Erwärmung von** t_1 **bis** t_2 **hervorgebracht wird**:

$$\Delta p = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial p}{\partial t}\, dt.$$

So findet man für Wasser (auf Grund der berechneten Tabelle und mit Hülfe einer bekannten Näherungsmethode) für die Erwärmung von 10° bis 40°

$$\Delta p = \frac{5}{3}(1,84 + 4 . 3,28 + 2 . 4,53 + 4 . 5,57 + 2 . 6,38 + 4 . 7,61 + 8,60)$$

$$= 163,5 \text{ Atm.}$$

und für die Erwärmung von 40° bis 100°

$$\Delta p = \frac{10}{3}(8,60 + 4 . 10,38 + 2 . 11,94 + 4 . 13,32 + 2 . 14,52 + 4 . 15,57 + 16,45)$$

$$= 783,5 \text{ Atm.},$$

also für die Erwärmung von 10° bis 100°

$$\Delta p = 163,5 + 783,5 = 947 \text{ Atm.}$$

Befindet sich die Flüssigkeit in einem vollständig von ihr erfüllten geschlossenen Gefässe, welches von Aussen einem constanten Drucke = der Anfangspressung der eingeschlossenen Flüssigkeit ausgesetzt ist, so ist die Druckzunahme bei der Erwärmung natürlich kleiner, weil sich das Gefäss erweitert sowohl unmittelbar in Folge seiner eigenen Erwärmung, als auch mittelbar in Folge des inneren Ueberdrucks, welcher selbst durch die Erwärmung der Flüssigkeit verursacht wird. In solchem Falle ist

$$dp = \frac{\partial p}{\partial v} dv + \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

und darin zu setzen:

$$dv = v(\alpha_1 dt + \alpha_2 dp),$$

wenn die Temperatur des Gefässes derjenigen der eingeschlossenen Flüssigkeit beständig gleich ist, wenn ferner α_1 und α_2 die Volumenausdehnungs-Coefficienten des Gefässes bezüglich auf die Steigerungen der Temperatur und der inneren Pressung bedeuten, bei deren Kleinheit wenig darauf ankommt, auf welchen Zustand der Factor v (specif. Volumen der eingeschlossenen Flüssigkeit) bezogen wird. Hiernach ist

$$\left(1 - \alpha_2 v \frac{\partial p}{\partial v}\right) dp = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \alpha_1 v \frac{\partial p}{\partial v}\right) dt,$$

also mit $v \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{1}{\beta}$ nach Gl. (3):

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\alpha_1}{\beta}}{1 + \frac{\alpha_2}{\beta}};$$

und wenn hier für $\frac{\alpha_1}{\beta}$ und $\frac{\alpha_2}{\beta}$ constante Mittelwerthe gesetzt werden, er-

giebt sich die Steigerung des Drucks bei der Erwärmung von t_1 bis t_2

$$\Delta p = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial p}{\partial t} dt - \frac{\alpha_1}{\beta}(t_2 - t_1)}{1 + \frac{\alpha_2}{\beta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5.$$

Darin ist α_1 nur von der Substanz des Gefässes, α_2 zugleich von der Gestalt und von den Dimensionen desselben abhängig. Hat z. B. das Gefäss die Form einer cylindrischen Röhre mit dem inneren Halbmesser r_1 und dem äusseren Halbmesser r_2, welche viel kleiner, als die Rohrlänge sind, ist ferner E der Elasticitätsmodul des isotropen (nach allen Richtungen gleich beschaffenen) Materials der Röhre, und ist m die Zahl, welche ausdrückt, wie viel Mal die durch einen äusseren Zug im Sinne desselben hervorgebrachte specifische Verlängerung grösser ist, als die damit verbundene Verkürzung normal zur Richtung des Zuges, so entspricht einem inneren Ueberdruck $= p$ Atm. die verhältnissmässige Volumenausdehnung*

$$\mu = \frac{31}{15}\frac{m-2}{m}\frac{p}{E}\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$$

der Röhre, wenn E in Kgr. pro Quadratcentim. ausgedrückt wird, und es ist also

$$\alpha_2 = \frac{\mu}{p} = \frac{31}{15}\frac{m-2}{m}\frac{1}{E}\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

---

* Nach des Verfassers „Festigkeitslehre", Nr. 272, ist mit den dortigen Bezeichnungen

$$\mu = \frac{m-2}{m-1} b;\ b = \frac{m-1}{m+1}\frac{A}{G};\ A = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2},$$

wenn daselbst der äussere Druck $p_2 = 0$ und dafür statt des inneren Druckes p_1 der innere Ueberdruck p gesetzt wird, also

$$\mu = \frac{m-2}{m+1}\frac{p}{G}\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Darin hat G die Bedeutung: $G = \frac{1}{2}\frac{m}{m+1} E$ und p ist in Kgr. pro Quadratcentim. ausgedrückt vorausgesetzt, wenn E auf dieselben Einheiten bezogen wird. Indem aber der Atmosphärendruck einer Pressung von $\frac{31}{30}$ Kgr. pro Quadratcentim. entspricht, ergiebt sich, falls p in Atm. ausgedrückt wird,

$$\mu = \frac{m-2}{m+1}\cdot\frac{31}{30}\cdot 2\,\frac{m+1}{m}\,\frac{p}{E}\,\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} = \frac{31}{15}\frac{m-2}{m}\frac{p}{E}\frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Der Coefficient m ist erfahrungsmässig $= 3$ bis 4, also $\frac{m-2}{m} = \frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$.
Setzt man hier

$$\frac{m-2}{m} = \frac{13,5}{31}, \text{ entsprechend } m = 3,543,$$

so wird

$$\alpha_2 = \frac{0,9}{E} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Besteht die Röhre aus Schmiedeeisen, so kann

$$E = 2\,000\,000 \text{ und } \alpha_1 = 3 . 0,0000118 = 0,0000\,354$$

gesetzt werden, und wenn die Flüssigkeit in der Röhre Wasser ist, so ergiebt sich mit

$$\beta = 0,000045$$

$$\frac{\alpha_1}{\beta} = 0,79; \quad \frac{\alpha_2}{\beta} = \frac{0,01\, r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Hiernach ist z. B. die Steigerung des Druckes bei der Erwärmung von 10° bis 100° nach Gl. (5) und mit Rücksicht auf das oben für $dv = 0$ gefundene Resultat:

$$\Delta p = \frac{947-71}{1+\frac{\alpha_2}{\beta}} = \frac{876}{1+\frac{0,01\, r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}} \text{ Atm.}$$

$$= 873 \quad 871 \quad 868 \quad 861 \text{ Atm.}$$

$$\text{für } \frac{r_1}{r_2} = 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8.$$

Die Maximalspannung (Product aus dem Elasticitätsmodul und der grössten specif. Ausdehnung), welche dadurch in der Rohrwand hervorgerufen wird, wäre (vergl. des Verfassers „Festigkeitslehre“, Nr. 273)

$$k = \frac{31}{30} \Delta p \frac{(m+1) r_2^2 + (m-1) r_1^2}{m (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{31}{30} \Delta p \left(\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{1}{m} \right)$$

wenigstens näherungsweise, wenn man die dieser Formel zu Grunde liegenden Elasticitätsgesetze als unbeschränkt gültig betrachtet, also mit obigen Werthen von m und Δp

$$k = 1758 \quad 2167 \quad 2874 \quad 4304 \text{ Kgr. pro Quadratcentim.}$$

$$\text{für } \frac{r_1}{r_2} = 0,5 \quad 0,6 \quad 0,7 \quad 0,8.$$

Im letzten Falle ($r_1 = 0,8\, r_2$) würde die Röhre voraussichtlich gesprengt werden. Der erste Fall ($r_1 = 0,5\, r_2$) entspricht den Verhältnissen,

in welchen die zu Hochdruckwasserheizungen bestimmten schmiedeeisernen Röhren ausgeführt zu werden pflegen (etwa 1,25 Centim. innerer bei 2,5 Centim. äusserem Durchmesser); weil aber dabei das in den Röhren circulirende Wasser wesentlich höher erwärmt wird, als bis 100° (etwa bis 160°), so erkennt man die Nothwendigkeit eines Sicherheitsventils als Schutz gegen die Sprengung der Röhren trotz ihrer verhältnissmässig grossen Wanddicke. —

Die specif. Wärme von Flüssigkeiten ist nur bei constanter und zwar atmosphärischer Pressung direct bestimmt worden. Diese specif. Wärme c_p wächst mit der Temperatur, insbesondere bei Wasser nach Regnault gemäss der empirischen Formel:

$$c_p = 1 + 0{,}00004\, t + 0{,}0000009\, t^2 \ldots\ldots\ldots\ 6.$$

Unter der Voraussetzung, dass diese Beziehung zwischen c_p und t nicht nur bei atmosphärischer, sondern auch bei irgend einer anderen constanten Pressung mit genügender Annäherung gilt, lässt sich daraus die specif. Wärme bei constantem Volumen berechnen. Nach der zweiten Hauptgleichung — §. 15, Gl. (12) — ist nämlich

$$c_v = c_p - AT \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Darin ist für Wasser nach obiger Gleichung (2)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a v_4 = 0{,}001\, a$$

und p in $\frac{\partial p}{\partial t}$ ist in Kgr. pro Quadratm. ausgedrückt vorausgesetzt; werden aber unter $\frac{\partial p}{\partial t}$ die zuvor berechneten, auf 1 Atm. als Einheit der Pressungen bezogenen Tabellenwerthe verstanden, so ist $10333 \frac{\partial p}{\partial t}$ statt $\frac{\partial p}{\partial t}$ zu setzen. Dadurch wird mit $A = \frac{1}{424}$ für Wasser

$$c_v = c_p - \frac{T}{424}\, 10{,}333\, a \frac{\partial p}{\partial t} = c_p - 0{,}02437\, Ta \frac{\partial p}{\partial t} \ldots\ 7$$

Nach diesen Gleichungen (6) und (7) sind in der folgenden Tabelle die Werthe von c_p und c_v berechnet worden nebst den entsprechenden Verhältnissen $\frac{c_p}{c_v}$ unter Benutzung der Werthe von a und $\frac{\partial p}{\partial t}$ in der 3ten und 5ten Columne.

t	$\frac{v}{v_4}$	$\alpha . 10^7$	$\beta . 10^7$	$\frac{\partial p}{\partial t}$	c_p	c_v	$\frac{c_p}{c_v}$
− 5	1,000709	− 1711	503	− 3,40	0,99982	0,9960	1,0038
0	1,000137	− 646	503	− 1,28	1	0,9994	1,0006
5	1,000006	140	500	0,28	1,00022	1,0002	1,0000
10	1,000271	904	490	1,84	1,00049	0,9993	1,0012
15	1,000892	1560	476	3,28	1,00080	0,9972	1,0036
20	1,001813	2108	464	4,53	1,00116	0,9943	1,0069
25	1,002982	2549	457	5,57	1,00156	0,9912	1,0104
30	1,004344	2882	450	6,38	1,00201	0,9884	1,0137
35	1,005916	3417	446	7,61	1,00250	0,9830	1,0199
40	1,007730	3837	443	8,60	1,00304	0,9779	1,0257
45	1,009751	4241	442	9,51	1,00362	0,9724	1,0321
50	1,011968	4628	441	10,38	1,00425	0,9664	1,0391
60	1,016963	5351	441	11,94	1,00564	0,9538	1,0544
70	1,022648	6006	441	13,32	1,00721	0,9403	1,0711
80	1,028953	6594	441	14,52	1,00896	0,9266	1,0889
90	1,035813	7114	441	15,57	1,01089	0,9129	1,1073
100	1,043159	7567	441	16,45	1,01300	0,8999	1,1257

Bei späteren Anwendungen werden auch solche specif. Wärmen des Wassers in Betracht kommen, welche anderen Voraussetzungen, als $p =$ *Const.* oder $v =$ *Const.* entsprechen. Ist dabei das Gesetz der Zustandsänderung gegeben durch das Verhältniss $= \frac{dp}{dt}$ der gleichzeitigen elementaren Aenderungen von p und t, so folgt aus der Gleichung

$$dQ = c_p\, dt - AT \frac{\partial v}{\partial t} dp \text{ (§. 15, Gl. 10)}$$

die entsprechende specif. Wärme

$$c = \frac{dQ}{dt} = c_p - AT \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dp}{dt}.$$

Dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem obigen, aus der zweiten Hauptgleichung hervorgegangenen Ausdrucke von c_v nur dadurch, dass das allgemeine Differentialverhältniss $\frac{dp}{dt}$ an die Stelle des der besonderen Voraussetzung $dv = 0$ entsprechenden partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial p}{\partial t}$ getreten ist; somit ergiebt sich auch, wenn p in Atmosphären ausgedrückt wird, analog Gl. (7)

$$c = c_p - 0{,}02437\, T \alpha \frac{dp}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (8).$$

Besondere Erwähnung verdient der Fall, dass die Zustandsänderung **ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme** stattfindet. Hierfür ist nach §. 15, Gl. (8)

$$dQ = c_p \frac{\partial t}{\partial v} dv + c_v \frac{\partial t}{\partial p} dp = 0, \text{ also } \frac{dp}{dv} = -\frac{c_p}{c_v} \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial p}{\partial t}$$

oder wegen $\frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial p} = -1$

$$\frac{dp}{dv} = \frac{c_p}{c_v} \frac{\partial p}{\partial v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9.$$

Diese allgemein gültige Gleichung drückt das bemerkenswerthe Gesetz aus, dass für denselben Punkt oder Zustand (v, p) sich die Richtungstangenten der adiabatischen und der isothermischen Curve zu einander verhalten wie die specif. Wärmen c_p und c_v, ein Gesetz, welches für Gase schon früher in §. 20 unter 3) durch die Gleichung $tg\varphi_n = n tg\varphi_1$ ausgedrückt worden war. Für Flüssigkeiten kann mit Rücksicht auf obige Gl. (3) auch geschrieben werden

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{1}{\beta v} \frac{c_p}{c_v}, \text{ wenn } p \text{ in Atm.,}$$

$$= -\frac{10333}{\beta v} \frac{c_p}{c_v}, \text{ wenn } p \text{ in Kgr. pro Quadratm.}$$

ausgedrückt wird. Damit ergiebt sich z. B. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einer Flüssigkeit nach §. 21, Gl. (6)

$$w = \sqrt{\frac{10333\, gv}{\beta} \frac{c_p}{c_v}} = \sqrt{\frac{101367\, v}{\beta} \frac{c_p}{c_v}} \text{ mit } g = 9{,}81$$

und insbesondere in Wasser mit $v = v_4 \frac{v}{v_4} = 0{,}001 \frac{v}{v_4}$

$$w = \sqrt{\frac{101{,}367}{\beta} \frac{v}{v_4} \frac{c_p}{c_v}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 10$$

Versuche ergaben für Seine-Wasser bei $t = 15^0$ 60^0
$w = 1437$ 1725 Mtr.,
während aus Gl. (10) sich ergiebt: $w = 1463$ 1570 „
mit den der obigen Tabelle entnommenen Werthen von $\frac{v}{v_4}$, β und $\frac{c_p}{c_v}$. —

In Betreff solcher Zustandsänderungen des Wassers ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme sind von Joule die Temperaturänderungen $= \Delta t$ beobachtet worden, welche bei verschiedenen Anfangstemperaturen $= t$ durch bestimmte Druckerhöhungen $= \Delta p$ Atm. hervorgebracht wurden. Die entsprechenden Werthe von t, Δp und Δt sind in der folgenden Zusammenstellung angegeben.*

* Nach Zeuner, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, 2. Aufl. S. 557

t	Δp	Δt	(Δt)	$(\Delta t) - \Delta t$
1,2	24,34	— 0,0083°	— 0,0073°	+ 0,0010
5	24,34	0,0044	0,0023	— 0,0021
11,69	24,34	0,0205	0,0192	— 0,0013
18,38	24,34	0,0314	0,0335	+ 0,0021
30	24,34	0,0544	0,0517	— 0,0027
31,37	14,64	0,0394	0,0320	— 0,0074
40,4	14,64	0,0450	0,0431	— 0,0019

Zur Vergleichung dieser Versuchsresultate mit den allgemeinen Formeln der Wärmetheorie und mit den zuvor besprochenen physikalischen Constanten des Wassers kann man bemerken, dass mit $dQ = 0$ auch $c = 0$ ist und somit aus Gl. (8) sich ergiebt:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{0{,}02437\ T\alpha}{c_p},$$

wonach für so geringe Temperaturänderungen, wie sie hier in Frage kommen, auch gesetzt werden kann:

$$\Delta t = \frac{0{,}02437\ T\alpha}{c_p}\,\Delta p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (11).$$

Wenn man darin α nach Gl. (2), c_p nach Gl. (6) berechnet, ergeben sich die Werthe, welche in obiger Zusammenstellung unter der Bezeichnung (Δt) eingetragen sind; die Differenzen $= (\Delta t) - \Delta t$ erscheinen nicht grösser, als sich bei der Schwierigkeit, so kleine Temperaturänderungen zuverlässig zu messen, sowie auch mit Rücksicht darauf erwarten lässt, dass die zu Grunde liegende Voraussetzung, es seien α und c_p bei jeder constanten Pressung dieselben Functionen der Temperatur, vermuthlich nicht ganz richtig ist.

§. 23. Verhalten fester Körper.

Die Ausdehnung fester Körper durch die Wärme ist, wie die der Flüssigkeiten, auch nur bei constanter atmosphärischer Pressung direct bestimmt worden. Bezeichnen v_0 und v die specif. Volumina bei den Temperaturen 0 und t, so ist $\frac{v}{v_0}$ eine so mit t wachsende Temperaturfunction, dass im Allgemeinen

$$\frac{v}{v_0} = 1 + at + bt^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

gesetzt werden kann, unter a und b positive, von der Körperart abhängige

Coefficienten verstanden. Es ist dann der **Ausdehnungscoefficient** bei der Temperatur t

$$\alpha = \frac{1}{v_0} \frac{\partial v}{\partial t} = a + 2bt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

So fand z. B. Matthiessen*

für Zink:	$a.10^8$	$= 8222$,	$b.10^{10}$	$= 700$
„ Blei:	„	$= 8177$,	„	$= 222$
„ Zinn:	„	$= 6100$,	„	$= 789$
„ Silber:	„	$= 5426$,	„	$= 405$
„ Kupfer:	„	$= 4443$,	„	$= 555$
„ Gold:	„	$= 4075$,	„	$= 336$
„ Platin:	„	$= 2554$,	„	$= 104$.

Bezeichnet α' den mittleren Ausdehnungscoefficienten für das Temperatur-Intervall 0 bis t, so ist

$$\alpha' = a + bt \text{ entsprechend der Gl. } \frac{v}{v_0} = 1 + \alpha' t \quad \ldots\ldots (3);$$

kennt man α' für verschiedene Werthe von t, so kann man a und b, somit auch α nach Gl. (2) für bestimmte Temperaturen berechnen. Ist z. B. für Glas von 0 bis 100°, 0 bis 200°, 0 bis 300°

$$\alpha'.10^8 = 2760 \qquad 2907 \qquad 3132,$$

so kann in Gl. (1) und (2) gesetzt werden:

$$a.10^8 = 2561 \text{ und } b.10^{10} = 186.$$

In den meisten Fällen ist nur der mittlere Ausdehnungscoefficient zwischen 0 und 100° bestimmt worden, und zwar als linearer Ausdehnungscoefficient, welcher indessen klein genug ist, um daraus den hier in Rede stehenden cubischen Ausdehnungscoefficienten einfach durch Multiplication mit 3 abzuleiten, wenigstens für solche Körper, welche als isotrop gelten können. —

Die **Zusammendrückbarkeit** fester Körper bei constanter Temperatur ist mit ihrer Ausdehnbarkeit durch äusseren Zug principiell identisch und wird durch den **Elasticitätsmodul** ausgedrückt. Ist letzterer für einen **isotropen Körper** $= E$, hat ferner m die in vorigem §. erklärte Bedeutung und sind nach drei zu einander senkrechten Richtungen Δp_1, Δp_2, Δp_3 die Aenderungen der Pressung, ε_1, ε_2, ε_3 die entsprechenden (positiven oder negativen) Ausdehnungen, so ist**

---

* Hirzel und Gretschel: Jahrbuch der Erfindungen und Fortschritte auf den Gebieten der Physik und Chemie etc., Jahrg. 1867, S. 116.

** Vergl. des Verfassers „Festigkeitslehre“, Nr. 227.

$$-E\varepsilon_1 = \Delta p_1 - \frac{\Delta p_2 + \Delta p_3}{m}$$

$$-E\varepsilon_2 = \Delta p_2 - \frac{\Delta p_3 + \Delta p_1}{m}$$

$$-E\varepsilon_3 = \Delta p_3 - \frac{\Delta p_1 + \Delta p_2}{m}$$

und die verhältnissmässige Volumenänderung

$$\frac{\Delta v}{v} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Sind die Aenderungen Δp nach allen Richtungen gleich, so dass auch p selbst nach allen Richtungen beständig gleich bleibt, so folgt aus obigen Gleichungen:

$$-E\frac{\Delta v}{v} = 3\left(1 - \frac{2}{m}\right)\Delta p,$$

wonach nun

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p} = \frac{1}{v}\frac{\Delta v}{\Delta p} = -\frac{3}{E}\frac{m-2}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

gesetzt werden kann. —

Die specif. Wärme fester Körper ist meist nur $= c_p$ für constante atmosphärische Pressung und für mittlere Temperaturen experimentell bestimmt worden. Die specif. Wärme c_v für constantes Volumen kann daraus vermittels der Gl. (16) in §. 15 mit Rücksicht auf obige Gleichungen (2) und (4) berechnet werden, nämlich vermittels der Gleichung

$$c_p - c_v = AT\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}{-\frac{\partial v}{\partial p}} = AT\frac{v_0^2}{v}\cdot\frac{1}{3}\frac{m}{m-2}\,\alpha^2 E$$

oder mit
$$\frac{v_0^2}{v} = \frac{v_0}{1+\alpha' t} = \frac{1}{1000\,\delta(1+\alpha' t)},$$

unter δ die Dichtigkeit des Körpers bei 0° bezüglich auf Wasser im Zustande grösster Dichtigkeit verstanden,

$$c_p - c_v = \frac{AT}{3000}\frac{m}{m-2}\frac{\alpha^2 E}{\delta(1+\alpha' t)} \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Der Elasticitätsmodul E ist für verschiedene feste Körper theils etwas wachsend, theils etwas abnehmend bei wachsender Temperatur gefunden

worden.* Betrachtet man E und m als Constante, so würde $c_p - c_v$ nach Gl. (5) mit t zunehmen, weil α mit t wächst und α' für feste Körper viel kleiner ist, als für Luft, also auch

$$\frac{T}{1+\alpha' t} = 273 \frac{1+0{,}00366\,t}{1+\alpha' t}$$

mit t wächst. Indessen kann auch m sich mit t ändern, so dass der resultirende Einfluss der Temperatur auf die Differenz $c_p - c_v$ einstweilen nicht sicher anzugeben ist. Wenn c_v anderweitig bestimmt worden wäre, könnte Gl. (5) zur Berechnung des Coefficienten m dienen.

So berechnet z. B. Zeuner,** indem er $1 : A = 424$ und allgemein $m = 3$ setzt, für Silber mit

$$T = 273;\ \delta = 10{,}511;\ \alpha' = 0{,}000057231$$
$$E = 7357 . 1000^2;\ c_p = 0{,}05701$$

die specif. Wärme $c_v = 0{,}05553$; also $\frac{c_p}{c_v} = 1{,}0266$, während Edlund auf anderem Wege fand: $\frac{c_p}{c_v} = 1{,}0203$. Legt man dieses letztere Verhältniss bei übrigens denselben Annahmen zu Grunde, so ergiebt sich $c_v = 0{,}05588$ und aus Gl. (5): $m = 3{,}54$. —

Für eine Zustandsänderung ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme ist mit Rücksicht auf Gl. (4) nach der allgemeinen Gleichung (9) in vorigem §.

$$\frac{dp}{dv} = \frac{c_p}{c_v}\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{1}{3}\frac{m}{m-2}\frac{E}{v}\frac{c_p}{c_v} \quad \ldots\ldots\ldots\ 6$$

und nach §. 15, Gl. (10) mit Rücksicht auf Gl. (2)

$$\frac{dt}{dp} = \frac{AT}{c_p}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{AT v_0 \alpha}{c_p} \quad \ldots\ldots\ldots\ 7$$

* Bei Metallen nimmt nach Wertheim der Coefficient E im Allgemeinen mit wachsender Temperatur ab, in einigen Fällen (Eisen, Stahl, Silber) Anfangs zu und erst bei höheren Temperaturen (über 100°) ab. Für Eisen, Kupfer und Messing fand indessen Kohlrausch E beständig nur abnehmend mit wachsendem t, und zwar nach der Formel

$$E = E_0 (1 - \alpha t - \beta t^2)$$

mit folgenden Werthen von α und β:

	α	β
Eisen	0,000447	0,00000052
Kupfer	0,000520	0,00000028
Messing	0,000428	0,00000136

** Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, 2. Aufl., S. 553.

Diese Gleichungen setzen wesentlich voraus, dass die Aenderung der Pressung nach allen Richtungen im Körper gleich ist. Fände aber nur eine einseitige Pressungsänderung $= \Delta p_1$ statt, z. B. nach der Längenrichtung eines stabförmigen Körpers, dessen Querschnitte sich ungehindert ausdehnen oder zusammenziehen können, so wäre nach obigen Gleichungen für ε_1, ε_2 und ε_3 mit $\Delta p_2 = \Delta p_3 = 0$:

$$-E\frac{\Delta v}{v} = -E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \left(1 - \frac{2}{m}\right)\Delta p_1$$

statt

$$-E\frac{\Delta v}{v} = 3\left(1 - \frac{2}{m}\right)\Delta p.$$

In den Gleichungen (6) und (7) ist deshalb im vorliegenden Falle $dp = \frac{1}{3} dp_1$ zu setzen, wodurch

$$\frac{dp_1}{dv} = -\frac{m}{m-2}\frac{E}{v}\frac{c_p}{c_v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\frac{dt}{dp_1} = \frac{1}{3}\frac{ATv_0\,\alpha}{c_p} = \frac{ATv_0\,\alpha_1}{c_p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

wird, unter α_1 den linearen Ausdehnungscoefficienten verstanden.

Danach ergiebt sich z. B. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einem stabförmigen Körper, wenn in der allgemeinen Gl. (6), §. 21 für $\frac{dp}{dv}$ der Werth von $\frac{dp_1}{dv}$ nach Gl. (8) gesetzt wird,

$$w = \sqrt{-gv^2\frac{dp_1}{dv}} = \sqrt{g\frac{m}{m-2}Ev\frac{c_p}{c_v}} = \sqrt{g\frac{m}{m-2}\frac{E}{\gamma}\frac{c_p}{c_v}} \ .\ (10),$$

unter γ das specif. Gewicht des Körpers verstanden. Eine zuverlässige Berechnung von w kann nach dieser Formel allerdings kaum stattfinden, weil es fraglich ist, mit welcher Schnelligkeit die periodischen Erweiterungen und Zusammenziehungen der Querschnitte den Pressungsänderungen folgen, in welchem Grade sie also überhaupt stattfinden und welcher Werth somit dem Coefficienten m beizulegen ist.

§. 24. Uebergang aus der festen in die flüssige Aggregatform.

Wenn ein fester Körper im Schmelzen oder ein flüssiger in der Erstarrung begriffen ist, so befindet er sich in einem Grenzzustande, welcher durch die Pressung allein oder durch die Temperatur allein vollkommen bestimmt ist. Pressung und Temperatur bedingen sich also gegenseitig,

und wenn p und t, $p + dp$ und $t + dt$ zusammengehörige Werthe derselben für den fraglichen Grenzzustand sind, so kann es der Fall sein, dass dp und dt gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben. In dieser Hinsicht wurde schon früher bei der Entwickelung des Princips der Aequivalenz der Verwandlungen in §. 14 hervorgehoben, dass, sofern die Schmelzung bei constanter Temperatur stets mit Wärmeaufnahme des schmelzenden Körpers verbunden ist, die Allgemeingültigkeit jenes Princips und somit der darauf beruhenden Gleichungen in §. 15 nothwendig einen positiven oder negativen Werth des Verhältnisses $\frac{dt}{dp}$ erfordert, jenachdem das specif. Volumen beim Schmelzen wächst oder abnimmt. Es ist aber von Interesse, für dieses Verhältniss einen allgemeinen Ausdruck zu entwickeln, welcher auch seinen absoluten Zahlenwerth in bestimmten Fällen zu berechnen gestattet.

Betrachtet man zu dem Ende 1 Kgr. eines bei constanter Temperatur t und entsprechender Pressung p in der Schmelzung begriffenen Körpers, so ist in einem Augenblicke, in welchem y Kgr. flüssig, also $(1-y)$ Kgr. fest sind,

$$v = w + y\Delta \qquad (1)$$

das Volumen desselben, wenn w das specif. Volumen in der festen, $w + \Delta$ dasselbe in der flüssigen Aggregatform bedeutet. Indem hier w und Δ nur von t oder p abhängen, ist für eine unendlich kleine Zustandsänderung bei constanten Werthen von t und p

$$dv = \Delta\, dy \qquad (2)$$

und es ist also die Wärmemenge dQ, welche behufs dieser unendlich kleinen Zustandsänderung dem Körper mitzutheilen ist, nach §. 15, Gl. (9) mit $dt = 0$ und $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{dt}$

$$dQ = AT\frac{dp}{dt}\,dv = AT\Delta\frac{dp}{dt}\,dy.$$

Bezeichnet aber r die Schmelzwärme, d. h. die Wärmemenge, welche zur Schmelzung von 1 Kgr. des Körpers bei der Temperatur t oder der entsprechenden Pressung p erfordert wird, so ist, da die unendlich kleine Zustandsänderung hier nur in der Schmelzung von dy Kgr. des Körpers bei constanten Werthen von t und p besteht, auch

$$dQ = r\,dy$$

und aus der Vergleichung beider Ausdrücke von dQ ergiebt sich

$$\frac{dt}{dp} = \frac{AT\Delta}{r} \qquad (3).$$

Die Temperatur $t=0$ oder $T=273$ ist der Definition zufolge diejenige, bei welcher Eis unter atmosphärischer Pressung schmilzt. Setzt man hierfür mit Clausius

$$r=79,\ w=0{,}001087,\ w+\Delta=0{,}001000,$$

also $\Delta=-0{,}000087$, so ist mit $A=\frac{1}{424}$ und wenn p in Atm. statt in Kgr. pro Quadratm. ausgedrückt wird, nach Gl. (3)

$$\frac{dt}{dp}=-\frac{10333.273.0{,}000087}{424.79}=-0{,}00733$$

in sehr guter Uebereinstimmung mit dem durch Versuche von W. Thomson ermittelten Werthe

$$\frac{dt}{dp}=-0{,}0075. -$$

Schliesslich mag bemerkt werden, dass Gl. (3) offenbar allgemein für den Grenzzustand des Ueberganges aus einer in eine andere Aggregatform gilt, dass also auch in der Folge für den Uebergang aus der flüssigen in die Dampfform davon Gebrauch gemacht werden kann, falls nur den Grössen Δ und r die entsprechend modificirten Bedeutungen beigelegt werden.

D. Verhalten der Dämpfe, insbesondere des Wasserdampfes.

§. 25. Gesättigter und überhitzter Dampf; Gemische von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit.

Ein Dampf ist ein luftförmiger Körper, welcher durch Wärmeentziehung oder durch andere im Erfolg gleiche Mittel flüssig gemacht (condensirt werden), sowie umgekehrt aus einer Flüssigkeit durch Wärmemittheilung oder andere im Erfolg gleiche Mittel gebildet werden kann. Ausnahmsweise kann auch ein unmittelbarer Uebergang aus dem Zustande eines festen Körpers in denjenigen eines Dampfes oder umgekehrt stattfinden mit Ueberspringung der diesen Uebergang im Allgemeinen vermittelnden flüssigen Aggregatform.

Erfahrungsmässig kann ein bestimmter Raum von einer gewissen Dampfart bei einer bestimmten Temperatur nur eine bestimmte Menge enthalten, wobei jedoch gleichzeitig luftförmige Körper von anderer Art in demselben Raume enthalten sein können ohne die Capacität desselben für

jene Dampfart durch ihre Gegenwart zu beeinflussen. Ist in solcher Weise ein Raum mit einem Dampfe gesättigt, so heisst dieser selbst **gesättigter Dampf**. Sein specif. Gewicht $\gamma = \frac{1}{v}$ und seine Pressung p sind Maximalwerthe für die betreffende Temperatur t, letztere ist ein Minimalwerth für das betreffende γ oder p. Durch **eine** der Grössen γ, p, t oder v, p t sind die übrigen bestimmt.

Ueberhitzter Dampf ist solcher, für welchen t grösser ist, als für gesättigten Dampf bei demselben γ oder p, oder für welchen γ und p kleiner sind, als für gesättigten Dampf bei demselben t. Bei überhitztem Dampfe ist, ebenso wie bei Gasen und wie im Allgemeinen für jede Zustandsform eines Körpers, nur durch **zwei** der Grössen γ, p, t oder v, p, t die dritte bestimmt.

Der Zustand gesättigten Dampfes ist ein Grenzzustand bezüglich auf den Uebergang in eine andere Aggregatform; je weiter sich ein Dampf von demselben entfernt bei zunehmenden Werthen von t, v oder bei abnehmenden Werthen von γ, p, desto mehr nähert er sich einem anderen Grenzzustande, nämlich dem eines Gases, charakterisirt durch die Gleichung: $pv = Const.\ T$. Nachdem dieser letztere im Vorhergehenden näher besprochen worden ist, mag zunächst der andere Grenzzustand, der eines gesättigten Dampfes untersucht werden, um dann zur Betrachtung der dazwischen liegenden Zustände überhitzten Dampfes überzugehen insoweit es bei den in dieser Hinsicht z. Z. noch mangelhaften experimentellen Grundlagen möglich ist.

Ein Dampf ist immer gesättigt, wenn er im Beharrungszustande oder bei einer stetigen Aenderung des Wärmezustandes mit Flüssigkeit von derselben Art gemischt oder überhaupt in Berührung ist; umgekehrt setzt die Annahme oder Forderung, dass der Dampf bei seinen Zustandsänderungen beständig gesättigt bleiben soll, im Allgemeinen die Berührung mit gleichzeitig vorhandener Flüssigkeit derselben Art voraus. Ist $y : 1 - y$ das Gewichtsverhältniss von Dampf und Flüssigkeit in einem solchen Gemische,
w das specif. Volumen der Flüssigkeit,
$w + \Delta$ dasjenige des Dampfes,
so ist das (mittlere) specif. Volumen des Gemisches:

$$v = w + y\Delta.$$

Diese Gleichung, in welcher w und Δ Functionen der sich gegenseitig bestimmenden Grössen p oder t sind, stellt somit eine Beziehung zwischen v, p, y oder v, t, y dar und soll die **Zustandsgleichung des Gemisches von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit** genannt werden. (Vergl. §. 8.

I. Gesättigter Dampf.

§. 26. Beziehung zwischen Pressung und Temperatur.

Die Beziehung, welche bei gesättigten Dämpfen zwischen ihrer Pressung und Temperatur stattfindet, ist für verschiedene Dampfarten besonders durch umfassende Versuche Regnault's empirisch bestimmt worden,* für gesättigten Wasserdampf auch von Magnus, dessen Versuchsresultate sich mit jenen in sehr guter Uebereinstimmung befinden.

Zur analytischen Darstellung dieser gegenseitigen Abhängigkeit der Grössen p und t sind sehr verschiedene empirische Formeln aufgestellt worden. Regnault wählte nach dem Vorgange Biot's eine Gleichung von der Form:

$$lgp = C + a\alpha^{t-t_0} + b\beta^{t-t_0} \qquad (1),$$

unter lg einen gewöhnlichen Logarithmus für die Basis 10 und unter p die Pressung in Millimetern Quecksilbersäule ausgedrückt verstanden, aus welcher durch Division mit 760 die Pressung in Atmosphären erhalten wird, während letztere durch Multiplication mit 10333 die Pressung in Kgr. pro Quadratm. liefert; t_0 ist die untere Grenze des Temperaturintervalls, für welches die Formel durch entsprechende Wahl der Constanten C, a, b, α, β den Versuchen angepasst werden soll. Zu diesem Zwecke wurde in grossem Maassstabe eine stetige Curve gezeichnet, welcher die zusammengehörigen Versuchswerthe von t und p als Abscissen und Ordinaten möglichst genau entsprachen; das Temperaturintervall $= t_4 - t_0$, für welches die 5 Constanten bestimmt werden sollten, wurde in 4 gleiche Theile

$$\Delta t = t_4 - t_3 = t_3 - t_2 = t_2 - t_1 = t_1 - t_0$$

getheilt, und es wurden dann

zu den Abscissen $t_0 \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4$

die entsprechenden Ordinaten $p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4$

aus der graphischen Darstellung abgegriffen. Hiernach hat man mit den kürzeren Bezeichnungen:

---

* Ueber die Methoden und die Resultate dieser und anderer Versuche Regnault's, auf welche theils im Vorhergehenden schon Bezug genommen wurde, theils im Folgenden noch wiederholt Bezug zu nehmen sein wird, berichtet das Werk: „Relation des expériences entreprises pour déterminer les lois et les données physiques nécessaires au calcul des machines à feu", 1. Band 1847, 2. Band 1862 erschienen.

$$x = \alpha^{\Delta t}\,;\; y = \beta^{\Delta t}$$

gemäss Gl. (1) die folgenden 5 Gleichungen;

$$\left.\begin{aligned} lg p_0 &= C + a + b \\ lg p_1 &= C + ax + by \\ lg p_2 &= C + ax^2 + by^2 \\ lg p_3 &= C + ax^3 + by^3 \\ lg p_4 &= C + ax^4 + by^4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.$$

woraus durch Elimination von C sich ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} lg p_1 - lg p_0 &= q_1 = a(x-1) + b(y-1) \\ lg p_2 - lg p_1 &= q_2 = a(x-1)x + b(y-1)y \\ lg p_3 - lg p_2 &= q_3 = a(x-1)x^2 + b(y-1)y^2 \\ lg p_4 - lg p_3 &= q_4 = a(x-1)x^3 + b(y-1)y^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (3$$

und daraus durch Elimination von a:

$$\begin{aligned} q_1 x - q_2 &= b(y-1)(x-y) \\ q_2 x - q_3 &= b(y-1)(x-y)y \\ q_3 x - q_4 &= b(y-1)(x-y)y^2. \end{aligned}$$

Aus diesen letzteren Gleichungen können b und y gleichzeitig eliminirt werden, und ergiebt sich

$$(q_2 x - q_3)^2 - (q_1 x - q_2)(q_3 x - q_4) = 0$$

oder, übersichtlicher mit Hülfe von Determinanten geschrieben,

$$\begin{vmatrix} q_2 x - q_3, & q_1 x - q_2 \\ q_3 x - q_4, & q_2 x - q_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_2 & q_1 \\ q_3 & q_2 \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} q_1 & q_3 \\ q_2 & q_4 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} q_3 & q_2 \\ q_4 & q_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots (4.$$

Da die Gleichungen (3) unverändert bleiben, wenn x mit y, a mit b vertauscht wird, a und b aber in Gl. (4) nicht vorkommen, so muss sich für y ganz dieselbe Gleichung ergeben, d. h. es sind x und y die beiden Wurzeln der Gleichung (4). Sind dieselben gefunden, so sind die Constanten α und β bestimmt durch

$$lg\,\alpha = \frac{lg\,x}{\Delta t}\,;\;\; lg\,\beta = \frac{lg\,y}{\Delta t}\,;$$

aus den zwei ersten der Gleichungen (3) folgt dann

$$a = \frac{q_1 y - q_2}{(x-1)(y-x)}\,;\;\; b = \frac{q_1 x - q_2}{(y-1)(x-y)}\,;$$

endlich aus der ersten der Gleichungen (2)

$$C = lg p_0 - a - b.$$

Auf solche Weise sind aus den Regnault'schen Versuchen insbesondere für gesättigten Wasserdampf die folgenden Gleichungen abgeleitet worden, in der von Zeuner gewählten, für die numerische Rechnung bequemeren Form geschrieben.

Für $t = 0$ bis 100^0 ist

$$\left.\begin{array}{l} lg p = 4{,}739371 - num.\, lg(0{,}611741 - 0{,}00327446\, t) \\ \qquad + num.\, lg(-1{,}868009 + 0{,}00686494\, t); \\ \text{für } t = 100^0 \text{ bis } 200^0 \text{ ist} \\ lg p = 6{,}264035 - num.\, lg(0{,}659312 - 0{,}00165614\, t) \\ \qquad - num.\, lg(0{,}020760 - 0{,}00595071\, t) \end{array}\right\} \ldots (5).$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Constanten in der Formel für $t < 100^0$ von A. Moritz neu berechnet wurden, weil sich in die betreffenden Formeln Regnault's ein Fehler eingeschlichen hatte.* Die nach diesen Formeln berechneten Werthe von p, denen in der weiterhin mitgetheilten Tabelle durch Division mit 760 noch die in Atmosph. ausgedrückten Pressungen beigefügt sind, weichen indessen nur zwischen $t = 40^0$ und $t = 100^0$ von den Regnault'schen Tabellenwerthen im 1. Bande der „Relation des expériences etc." etwas ab. —

Für die weiteren Untersuchungen sind ferner die Werthe des Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ von Wichtigkeit, welche aus der dem betreffenden Dampfe entsprechenden Gl. (1) wie folgt abgeleitet werden können. Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$k = ln\, 10 = 2{,}302585,$$

so ergiebt sich

$$ln p = kC + ka\alpha^{t-t_0} + kb\beta^{t-t_0}$$

* Entsprechende Formeln für gesättigte Dämpfe von Aether, Alkohol, Aceton (diese von Zeuner in ihren Constanten corrigirt), Chloroform, Chlorkohlenstoff, Schwefelkohlenstoff, Quecksilber und Kohlensäure: siehe Zeuner's „Grundzüge der mech. Wärmetheorie", 2. Aufl., S. 253. Unter allen diesen entsprechen den ges. Dämpfen von Quecksilber die kleinsten, denen der Kohlensäure die grössten Werthe von p bei gleichen Werthen von t, oder jenen die grössten und diesen die kleinsten Werthe von t bei gleichen Werthen von p.

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = ka.\ln\alpha.\alpha^{t-t_0} + kb.\ln\beta.\beta^{t-t_0}$$

$$= k^2a.\lg\alpha.\alpha^{t-t_0} + k^2b.\lg\beta.\beta^{t-t_0},$$

wenn wieder mit lg ein Briggs'scher Logarithmus bezeichnet wird, also

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = m\alpha^{t-t_0} + n\beta^{t-t_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

worin die Coefficienten

$$m = k^2a.\lg\alpha \text{ und } n = k^2b.\lg\beta$$

mit Hülfe der bekannten Werthe von a, b, α, β berechnet werden können. Für den Gebrauch ist es indessen bequemer, die Logarithmen der beiden Glieder auf der rechten Seite von Gl. (6) als lineare Functionen von t zu berechnen, wie es Zeuner für die in der vorigen Anmerkung genannten Dämpfe gethan hat. Danach ist insbesondere für Wasserdampf von $t = 0$ bis 100^0

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = num.\lg(-1{,}148688 - 0{,}00327446\,t)\\
&\qquad + num.\lg(-3{,}306941 + 0{,}00686494\,t)\\
&\text{von } t = 100^0 \text{ bis } 200^0:\\
&\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} = num.\lg(-1{,}397160 - 0{,}00165614\,t)\\
&\qquad + num.\lg(-1{,}480240 - 0{,}00595071\,t)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (7).$$

Hiernach sind die Werthe von $\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$ in der folgenden Tabelle berechnet; sie sind unabhängig von der Einheit, in welcher p ausgedrückt ist. Die Tabelle ist der 2. Aufl. von Zeuner's „Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie“ entnommen. Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen sind indessen für $t = 30^0$ bis 50^0 (zwischen welchen Grenzen die Temperatur im Condensator einer Dampfmaschine zu liegen pflegt) die Werthe von p für von 1^0 zu 1^0 wachsende Temperaturen eingeschaltet worden, unter 40^0 der Regnault'schen, über 40^0 der corrigirten Tabelle von Moritz* entnommen.

---

* Bulletin physico-mathém. de l'Académie de St. Pétersbourg. t. XIII, p. 41.

t	p Millim. Quecksilberhöhe.	p Atm.	$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$	t	p Millim. Quecksilberhöhe.	p Atm.	$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}$
0	4,600	0,0061	0,071502	65	186,94	0,246	0,044876
5	6,534	0,0086	0,068915	70	233,08	0,307	0,043380
10	9,165	0,0121	0,066429	75	288,50	0,380	0,041953
15	12,699	0,0167	0,064041	80	354,62	0,467	0,040594
20	17,391	0,0229	0,061746	85	433,00	0,570	0,039300
25	23,550	0,0310	0,059542	90	525,39	0,691	0,038072
30	31,548	0,0415	0,057427	95	633,69	0,834	0,036907
31	33,406	0,0440	—	100	760,00	1,000	0,035775
32	35,359	0,0465	—	105	906,41	1,193	0,034701
33	37,411	0,0492	—	110	1075,37	1,415	0,033674
34	39,565	0,0521	—	115	1269,41	1,670	0,032691
35	41,827	0,0550	0,055397	120	1491,28	1,962	0,031750
36	44,201	0,0582	—	125	1743,88	2,295	0,030848
37	46,691	0,0614	—	130	2030,28	2,671	0,029982
38	49,302	0,0649	—	135	2353,73	3,097	0,029152
39	52,039	0,0685	—	140	2717,63	3,576	0,028355
40	54,906	0,0722	0,053449	145	3125,55	4,113	0,027590
41	57,909	0,0762	—	150	3581,23	4,712	0,026854
42	61,054	0,0803	—	155	4088,56	5,380	0,026146
43	64,345	0,0847	—	160	4651,62	6,121	0,025465
44	67,789	0,0892	—	165	5274,54	6,940	0,024809
45	71,390	0,0939	0,051582	170	5961,66	7,844	0,024177
46	75,156	0,0989	—	175	6717,43	8,839	0,023568
47	79,091	0,1041	—	180	7546,39	9,929	0,022981
48	83,203	0,1095	—	185	8453,23	11,12	0,022414
49	87,497	0,1151	—	190	9442,70	12,42	0,021866
50	91,980	0,1210	0,049794	195	10519,63	13,84	0,021337
55	117,475	0,1546	0,048081	200	11688,96	15,38	0,020826
60	148,786	0,1958	0,046443				

Bei den technischen Anwendungen wird der Zustand gesättigten Wasserdampfes gewöhnlich nicht durch seine Temperatur charakterisirt, sondern durch seine Pressung (seine Spannung oder seinen Druck, welche Bezeichnungen hierbei als gleichbedeutend mit Pressung üblich sind), die durch Manometer gemessen wird. Mit Hülfe der von Moritz controlirten Tabelle Regnault's der nach regelmässig wachsenden Werthen von t geordneten Werthe von p hat deshalb Zeuner durch Interpolation eine Tabelle entworfen, welche umgekehrt die zu regelmässig wachsenden Werthen von p gehörigen Temperaturen t des gesättigten Wasserdampfes enthält. Diese Tabelle folgt später (§. 29), nachdem die Bedeutungen und Berechnungsweisen der übrigen darin noch enthaltenen Grössen erklärt sein werden.

§. 27. Verdampfungswärme.

Unter der Verdampfungswärme einer Flüssigkeit für eine gewisse Temperatur t wird nach der von Clausius eingeführten Bezeichnung die Wärmemenge verstanden, welche ihr zur Verwandlung in gesättigten Dampf von derselben Temperatur t mitgetheilt werden muss, wenn dabei der specif. äussere Druck constant = derjenigen Pressung p ist, welche der Temperatur t des betreffenden gesättigten Dampfes entspricht; sie ist dieselbe Grösse, für welche in der Physik die (im Sinne der mechanischen Wärmetheorie jedoch weniger passend gewordene) Bezeichnung als latente oder gebundene Wärme des gebildeten Dampfes gebräuchlich ist. Diese Verdampfungswärme pro 1 Kgr. der betreffenden Flüssigkeit, also die specif. Verdampfungswärme derselben, soll in der Folge mit dem Buchstaben r bezeichnet werden. Sie ist eine für verschiedene Flüssigkeiten verschiedene Function von t, oder auch von p mit Rücksicht auf die Beziehung, welche nach vorigem §. zwischen t und p stattfindet.

Die Grösse r ist besonders von Regnault für verschiedene Flüssigkeiten und für verschiedene Werthe von t oder p bestimmt worden, und zwar mittelbar durch die Messung der Wärmemenge, welche gesättigtem Dampfe von der Pressung p und von entsprechender Temperatur t pro 1 Kgr. entzogen werden musste, um denselben unter constantem specif. äusseren Drucke = p zu Flüssigkeit von der Temperatur $t_0 < t$ zu condensiren. Diese Wärmemenge, welche auch derjenigen gleich ist, die umgekehrt einem Kilogramm Flüssigkeit von der Temperatur t_0 mitgetheilt werden muss, um sie bei constanter Pressung p in gesättigten Dampf von dieser Pressung zu verwandeln, besteht aus zwei Theilen; sie ist, unter c_p die specif. Wärme der Flüssigkeit für constante Pressung p verstanden,

$$Q_0 = \int_{t_0}^{t} c_p\, dt + r = \int_{0}^{t} c_p\, dt - \int_{0}^{t_0} c_p\, dt + r = q - q_0 + r.$$

Indem nun q durch besondere Versuche (Mischungsversuche) als Function von t bestimmt wurde, zunächst freilich nur für constante atmosphärische Pressung, für welchen Fall aber die Werthe von q ebenso wie die daraus abgeleiteten Werthe von

$$c_p = \frac{dq}{dt}$$

wegen der geringen Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten von den be-

treffenden Werthen für andere constante Pressungen kaum merklich abweichen werden, so konnte danach auch q_0 in jedem Falle und somit auch die von **Regnault** so genannte **Gesammtwärme**

$$Q = Q_0 + q_0 = q + r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

bestimmt werden, d. h. die Wärme, welche 1 Kgr. einer gewissen Flüssigkeit von 0° mitgetheilt werden muss, um sie bei constanter Pressung p in gesättigten Dampf von dieser Pressung oder von entsprechender Temperatur t zu verwandeln. Die Wärmemenge q, welche dazu erfordert wird, 1 Kgr. Flüssigkeit als solche bei constanter Pressung von 0 bis t^0 zu erwärmen, besteht aus dem Ueberschuss der Körperwärme der Flüssigkeit bei der Temperatur t über dieselbe bei der Temperatur 0 und aus dem (übrigens viel kleineren) Wärmewerthe der Expansionsarbeit, welche bei der Temperaturerhöhung und entsprechenden Ausdehnung von der Flüssigkeit verrichtet wird; von **Regnault** wurde sie als ein Ausdruck von der Form

$$at + bt^2 + ct^3$$

für die von ihm untersuchten Flüssigkeiten darstellbar gefunden. Insbesondere für **Wasser** ist zu setzen:

$$q = t + 0{,}0000\,2\,t^2 + 0{,}000\,000\,3\,t^3 \quad \ldots\ldots\ldots (2),$$

nach welcher Formel die in der Tabelle, §. 29, enthaltenen Werthe von q berechnet sind, und woraus sich die in §. 22 schon angeführte Gleichung

$$\frac{dq}{dt} = c_p = 1 + 0{,}0000\,4\,t + 0{,}000\,000\,9\,t^2 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

ergiebt. Die Gesammtwärme Q fand **Regnault** im Allgemeinen (ausser für Alkohol) als ganze Function zweiten Grades von t ausdrückbar:

$$Q = a + bt + ct^2;$$

für **Wasserdampf** genügte schon eine lineare Function zu einer guten Uebereinstimmung der danach berechneten mit den Versuchswerthen, nämlich

$$Q = 606{,}5 + 0{,}305\,t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Durch q und Q ist nun auch die specif. Verdampfungswärme

$$r = Q - q$$

bestimmt, insbesondere für **Wasser**

$$r = 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}0000\,2\,t^2 - 0{,}000\,000\,3\,t^3 \quad \ldots\ldots (5).$$

Die Glieder mit t^2 und t^3 sind in dieser Formel von untergeordneter Bedeutung, so dass man näherungsweise auch r wie Q als lineare Function von t ausdrücken kann. Dabei ist es für die meisten Anwendungen am angemessensten, die Constanten a und b dieser vereinfachten Formel

$$r = a - bt$$

so zu wählen, dass sie besonders in der Nähe von $t = 100^0$ den thatsächlichen Verhältnissen möglichst genau entspricht. Indem sich aber aus ihr mit Rücksicht auf Gl. (4) ergiebt:

$$q = Q - r = 606,5 - a + (0,305 + b)\, t,$$

also $c_p = \frac{dq}{dt} = 0,305 + b$,

während für $t = 100$ nach Gl. (3): $c_p = 1,013$ ist, so kann $b = 1,013 - 0,305 = 0,708$, also

$$r = a - 0,708\, t$$

gesetzt werden. Für $t = 100$ ist nach Gl. (5): $r = 536,5$, nach Regnault's Versuchen aber genauer $r = 536,2$; hiernach kann $a = 536,2 + 70,8 = 607$ gesetzt werden, und ergiebt sich so schliesslich die von Clausius vorgeschlagene einfachste Formel der specif. Verdampfungswärme:

$$r = 607 - 0,708\, t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Ebenso wie die Wärmemenge q ist nun auch die specif. Verdampfungswärme r als aus zwei Theilen bestehend zu betrachten, welche beziehungsweise dem Zuwachse an Körperwärme und dem Wärmewerthe der Expansionsarbeit bei der Verdampfung unter constantem specif. äusseren Drucke p gleich sind; sie mögen als innere und äussere specif. Verdampfungswärmen unterschieden werden. Letztere ist, unter Δ die Zunahme des specif. Volumens bei der Verdampfung verstanden (§. 25), einfach $= Ap\Delta$, also

$$r = \varrho + Ap\Delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7),$$

wenn mit ϱ die innere specif. Verdampfungswärme bezeichnet wird. Diese beiden Bestandtheile von r brauchen nicht durch weitere Versuche empirisch bestimmt zu werden; vielmehr ergiebt sich für die äussere specif. Verdampfungswärme (welche, im Gegensatz zum Verhältnisse der entsprechenden beiden Bestandtheile von q, durchaus nicht etwa sehr klein im Vergleich mit ϱ ist) ein theoretischer Ausdruck vermittels der allgemeinen Gleichung (3) in §. 24, nämlich

$$Ap\Delta = \frac{pr}{T\frac{dp}{dt}} = \frac{r}{T\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8),$$

wonach dem Vorhergehenden zufolge $\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dt}\text{: siehe vorigen §.}\right)$ die Grösse $Ap\Delta$ für gegebene Werthe von t oder p berechnet werden kann, somit



auch die innere specif. Verdampfungswärme ϱ und überhaupt jeder der drei Summanden, aus welchen nunmehr die Gesammtwärme

$$Q = q + \varrho + Ap\Delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

besteht.

Die Volumenänderungen einer Flüssigkeit als solcher sind immer sehr klein im Vergleich mit denjenigen Aenderungen des Volumens, welche durch die Aenderung der Aggregatform (die Verdampfung der Flüssigkeit oder die Condensation des Dampfes zu Flüssigkeit) bedingt werden. Wenn man demgemäss den zweiten Bestandtheil der Wärmemenge q (den Wärmewerth der Expansionsarbeit bei der Erwärmung der Flüssigkeit von 0 bis t^0 vernachlässigt, so kann diese Grösse q als Ueberschuss der Körperwärme von 1 Kgr. Flüssigkeit bei t^0 über dieselbe bei 0^0 betrachtet und mit Zeuner die specif. Flüssigkeitswärme genannt, ebenso die Grösse $q + \varrho$ als Ueberschuss der Körperwärme von 1 Kgr. gesättigten Dampfes bei t^0 über dieselbe von 1 Kgr. der betreffenden Flüssigkeit bei 0^0 betrachtet und die specif. Dampfwärme genannt werden. —

Aus Gl. (8) folgt

$$\frac{r}{\Delta} = AT\frac{dp}{dt}.$$

Wenn man hiernach die Grösse $\frac{r}{\Delta}$ für verschiedenartige Dämpfe mit Hülfe ihrer nach §. 26 bekannten Werthe von $\frac{dp}{dt}$ berechnet, so findet man sie für gleiche Werthe von p ungefähr gleich gross. Es ist also, weil Δ wenig von $\sigma + \Delta$, d. h. von dem specif. Volumen des Dampfes verschieden ist, bei gleicher Pressung die Verdampfungswärme verschiedener Flüssigkeiten ungefähr proportional dem Volumen des gebildeten Dampfes, oder die specif. Verdampfungswärme umgekehrt proportional der Dampfdichte. Derselbe (zuerst von Despretz aufgestellte) Satz gilt

$$\frac{r}{\Delta} - Ap$$

mpfungswärme. Indessen zeigen sich dass sie nur Beobachtungsfehlern zu- mit jener Despretz'sche Satz als ein rkennen wäre.* —

* r mechanischen Wärmetheorie", 2. Aufl.,

Für den Gebrauch bei numerischen Rechnungen ist nun aber die Gleichung (8) sehr unbequem, und es war wünschenswerth, die Grössen ϱ und $Ap\Delta$ in ähnlicher Weise, wie die Gesammtwärme Q und ihren ersten Bestandtheil q, wo möglich auch als einfache algebraische Functionen von t auszudrücken. Zu dem Ende berechnete Zeuner diejenige jener beiden Grössen, welche bei den betreffenden Aufgaben am häufigsten vorkommt, nämlich

$$\varrho = Q - q - Ap\Delta$$

nach den obigen Gl. (2), (4) und (8) entsprechenden Gleichungen für verschiedenartige Dämpfe und für sehr verschiedene Temperaturen und fand, dass diese Werthe sehr genau durch empirische Formeln von der Form

$$\varrho = a - bt - ct^2$$

wiedergegeben werden konnten. Bei Wasserdämpfen trat dabei noch der günstige Umstand ein, dass das Glied mit t^2 weggelassen werden konnte und trotzdem die Formel, nämlich

$$\varrho = 575{,}4 - 0{,}791\,t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10$$

die beste Uebereinstimmung zeigte für das weite Temperaturintervall $t = 0$ bis 200°. Hiernach ergiebt sich nun bei Einsetzung der Ausdrücke (4) und (10) für Q und ϱ:

$$Ap\Delta = Q - q - \varrho = 31{,}1 + 1{,}096\,t - q \quad \ldots\ldots \quad 11.$$

Nach diesen Gleichungen (10) und (11) unter Benutzung der nach Gl. (2) berechneten Tabellenwerthe von q sind in der Tabelle, §. 29, die Werthe von ϱ und $Ap\Delta$ berechnet worden; letztere stimmen fast genau mit den nach Gl. (8) berechneten Werthen überein. Aus den Tabellenwerthen von q, ϱ und $Ap\Delta$ ergeben sich die entsprechenden Werthe
der specif. Dampfwärme $= q + \varrho$,
der specif. Verdampfungswärme $r = \varrho + Ap\Delta$
und der Gesammtwärme $Q = q + \varrho + Ap\Delta$
so leicht durch Addition, dass es überflüssig gewesen wäre, dieselben in besonderen Columnen der Tabelle einzutragen.

§. 28. Specifisches Gewicht gesättigter Dämpfe.

Aus den nach vorigem §. zu berechnenden Werthen der äusseren specif. Verdampfungswärme ergeben sich durch Division mit Ap (p in Kgr pro Quadratm. ausgedrückt) die Werthe von

$$\Delta = \frac{1}{Ap}(Ap\Delta) = \frac{424}{p}(Ap\Delta) \text{ Cubikm. pro Kgr.} \quad \ldots\ldots \quad 1.$$

welche für Wasserdampf in der Tabelle, §. 29, eingetragen sind. Daraus folgt dann

das specif. Volumen des Dampfes: $v = w + \Delta$

und das specif. Gewicht: $\gamma = \frac{1}{w + \Delta}$ Kgr. pro Cubikm.

Dabei ist das specif. Volumen w der Flüssigkeit streng genommen mit den sich entsprechenden Werthen von p und t etwas veränderlich und kann nach §. 22 berechnet werden. Bezeichnet nämlich

$w_{p,t}$ dieses specif. Volumen für die Pressung p und die Temperatur t,

$w_{1,t}$ das specif. Volumen bei atmosph. Pressung und derselben Temperatur t,

so ist nach Gl. (3) in §. 22

$$\frac{\partial w_{p,t}}{\partial p} = -\beta w_{1,t}.$$

Daraus folgt, wenn p in Atm. ausgedrückt und der Compressionscoefficient β constant vorausgesetzt wird,

$$w_{p,t} = w_{1,t}\left[1 - \beta(p-1)\right],$$

worin $w_{1,t}$ eine für verschiedene Flüssigkeiten verschiedene Function von t ist. Setzt man insbesondere für Wasser nach §. 22, Gl. (1)

$$w_{1,t} = 0{,}001\,(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)$$

und nimmt die dort für $t > 32^0$ angeführten Werthe von a_0, a_1, a_2, a_3 bis zu $t = 200^0$ als gültig an, setzt man ferner

$$\beta = 0{,}000045,$$

so ist für $t = 200^0$, also $p = 15{,}4$ Atm. (siehe die Tabelle in §. 26), das specif. Volumen des Wassers

$$\begin{aligned} w &= 0{,}001 \,.\, 1{,}1285\,(1 - 0{,}000045 \,.\, 14{,}4) \\ &= 0{,}0011285\,(1 - 0{,}000648) = 0{,}001128 \text{ Cubikm.} \end{aligned}$$

Setzt man also w constant $= 0{,}0010$, so wird innerhalb des von der Tabelle in §. 29 umfassten Zustandsgebietes das specif. Volumen

$$v = 0{,}001 + \Delta$$

des gesättigten Wasserdampfes um höchstens eine Einheit der vierten Decimalstelle zu klein gefunden, was um so weniger zu bedeuten hat, als schon die vierte Decimalstelle der Werthe von Δ nicht mehr als zuverlässig betrachtet werden kann. Hiernach konnte nun auch das specif. Gewicht des gesättigten Wasserdampfes in der letzten Columne der Tabelle, §. 29, nach der Formel

$$\gamma = \frac{1}{\Delta + 0{,}001} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

berechnet werden.

Vergleicht man diese Werthe von γ mit den specif. Gewichten $= \frac{p}{29,27\,T}$ der atm. Luft (§. 17), welche denselben Werthen von p und t entsprechen, so findet man die **Dichtigkeit** δ **des gesättigten Wasserdampfes** in **Beziehung auf atm. Luft**

z. B. für $p = 0,1 \quad 0,5 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 10$ Atm.

$\delta = 0,621 \quad 0,633 \quad 0,640 \quad 0,648 \quad 0,662 \quad 0,676,$

also wachsend mit der Pressung, wie auch durch directe Versuche von Fairbairn und Tate bestätigt wird,* mit welchen überhaupt die nach obigen Formeln berechneten Werthe von v oder γ befriedigend übereinstimmen. Andere Dämpfe zeigen ein ähnliches Verhalten.

Früher nahm man δ für Dämpfe, mochten sie gesättigt sein oder nicht, als constant an, insbesondere für Wasserdampf nach Gay-Lussac $= 0,622$ (erhalten durch Wägung des Wasserdampfes von atm. Pressung, wobei es aber nicht ganz sicher ist, ob der Dampf gesättigt resp. in welchem Grade er überhitzt war); γ wurde dann vermittels dieses constanten Werthes aus dem specif. Gewichte der Luft für gleiche Werthe von p und t berechnet, dabei also die (zuerst von Clausius als irrthümlich nachgewiesene) Voraussetzung zu Grunde gelegt, dass auch die Dämpfe in jedem Zustande, selbst im Zustande der Sättigung, der für die Gase charakteristischen Gleichung $pv = RT$ folgen.

In manchen Fällen ist es bequem, das **specif. Gewicht** γ **der Dämpfe durch eine empirische Formel als unmittelbare Function von** p **auszudrücken.** Insbesondere für gesättigten Wasserdampf hat man dazu meistens nach Navier einen Ausdruck von der Form

$$\gamma = a + bp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

benutzt, wovon namentlich Pambour in seiner Theorie der Dampfmaschinen (ebenso Redtenbacher) ausgedehnten Gebrauch gemacht hat, indem auf Grund der älteren Versuche die Constanten a und b für Dämpfe niederer und höherer Spannung (unter und über 2 Atm.) besonders bestimmt wurden. Indessen lassen die Werthe von γ, welche in der folgenden Tabelle (§. 29) nach den zuvor entwickelten Regeln, nämlich auf Grund der Regnault'schen Versuche nach den Principien der mechanischen Wärmetheorie berechnet sind, erkennen, dass die Differenzen von γ, welche gleichen Differenzen von p entsprechen, nicht constant, sondern in sehr merklicher Weise um so grösser und um so veränderlicher sind, je kleiner p ist. Die Formel (3) ist deshalb nur zwischen engeren Grenzen von p bei passender Bestimmung

* Proc. of the Royal Soc. 1860.

der Constanten a und b zu gebrauchen, indem etwa gesetzt wird (p in Atm. ausgedrückt):

für $p = 1$ bis 2 Atm.	$a = 0{,}0487$	$b = 0{,}5572$
2 „ 3 „	$a = 0{,}0845$	$b = 0{,}5393$
3 „ 4 „	$a = 0{,}1187$	$b = 0{,}5279$
4 „ 5 „	$a = 0{,}1515$	$b = 0{,}5197$
5 „ 6 „	$a = 0{,}1840$	$b = 0{,}5132$
6 „ 7 „	$a = 0{,}2158$	$b = 0{,}5079$
7 „ 8 „	$a = 0{,}2473$	$b = 0{,}5034$
8 „ 9 „	$a = 0{,}2777$	$b = 0{,}4996$
9 „ 10 „	$a = 0{,}3074$	$b = 0{,}4963$.

Eine viel bessere Uebereinstimmung mit den aus den Regnault'schen Versuchen abgeleiteten Werthen, und zwar zwischen sehr weiten Grenzen von p, wird nach Zeuner bei passender Bestimmung der Constanten a und b durch die Formel erhalten:

$$pv^m = a, \text{ woraus } \gamma = \frac{1}{v} = \alpha p^{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

folgt, wenn

$$\alpha = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ und } \mu = \frac{1}{m}$$

gesetzt wird. Setzt man insbesondere für gesättigten Wasserdampf* und unter der Voraussetzung, dass p in Atm. ausgedrückt ist,

$$a = 1{,}7049 \qquad m = 1{,}0646$$
$$\text{also } \alpha = 0{,}6058 \qquad \mu = 0{,}9393$$

so unterscheiden sich die so berechneten Werthe von γ um höchstens eine Einheit in der dritten Decimalstelle von denen der folgenden Tabelle.

§. 29. Tabelle für gesättigten Wasserdampf.

Die folgende Tabelle ist mit einigen Ergänzungen und Modificationen der zweiten Auflage von Zeuner's „Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie" entnommen. Am Anfange der Tabelle sind nämlich einige Werthsysteme der betreffenden Grössen für kleinere Intervalle von p hinzugefügt,

* Zeuner: „Ueber das Verhalten der überhitzten und der gemischten Wasserdämpfe", Civilingenieur, XIII. Jahrg., 6. Heft. In den „Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie", 2. Aufl., hatte Zeuner die Constante m ebenso, die Constante a aber etwas kleiner angegeben.

weil sonst die Differenzen von t und der davon abhängigen Werthe für eine einfache Interpolation zu gross werden; auch weichen bis zu $p = 3,3$ Atm. die Werthe von Δ, $\frac{\varrho}{\Delta}$ und γ von denen der Zeuner'schen Tabelle etwas ab, weil hier der Atmosphärendruck, von Zeuner = 10334 Kgr. pro Quadratm. angenommen, nur = 10333 Kgr. gesetzt wurde.*

Die Werthe von t sind nach §. 26, q nach §. 27, Gl. (2),
ϱ nach §. 27, Gl. (10), $Ap\Delta$ nach §. 27, Gl. (11),
Δ nach §. 28, Gl. (1), γ nach §. 28, Gl. (2) berechnet.

Die Werthe von $\frac{\varrho}{\Delta}$ wurden von Zeuner seiner Tabelle beigefügt, weil diese Grösse besonders häufig in den Formeln erscheint, in welchen die Lösungen verschiedener Probleme enthalten sind.

p Atm.	t	q	ϱ	$Ap\Delta$	Δ	$\frac{\varrho}{\Delta}$	γ
0,02	17,83	17,838	561,296	32,804	67,303	8,3398	0,0149
0,04	29,35	29,375	552,184	33,893	34,769	15,882	0,02[illegible]
0,06	36,56	36,601	646,481	34,569	23,641	23,116	0,0423
0,08	41,92	41,977	542,241	35,067	17.987	30,146	0,0556
0,10	46,21	46,282	538,848	35,464	14,552	37,029	0,0[illegible]
0,12	49,83	49,917	535,984	35,797	12,241	43,786	0,0[illegible]17
0,15	54,37	54,477	532,393	36,213	9,9063	53,743	0,1[illegible]
0,2	60,45	60,589	527,584	36,764	7,5428	69,945	0,13[illegible]
0,3	69,49	69,687	520,433	37,574	5,1393	101,27	0,194[illegible]
0,4	76,25	76,499	515,086	38,171	3,9157	131,54	0,2[illegible]
0,5	81,71	82,017	510,767	38,637	3,1708	161,08	0,315[illegible]
0,6	86,32	86,662	507,121	39,045	2,6703	189,91	0,374[illegible]
0,7	90,32	90,704	503,957	39,387	2,3088	218,28	0,4[illegible]
0,8	93,88	94,304	501,141	39,688	2,0357	246,18	0,491[illegible]
0,9	97,08	97,543	498 610	39,957	1,8218	273,69	0,54[illegible]
1,0	100,00	100,500	496,300	40.200	1,6495	300,88	0,6[illegible]
1,1	102,68	103,216	494,180	40,421	1,5078	327,75	0,6[illegible]
1,2	105.17	105,740	492,210	40,626	1,3892	354,31	0,719[illegible]
1,3	107,50	108,104	490,367	40,816	1,2883	380,63	0,77[illegible]
1,4	109,68	110,316	488,643	40,993	1,2015	406,69	0,[illegible]

* Er ist = dem Gewicht einer Quecksilbersäule von 1 Quadratm Grundfläche und 0,76 Mtr. Höhe bei 0° Temperatur des Quecksilbers, also

$$13596 \cdot 0,76 = 10332,96 \text{ Kgr.},$$

sofern die Dichtigkeit des Quecksilbers bei 0° in Beziehung auf Wasser bei 4° C. nach Regnault = 13,596 ist.

p Atm.	t	q	ϱ	$Ap\Delta$	Δ	$\frac{\varrho}{\Delta}$	γ
1,5	111,74	112,408	487,014	41,159	1,1259	432,56	0,8874
1,6	113,69	114,389	485,471	41,315	1,0596	458,16	0,9429
1,7	115,54	116,269	484,008	41,463	1,0008	483,62	0,9982
1,8	117,30	118,059	482,616	41,602	0,9484	508,87	1,0533
1,9	118,99	119,779	481,279	41,734	0,9013	533,98	1,1083
2,0	120,60	121,417	480,005	41,861	0,8589	558,86	1,1629
2,1	122,15	122,995	478,779	41,981	0,8203	583,66	1,2176
2,2	123,64	124,513	477,601	42,096	0,7852	608,25	1,2719
2,3	125,07	125,970	476,470	42,207	0,7530	632,76	1,3263
2,4	126,46	127,386	475,370	42,314	0,7235	657,04	1,3803
2,5	127,80	128,753	474,310	42,416	0,6962	681,28	1,4343
2,6	129,10	130,079	473,282	42,515	0,6710	705,34	1,4881
2,7	130,35	131,354	472,293	42,610	0,6476	729,30	1,5418
2,8	131,57	132,599	471,328	42,702	0,6258	753,16	1,5954
2,9	132,76	133,814	470,387	42,791	0,6055	776,86	1,6488
3,0	133,91	134,989	469,477	42,876	0,5865	800,47	1,7021
3,1	135,03	136,133	468,591	42,960	0,5686	824,11	1,7556
3,2	136,12	137,247	467,729	43,040	0,5519	847,49	1,8086
3,3	137,19	138,341	466,883	43,119	0,5362	870,73	1,8615
3,4	138,23	139,404	466,060	43,196	0,5213	894,03	1,9147
3,5	139,24	140,438	465,261	43,269	0,5072	917,31	1,9676
3,6	140,23	141,450	464,478	43,342	0,4940	940,24	2,0203
3,7	141,21	142,453	463,703	43,413	0,4814	963,24	2,0729
3,8	142,15	143,416	462,959	43,480	0,4695	986,07	2,1255
3,9	143,08	144,368	462,224	43,548	0,4581	1008,9	2,1780
4,0	144,00	145,310	461,496	43,614	0,4474	1031,6	2,2303
4,1	144,89	146,222	460,792	43,677	0,4371	1054,2	2,2826
4,2	145,76	147,114	460,104	43,739	0,4273	1076,8	2,3349
4,3	146,61	147,985	459,431	43,799	0,4179	1099,3	2,3871
4,4	147,46	148,857	458,759	43,859	0,4090	1121,7	2,4391
4,5	148,29	149,708	458,103	43,918	0,4004	1144,0	2,4911
4,6	149,10	150,539	457,462	43,975	0,3922	1166,3	2,5430
4,7	149,90	151,360	456,829	44,030	0,3844	1188,5	2,5949
4,8	150,69	152,171	456,204	44,085	0,3768	1210,6	2,6467
4,9	151,46	152,961	455,595	44,139	0,3696	1232,7	2,6984
5,0	152,22	153,741	454,994	44,192	0,3626	1254,7	2,7500
5,1	152,97	154,512	454,401	44,243	0,3559	1276,6	2,8016
5,2	153,70	155,262	453,823	44,293	0,3495	1298,5	2,8531
5,3	154,43	156,012	453,246	44,343	0,3433	1320,3	2,9046
5,4	155,14	156,741	452,684	44,392	0,3373	1342,1	2,9560

p Atm.	t	q	ϱ	$Ap\Delta$	Δ	$\frac{\varrho}{\Delta}$	γ
5,5	155,85	157,471	452,123	44,441	0,3315	1363,8	3,0073
5,6	156,54	158,181	451,577	44,487	0,3259	1385,4	3,0586
5,7	157,22	158,880	451,039	44,533	0,3205	1407,0	3,1098
5,8	157,90	159,579	450,501	44,579	0,3153	1428,5	3,1610
5,9	158,56	160,259	449,979	44,623	0,3103	1450,0	3,2122
6,0	159,22	160,938	449,457	44,667	0,3054	1471,5	3,2632
6,1	159,87	161,607	448,943	44,710	0,3007	1492,9	3,3142
6,2	160,50	162,255	448,444	44,753	0,2962	1514,2	3,3652
6,3	161,14	162,915	447,938	44,794	0,2917	1535,5	3,4161
6,4	161,76	163,553	447,448	44,836	0,2874	1556,7	3,4670
6,5	162,37	164,181	446,965	44,876	0,2833	1577,9	3,5178
6,6	162,98	164,810	446,483	44,916	0,2792	1599,0	3,5685
6,7	163,58	165,428	446,008	44,956	0,2753	1620,1	3,6192
6,8	164,18	166,047	445,534	44,994	0,2715	1641,2	3,6699
6,9	164,76	166,645	445,075	45,032	0,2678	1662,2	3,7206
7,00	165,34	167,243	444,616	45,070	0,2642	1683,0	3,7711
7,25	166,77	168,718	443,485	45,162	0,2556	1735,2	3,8974
7,50	168,15	170,142	442,393	45,250	0,2475	1787,1	4,0234
7,75	169,50	171,535	441,325	45,337	0,2400	1838,7	4,1490
8,00	170,81	172,888	440,289	45,420	0,2329	1890,1	4,2745
8,25	172,10	174,221	439,269	45,501	0,2263	1941,2	4,3997
8,50	173,35	175,514	438,280	45,578	0,2200	1992,1	4,5248
8,75	174,57	176,775	437,315	45,654	0,2141	2042,8	4,6495
9,00	175,77	178,017	436,366	45,727	0,2085	2093,3	4,7741
9,25	176,94	179,228	435,440	45,798	0,2031	2143,5	4,8985
9,50	178,08	180,408	434,539	45,868	0,1981	2193,5	5,0226
9,75	179,21	181,579	433,645	45,935	0,1933	2243,3	5,1466
10,00	180,31	182,719	432,775	46,001	0,1887	2293,0	5,2704
10,25	181,38	183,828	431,928	46,064	0,1844	2342,5	5,3941
10,50	182,44	184,927	431,090	46,127	0,1802	2391,7	5,5174
10,75	183,48	186,005	430,267	46,189	0,1763	2440,7	5,6406
11,00	184,50	187,065	429,460	46,247	0,1725	2489,5	5,76[illegible]
11,25	185,51	188,113	428,661	46,306	0,1689	2538,2	5,8864
11,50	186,49	189,131	427,886	46,362	0,1654	2586,8	6,0092
11,75	187,46	190,139	427,119	46,417	0,1621	2635,2	6,1318
12,00	188,41	191,126	426,368	46,471	0,1589	2683,4	6,25[illegible]
12,25	189,35	192,104	425,624	46,524	0,1558	2731,4	6,[illegible]
12,50	190,27	193,060	424,896	46,576	0,1529	2779,3	6,4[illegible]
12,75	191,18	194,007	424,177	46,626	0,1500	2827,0	6,62[illegible]

p Atm.	t	q	ϱ	$Ap\Delta$	Δ	$\frac{\varrho}{\Delta}$	γ
13,00	192,08	194,944	423,465	46,676	0,1473	2874,5	6,7424
13,25	192,96	195,860	422,769	46,724	0,1447	2922,0	6,8642
13,50	193,83	196,766	422,080	46,772	0,1421	2969,3	6,9857
13,75	194,69	197,662	421,400	46,818	0,1397	3016,5	7,1072
14,00	195,53	198,537	420,736	46,864	0,1373	3063,4	7,2283

II. Gemische von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit.

§. 30. Allgemeine Formeln für umkehrbare Zustandsänderungen solcher Gemische.

Für irgend einen Zustand des Gemisches bezeichne hier und in den folgenden Nummern:

p die Pressung in Kgr. pro Quadratm., welche, sofern von Massenkräften abstrahirt wird, in allen Punkten des Gemisches gleich ist,

y Kgr. die Dampfmenge in 1 Kgr. des Gemisches,

t die Temperatur in Celsius'schen Graden, vom Gefrierpunkte des Wassers aus gerechnet,

T die absolute Temperatur $= 273 + t$,

q die Wärmemenge, welche dazu erfordert wird, 1 Kgr. Flüssigkeit als solche bei constanter Pressung von 0 bis t^0 zu erwärmen,

r die specif. Verdampfungswärme,

ϱ die innere specif. Verdampfungswärme,

w das specif. Volumen der Flüssigkeit (Cubikm. pro Kgr.),

$w + \Delta$ dasjenige des Dampfes, welcher in dem Gemische stets gesättigt ist,

v das specif. Volumen des Gemisches,

U das specif. innere Arbeitsvermögen desselben, von dem Zustande aus gerechnet, in welchem das ganze Gemisch flüssig ($y = 0$) und $t = 0$ ist.

Dem Vorhergehenden zufolge sind t, T, Δ, q, ϱ und $r = \varrho + Ap\Delta$ Functionen von p (für ein Gemisch von Wasser und Wasserdampf bestimmt durch die Tabelle in §. 29), während w als Constante in Rechnung gebracht werden kann (für Wasser $= 0{,}001$). Vermöge der Zustandsgleichung (§. 25)

$$v = w + y\Delta \qquad (1)$$

ist dann v eine Function von p und y; ebenso U, und zwar ist der Wärme-

werth von U, d. h. die specif. Körperwärme des Gemisches, wenn man der Annahme $w = Const.$ entsprechend q als specif. Flüssigkeitswärme, somit $q + \varrho$ als specif. Dampfwärme (§. 27) betrachtet.

$$AU = (1-y)q + y(q+\varrho) = q + y\varrho \quad \ldots \ldots \ldots (2).$$

Während diese Gleichungen (1) und (2) ganz allgemein gelten, sofern sie sich nur auf den augenblicklichen Zustand (Wärmezustand) des Gemisches beziehen abgesehen davon, wie derselbe aus einem anderen Zustande hervorging, hat man insbesondere für die Wärmemenge dQ, welche dem Gemische pro 1 Kgr. behufs einer unendlich kleinen umkehrbaren Zustandsänderung oder allgemeiner behufs einer unendlich kleinen umkehrbaren, d. h. solchen Aenderung des Wärmezustandes mitgetheilt werden muss, welche mit nur umkehrbaren Verwandlungen verbunden ist, nach §. 13, Gl. (2)

$$WdQ = dU + p\,dv \text{ oder } dQ = d(AU) + Ap\,dv,$$

also mit Rücksicht auf obige Gl. (2)

$$dQ = dq + d(y\varrho) + Ap\,dv \quad \ldots \ldots \ldots (3).$$

Darin ist nach Gl. (1)

$$Ap\,dv = Ap\,d(y\Delta) = A\,d(py\Delta) - Ay\Delta . dp$$

oder nach §. 27, Gl. (8)

$$Ap\,dv = d(y . Ap\Delta) - y\frac{r\,dt}{T},$$

und die Substitution in Gl. (3) liefert

$$dQ = dq + d[y(\varrho + Ap\Delta)] - \frac{yr}{T}dt = dq + d(yr) - \frac{yr}{T}dt \quad \ldots (4)$$

Diese Gleichung kann wegen $dt = dT$ einfacher geschrieben werden:

$$dQ = dq + \frac{T.d(yr) - yr.dT}{T} = dq + T.d\left(\frac{yr}{T}\right) \quad \ldots \ldots (5)$$

Von den verschiedenen Umformungen, welche die Gleichung (4) gestattet, ist insbesondere noch die folgende bemerkenswerth, welche mit

$$dq = c.dt$$

erhalten wird, nämlich

$$dQ = c\,dt + r\,dy + y\,dr - y\frac{r}{T}dt$$

$$= (1-y)c\,dt + r\,dy + y\left(c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}\right)dt$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{oder } dQ = (1-y)c\,dt + r\,dy + yh\,dt \\ \text{mit } h = c + \dfrac{dr}{dt} - \dfrac{r}{T} \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

In dieser Gleichung ist

$(1-y)\,c\,dt$ die Wärmemenge zur Temperaturerhöhung der Flüssigkeitsmenge $= (1-y)$ Kgr.,

$r\,dy$ die Wärmemenge zur Verdampfung der Flüssigkeitsmenge $= dy$ Kgr., folglich

$y\,h\,dt$ die Wärmemenge, welche zur Temperaturerhöhung und entsprechenden Volumenänderung der Dampfmenge $= y$ Kgr. verwendet wird.

Es bedeutet also h eine Art specif. Wärme des Dampfes, nämlich diejenige, welche einer solchen Volumen- und Pressungsänderung bei der Wärmemittheilung entspricht, dass dabei der Dampf gerade gesättigt bleibt.

Die Grösse c bedeutet in Gl. (6) eigentlich diejenige specif. Wärme der Flüssigkeit, welche der Voraussetzung entspricht, dass mit der Temperatur zugleich die Pressung und zwar nach demselben Gesetze zunimmt wie bei gesättigtem Dampf. Insbesondere für Wasser wäre also nach §. 22, Gl. (8) zu setzen:

$$c = c_p - 0{,}02437\, T\alpha \frac{dp}{dt},$$

unter $\frac{dp}{dt}$ (p in Atm. ausgedrückt vorausgesetzt) den nach §. 26 bekannten Differentialquotienten für gesättigten Wasserdampf, unter α den Ausdehnungscoefficienten des Wassers (§. 22) und unter

$$c_p = 1 + 0{,}00004\, t + 0{,}0000009\, t^2$$

seine specif. Wärme für constante Pressung verstanden. Hiernach ist z. B., wenn die in §. 22 für $t > 32$ angeführte empirische Formel

$$\alpha = 2\frac{54724}{10^{10}}\,t - 3\frac{1126}{10^{11}}\,t^2$$

auch noch für $t > 100$ bis zu $t = 150$ als gültig betrachtet wird,

für $t =$	50	100	150	
$T =$	323	373	423	
$p =$	0,121	1,000	4,712 Atm.	nach §. 26,
$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} =$	0,049794	0,035775	0,026854	nach §. 26,
$\frac{dp}{dt} =$	0,006025	0,035775	0,126536	
$\alpha =$	0,0004628	0,0007567	0,0008817	
$c_p - c =$	0,00002	0,00025	0,00115	
$c_p =$	1,00425	1,01300	1,02625	
$c =$	1,00423	1,01275	1,02510	

Diese Unterschiede zwischen c und c_p liegen innerhalb der Beobachtungsfehler, und darf bei den Anwendungen im Allgemeinen $c = c_p$ gesetzt werden.

Was endlich die Expansionsarbeit betrifft, welche von 1 Kgr. eines Gemisches von Flüssigkeit und gleichartigem Dampfe bei einer umkehrbaren Aenderung seines Wärmezustandes verrichtet wird, so ist dieselbe gleich dem Ueberschuss des Arbeitswerthes der mitgetheilten Wärme über den Zuwachs an innerem Arbeitsvermögen, also das Element dieser Expansionsarbeit für eine unendlich kleine Zustandsänderung:

$$dE = W.dQ - dU$$

oder ihr Wärmewerth mit Rücksicht auf Gl. (2) und (5):

$$A.dE = dQ - A.dU = T.d\left(\frac{yr}{T}\right) - d(y\varrho) \quad \ldots\ldots\ldots (7).$$

Alle diese Formeln und ebenso die daraus abgeleiteten Specialformeln für die in den folgenden Nummern zu betrachtenden besonderen Arten von Zustandsänderungen gelten natürlich nur innerhalb der Grenzen $y = 0$ und $y = 1$.

§. 31. Zustandsänderung bei constanter Pressung oder Temperatur.

Für ein Gemisch von Flüssigkeit und gleichartigem Dampf ist bei constanter Pressung p auch die dadurch bestimmte Temperatur t constant und umgekehrt; die isothermische Curve ist also eine mit der v-Axe parallele Gerade. Mit p oder t sind auch w, Δ, q, ϱ, r als Constante gegeben, so dass (ausser dem inneren Arbeitsvermögen) nur der specif. Dampfgehalt y und das specif. Volumen

$$v = w + y\Delta$$

des Gemisches veränderlich sind, und zwar so, dass diese Grössen einander proportional sich ändern: $dv = \Delta.dy$.

Bei dem Uebergange des specif. Dampfgehaltes von y_1 in y und entsprechend des specif. Volumens

$$\text{von } v_1 = w + y_1\Delta \text{ in } v = w + y\Delta$$

ist die Expansionsarbeit pro 1 Kgr. des Gemisches

$$E = p(v - v_1) = p\Delta(y - y_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

der Zuwachs an innerem Arbeitsvermögen nach §. 30, Gl. 2 und $AW = 1$

$$U - U_1 = W\varrho (y - y_1) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

und die mitzutheilende Wärmemenge nach §. 30, Gl. (5) oder auch unmittelbar gemäss der Bedeutung von r:

$$Q = r(y - y_1) = A(U - U_1 + E) \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Durch diese Gleichungen sind v, E, U und Q bestimmt als Functionen von y und von Grössen, welche mit dem Anfangszustande gegeben sind. Wäre der Sinn und Grad der Zustandsänderung nicht unmittelbar durch y gegeben, so wäre zunächst y der Aufgabe gemäss zu bestimmen; wenn z. B. das Expansionsverhältniss

$$e = \frac{v_1}{v} = \frac{w + y_1 \varDelta}{w + y \varDelta}$$

gegeben wäre, so würde daraus folgen:

$$y = \left(\frac{1}{e} - 1\right)\frac{w}{\varDelta} + \frac{1}{e} y_1 \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

§. 32. Zustandsänderung bei constantem Volumen.

Wenn die mit der Marke 1 versehenen Buchstaben zur Bezeichnung der aus §. 30 bekannten Grössen im Anfangszustande des Gemisches benutzt werden, während die Buchstaben ohne Marke sich auf den Endzustand beziehen, so hat man zunächst nach §. 30, Gl. (1)

$$y\varDelta = y_1 \varDelta_1 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

zur Berechnung von y oder von p, jenachdem der Endzustand durch p resp. eine der durch p bestimmten Grössen oder durch y gegeben ist.

Die Wärmemenge Q, welche einem Kgr. des Gemisches behufs einer gegebenen Zustandsänderung bei constantem Volumen mitgetheilt werden muss, ergiebt sich aus §. 30, Gl. (3):

$$Q = q - q_1 + y\varrho - y_1 \varrho_1$$

oder bei Substitution des Werthes von y nach Gl. (1)

$$Q = q - q_1 + y_1 \varDelta_1 \left(\frac{\varrho}{\varDelta} - \frac{\varrho_1}{\varDelta_1}\right) \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Hiernach lässt sich z. B. die Zeit $= \vartheta$ berechnen, in welcher die Pressung in einem geschlossenen Gefässe, welches M Kgr. des Gemisches enthält, bei gleichförmiger Wärmemittheilung von p_1 bis p wächst; ist Q_1 die in der Zeiteinheit mitgetheilte Wärmemenge, so ist

$$\vartheta = \frac{MQ}{Q_1} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

In diesem Falle befindet sich u. A. ein gefüllter **Dampfkessel** bei **gehemmter Dampfableitung und gehemmter Speisung**, aber **fortgesetzter Heizung**, wenn von seiner Ausdehnung durch die Steigerung der Temperatur und des inneren Ueberdruckes abgesehen wird. Selbst wenn die Heizung bis fast zur Sprengung des Kessels fortgesetzt wird, ist es doch nur ein verhältnissmässig kleiner Theil der vorhandenen Wassermenge, welcher in Dampf übergeht, so dass nicht nur das Gesammtvolumen $= V$ Cubikm., sondern auch das Volumen des Dampfes $= \alpha V$ und des Wassers $= (1-\alpha) V$ einzeln ohne in Betracht kommenden Fehler constant gesetzt werden können um so mehr, als das Wasser durch die Erhöhung der Temperatur mehr ausgedehnt, als durch die Steigerung der Pressung comprimirt wird. Auch ist das specif. Gewicht des Wasserdampfes ($= \gamma_1$ im Anfangszustande) klein genug im Vergleich mit demjenigen des Wassers, um

$$M = 1000 (1-\alpha) V$$

setzen zu dürfen. Ist also noch die Grösse der Heizfläche $= H$ Quadratm. und Q_0 die Wärmemenge, welche pro Minute und pro Quadratm. Heizfläche in den Kessel eindringt (für einen eingemauerten Kessel bei normaler Feuerung $= 125 - 250$ Cal.), somit

$$Q_1 = H Q_0 ,$$

so ist nach Gl. (3)

$$\vartheta = 1000 (1-\alpha) \frac{V Q}{H Q_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

insbesondere für einen cylindrischen Kessel vom Durchmesser d und von der Länge l, welcher nur von aussen geheizt wird, mit

$$V = \frac{1}{4} \pi d^2 l; \quad H = \frac{5}{9} \pi d l; \quad \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\vartheta = 300 \frac{Q}{Q_0} d \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Darin ist nach Gl. (2) mit

$$\vartheta_1 = \frac{\alpha V \gamma_1}{M} = 0{,}001 \frac{\alpha}{1-\alpha} \gamma_1$$

und mit Rücksicht darauf, dass sehr nahe

$$\gamma_1 \Delta_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + 0{,}001} = 1$$

gesetzt werden kann.

$$Q = q - q_1 + 0{,}001 \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{\varrho}{\Delta} - \frac{\varrho_1}{\Delta_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

und insbesondere mit $\alpha = \frac{1}{3}$

$$Q = q - q_1 + 0{,}0005\left(\frac{\varrho}{\Delta} - \frac{\varrho_1}{\Delta_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Folgende Zusammenstellung enthält die Werthe von Q, welche dieser Gl. (7) für $p = (p_1 + 1)$ Atm., d. h. für den Fall der Druckzunahme um eine Atmosphäre und für verschiedene Werthe von p_1 auf Grund der Tabelle in §. 29 entsprechen.

p_1 Atm.	Q	p_1 Atm.	Q	p_1 Atm.	Q	p_1 Atm.	Q
2	13,693	5	7,305	8	5,231	11	4,158
3	10,437	6	6,411	9	4,802	12	3,914
4	8,543	7	5,749	10	4,444	13	3,687

Hiernach und nach Gl. (5) würde z. B. mit $Q_0 = 200$ die Zeit, in welcher bei einem abgesperrten cylindrischen und von aussen geheizten Dampfkessel von 1 Mtr. Durchm., welcher zu $^2/_3$ seines Volumens mit Wasser gefüllt ist, die Anfangsspannung von 4 Atm. bis zu 12 Atm. bei fortgesetzter Feuerung wächst,

$$\vartheta = 1{,}5\, Q = 1{,}5(8{,}543 + 7{,}305 + \ldots + 4{,}158) = 70 \text{ Min.}$$

betragen.

§. 33. Zustandsänderung bei constantem Gewichtsverhältnisse von Dampf und Flüssigkeit.

Wenn y constant ist, so kann die Zustandsgleichung

$$v = w + y\Delta,$$

in welcher Δ eine Function von p ist, als die Gleichung einer Curve betrachtet werden, deren Coordinaten v und p sind, d. h. als die Gleichung der **Zustandscurve** (§. 13), durch welche das Gesetz der vorliegenden Zustandsänderung graphisch dargestellt wird. Setzt man nach §. 28, Gl. (4) das specif. Gewicht gesättigten Dampfes:

$$\gamma = \alpha p^\mu, \text{ also } \Delta = \frac{1}{\gamma} - w = \frac{1}{\alpha p^\mu} - w,$$

so erhält man als Gleichung dieser Curve constanter Dampfmenge:

$$v = (1-y)w + \frac{y}{ap^{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1,$$

worin für ein Gemisch von Wasser und Wasserdampf dem Früheren zufolge

$$\alpha = 0{,}6058; \quad \mu = 0{,}9393$$

zu setzen ist; die Curve hat die v-Axe und eine Gerade, welche mit der p-Axe in der Entfernung $= (1-y)w$ parallel ist, zu Asymptoten.

Für den Grenzfall $y = 1$ ergiebt sich wie früher die Gleichung der Zustandscurve gesättigten, aber trockenen Dampfes:

$$\alpha v p^{\mu} = 1 \quad \text{oder } pv^{m} = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2,$$

insbesondere für Wasserdampf mit

$$a = 1{,}7049; \quad m = 1{,}0646.$$

Die Wärmemenge, welche einem Kgr. des Gemisches behufs einer unendlich kleinen Zustandsänderung mitgetheilt werden muss, wenn dabei die Dampfmenge constant $= y$ Kgr. bleiben soll, ist nach §. 30, Gl. (6)

$$dQ = [(1-y)c + yh]\,dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3,$$

insbesondere für $y = 1$: $dQ = h\,dt$.

Der negative oder positive Werth von

$$h = c + \frac{dr}{dt} - \frac{r}{T} = \frac{d(q+r)}{dt} - \frac{r}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4$$

ist also, wie zuerst von Clausius hervorgehoben wurde, dafür entscheidend, ob einem gesättigten, aber trockenen (nicht mit Flüssigkeit gemischten) Dampf, wenn er bei der Ausdehnung (Abnahme von t) gerade gesättigt und trocken bleiben soll, Wärme mitgetheilt oder entzogen werden muss, d. h. ob dQ positiv oder negativ ist bei einem negativen Werthe von dt. Insbesondere für Wasserdampf ist nach §. 27, Gl. (4) die sogen. Gesammtwärme

$$q + r = 606{,}5 + 0{,}305\,t,$$

also nach obiger Gl. (4)

$$h = 0{,}305 - \frac{r}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5,$$

und man findet diese Grösse innerhalb der Grenzen der Tabelle in §. 29 beständig negativ: siehe die Werthe von $\frac{r}{T}$ in §. 35. Gesättigtem und trockenem Wasserdampf muss also Wärme mitgetheilt werden, wenn er b

der Expansion, dagegen Wärme entzogen werden, wenn er bei der Compression gesättigt und trocken bleiben soll; auch darf der Wasserdampf bis zu gewissem Grade mit Wasser gemischt sein unbeschadet des Umstandes, dass die Expansion Wärmemittheilung, die Compression Wärmeentziehung erfordert, falls das Gewichtsverhältniss von Dampf und Wasser constant bleiben soll. Wenn also bei der Expansion solchen Dampfes nicht Wärme mitgetheilt wird, wie z. B. bei der Expansion des Dampfes hinter dem Kolben einer Dampfmaschine, so muss (im Gegensatze zu der Annahme Pambour's in seiner Theorie der Dampfmaschinen) eine theilweise Condensation des Dampfes zu Wasser erfolgen; und wenn bei der Compression solchen Dampfes nicht Wärme entzogen wird, wie z. B. bei der Compression des vor dem Kolben abgesperrten Dampfes gegen Ende des Kolbenschubes, so findet Verdampfung von etwa vorhandenem Wasser, resp. Ueberhitzung des vorher trockenen oder im Verlaufe der Compression trocken gewordenen Dampfes statt.

Wenn aber der Wassergehalt des Gemisches von Dampf und Wasser eine gewisse Grenze überschritte, wenn nämlich y kleiner wäre, als derjenige Werth

$$y = \frac{c}{c-h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

wodurch nach Gl. (3) $\frac{dQ}{dt} = 0$ wird, so würde umgekehrt Verdampfung bei der Expansion und Condensation von Dampf bei der Compression ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme stattfinden; indessen kommt bei Dampfmaschinen ein so bedeutender Wassergehalt des Dampfes im Cylinder nicht vor. Mit

$$c = 1 + 0{,}00004\,t + 0{,}000\,000\,9\,t^2,$$

ferner mit Rücksicht auf Gl. (5) und die Tabelle in §. 29 ergiebt sich z. B.

für $p =$	0,5	1	2	4	8 Atm.
$c =$	1,0093	1,0130	1,0179	1,0244	1,0331
$-h =$	1,2439	1,1333	1,0209	0,9063	0,7894
$y = \frac{c}{c-h} =$	0,448	0,472	0,499	0,531	0,567

Von den bisher untersuchten Dämpfen verhält sich in der in Rede stehenden Hinsicht nur der Aetherdampf entgegengesetzt dem Wasserdampfe, indem für ihn die Grösse h (innerhalb der Versuchsgrenzen) einen positiven Werth hat, auf welches abweichende Verhalten zuerst von Hirn aufmerksam gemacht wurde. —

Das innere Arbeitsvermögen eines Gemisches von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit nimmt immer ab, wenn dasselbe so expandirt, dass die verhältnissmässige Dampfmenge y unverändert bleibt. Denn nach §. 30, Gl. (2) ist

$$A\frac{dU}{dt} = \frac{dq}{dt} + y\frac{d\varrho}{dt} = c + y\frac{d\varrho}{dt}$$

und diese Grösse ist, insoweit sie bis jetzt für verschiedene Substanzen in verschiedenen Zuständen berechenbar ist, stets positiv, für Wasser z. B. nach §. 27, Gl. (10)

$$= c - 0{,}791\, y,$$

so dass, da dt zugleich mit dp bei der Expansion negativ ist, auch dU negativ sein, also U abnehmen muss.

§. 34. Zustandsänderung bei constantem inneren Arbeitsvermögen.

Wenn U constant ist, so ist nach §. 30, Gl. (2) auch

$$q + y\varrho = Const. = q_1 + y_1\varrho_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

falls mit q_1, y_1, ϱ_1 die Werthe von q, y, ϱ im Anfangszustande bezeichnet werden. Daraus folgt die Gleichung der isodynamischen Curve, nämlich der Zustandscurve für dieses Gesetz der Zustandsänderung:

$$v = w + y\Delta = w + \frac{q_1 + y_1\varrho_1 - q}{\varrho}\Delta \quad \ldots\ldots\ldots$$

= einer Function von p, sofern q, ϱ, Δ Functionen von p sind. Nach Gl. (1) kann auch geschrieben werden:

$$y = \frac{q_1 + y_1\varrho_1 - q}{\varrho} = y_1 + \frac{(q_1 + y_1\varrho_1) - (q + y_1\varrho)}{\varrho},$$

woraus für den Fall der Expansion $y > y_1$ folgt, weil nach der Bemerkung zu Ende des vorigen §. die Expansion bei constanter verhältnissmässiger Dampfmenge mit einer Abnahme von U verbunden, somit

$$q + y_1\varrho < q_1 + y_1\varrho_1$$

ist. Die Expansion nach der isodynamischen Curve ist also mit Verdampfung von Flüssigkeit verbunden. Wegen dieser Zunahme von y nimmt Δ nach Gl. (2) bei gegebener Zunahme von v weniger zu, also p weniger ab, als es der Fall wäre, wenn y unverändert bliebe. Von irgend einem Punkte aus nähert sich also mit wachsender Abscisse v die isodynamische Curve der v-Axe weniger schnell, als die Curve constanter Dampfmenge.

Die weitere Untersuchung des Verhaltens von Dampf- und Flüssigkeitsgemischen bei Zustandsänderungen nach der isodynamischen Curve ist ohne näher liegendes Interesse.

§. 35. Zustandsänderung ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme.

Entsprechend der Voraussetzung $dQ = 0$ ist nach §. 30, Gl. (5)

$$0 = \frac{dq}{T} + d\left(\frac{yr}{T}\right),$$

wonach, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$a = \int_0^t \frac{dq}{T}; \quad b = \frac{r}{T} \quad \ldots\ldots (1),$$

die in Rede stehende Zustandsänderung charakterisirt wird durch die Gleichung:

$$a + yb = Const. = a_1 + y_1 b_1 \quad \ldots\ldots (2),$$

unter a_1, b_1 und y_1 die Werthe von a, b und y für den Anfangszustand verstanden. Die Elimination von y zwischen dieser Gleichung und der Zustandsgleichung des Gemisches liefert

$$v = w + y\Delta = w + \frac{a_1 + y_1 b_1 - a}{b}\Delta \quad \ldots\ldots (3)$$

= einer Function von p, indem a, b und Δ durch p bestimmt sind. Diese Gl. (3) ist also die Gleichung der Zustandscurve mit den Coordinaten v und p, welche der in Rede stehenden Art von Zustandsänderung entspricht, d. i. die Gleichung der adiabatischen Curve.

Diese Zustandsänderung nach der adiabatischen Curve, bezogen auf ein Gemisch von Wasserdampf und Wasser, ist von besonderer technischer Wichtigkeit. Dabei sind die Werthe von Δ in der Tabelle, §. 29, enthalten; auch die Werthe von

$$b = \frac{r}{T} = \frac{\varrho + Ap\Delta}{273 + t} \quad \ldots\ldots (4)$$

können mit Hülfe der in jener Tabelle enthaltenen Werthe von t, ϱ und $Ap\Delta$ leicht für gegebene Werthe von p berechnet werden. Was aber die Grösse a betrifft, so ist wegen

$$dq = c\,dt = \left(1 + \frac{4}{10^5}t + \frac{9}{10^7}t^2\right)dt \text{ und } t = T - 273$$

$$a = \int_0^t \frac{dq}{T} = \int_0^t \frac{1 + \frac{4}{10^5}(T-273) + \frac{9}{10^7}(T-273)^2}{T}\, dt$$

$$= \left(1 - \frac{4.273}{10^5} + \frac{9(273)^2}{10^7}\right)\int_{273}^{T}\frac{dT}{T} + \left(\frac{4}{10^5} - \frac{2.9.273}{10^7}\right)\int_0^t dt$$

$$+ \frac{9}{10^7}\int_0^t (273+t)\, dt = 1{,}056156\, ln\, \frac{T}{273} + \left(\frac{4}{10^5} - \frac{9.273}{10^7}\right) t + \frac{9}{10^7}\,\frac{t^2}{2}$$

oder endlich, wenn statt des natürlichen Logarithmus (ln) der gewöhnliche Logarithmus (lg) zur Basis 10 gesetzt wird,

$$a = 2{,}431884\, lg\, \frac{273+t}{273} - 0{,}0002057\, t + 0{,}00000045\, t^2 \quad . \; . \; 5.$$

Folgende Tabelle enthält die hiernach berechneten Werthe der Grössen a und b für verschiedene Werthe von p.*

p Atm.	t	Δt	a	Diff. für $\Delta t = 1$.	b	Diff. für $\Delta t = 1$
0,1	46,21		0,15660		1,79917	
		14,24		0,00308		0,00749
0,2	60,45		0,20047		1,69245	
		9,04		0,00298		0,00699
0,3	69,49		0,22737		1,62927	
		6,76		0,00291		0,00668
0,4	76,25		0,24707		1,58413	
		5,46		0,00287		0,00646
0,5	81,71		0,26273		1,54888	
		4,61		0,00283		0,00626
0,6	86,32		0,27577		1,52000	
		7,56		0,00278		0,00607
0,8	93,88		0,29681		1,47413	
		6,12		0,00274		0,00585
1,0	100,00		0,31357		1,43834	
		5,17		0,00270		0,00568
1,2	105,17		0,32750		1,40899	
		4,51		0,00267		0,00554
1,4	109,68		0,33954		1,38402	
		4,01		0,00264		0,00542
1,6	113,69		0,35013		1,36230	
		3,61		0,00262		0,00531
1,8	117,30		0,35959		1,34312	
		3,30		0,00260		0,00522
2	120,60		0,36816		1,32588	
		7,20		0,00257		0,00509
2,5	127,80		0,38663		1,28924	
		6,11		0,00253		0,00493
3	133,91		0,40207		1,25913	

* In der 2. Aufl. seiner „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie" S. 316, theilt Zeuner eine beschränktere Tabelle dieser und einiger anderen Grössen mit. Die dafür dort angeführten Werthe stimmen mit denen der obigen Tabelle im Allgemeinen (bis auf etwa 2 Einheiten der letzten Decimalstelle) überein; nur die Zeuner'schen Werthe von a (dort mit τ bezeichnet) für $p = 5$ und $p = 10$ Atm., nämlich $a = 0{,}14693$ und $a = 0{,}51297$, sind offenbar fehlerhaft, wie das Aenderungsgesetz der Differenzen für $\Delta t = 1$ erkennen lässt.

p Atm.	t	Δt	a	Diff. für $\Delta t = 1$.	b	Diff. für $\Delta t = 1$.
		5,33		0,00250		0,00479
3,5	139,24		0,41537		1,23358	
		4,76		0,00247		0,00468
4	144,00		0,42713		1,21129	
		4,29		0,00245		0,00458
4,5	148,29		0,43763		1,19163	
		3,93		0,00242		0,00450
5	152,22		0,44713		1,17395	
		3,63		0,00240		0,00442
5,5	155,85		0,45586		1,15790	
		3,37		0,00239		0,00436
6	159,22		0,46391		1,14322	
		6,12		0,00237		0,00426
7	165,34		0,47841		1,11714	
		5,47		0,00234		0,00416
8	170,81		0,49122		1,09441	
		4,96		0,00232		0,00406
9	175,77		0,50272		1,07425	
		4,54		0,00230		0,00398
10	180,31		0,51314		1,05618	
		4,19		0,00227		0,00391
11	184,50		0,52267		1,03980	
		3,91		0,00226		0,00384
12	188,41		0,53152		1,02477	
		3,67		0,00225		0,00378
13	192,08		0,53976		1,01088	
		3,45		0,00223		0,00373
14	195,53		0,54746		0,99802	

Um durch Interpolation die Werthe von a und b für solche Werthe von p dieser Tabelle zu entnehmen, welche nicht unmittelbar darin enthalten sind, kann man bemerken, dass die Differenzen Δa und Δb von a und b viel besser den Differenzen von t, als denen von p proportional gesetzt werden können; denn innerhalb der Grenzen der Tabelle liegt Δa

für $\Delta t = 1$ zwischen den engen Grenzen 0,00308 und 0,00223,
für $\Delta p = 1$ „ „ weiten „ 0,4387 „ 0,0077,

ebenso Δb

für $\Delta t = 1$ zwischen den engen Grenzen 0,00749 und 0,00373,
für $\Delta p = 1$ „ „ weiten „ 1,0672 „ 0,0129.

Zum Zweck der Interpolation sind deshalb die Werthe von t und die Differenzen von a und b für $\Delta t = 1$ in der Tabelle hinzugefügt worden. So ist z. B.

für $p = 1,5$ Atm. nach der Tabelle in §. 29: $t = 111,74$, also

$$a = 0,33954 + 0,00264\,(111,74 - 109,68) = 0,34498$$
$$b = 1,38402 - 0,00542\,(111,74 - 109,68) = 1,37285,$$

während die Interpolation nach Proportionalwerthen von Δp weniger richtig liefern würde:

$$a = \frac{1}{2}(0,33954 + 0,35013) = 0,34483$$

$$b = \frac{1}{2}(1,38402 + 1,36230) = 1,37316.$$

Mit Hülfe der obigen Tabelle kann für ein Gemisch von Wasserdampf und Wasser leicht die adiabatische Curve, welche durch einen gegebenen

Punkt (p_1, v_1) geht, vermittels einzelner Punkte construirt werden. Durch p_1 und v_1 sind nämlich mit Rücksicht auf obige Tabelle und die Tabelle in §. 29 die Grössen

$$a_1, b_1, \Delta_1 \text{ und } y_1 = \frac{v_1 - 0{,}001}{\Delta_1}$$

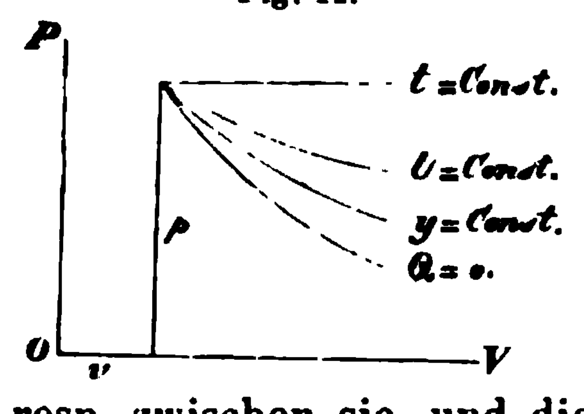
bestimmt; zu irgend einem gegebenen Werthe von p findet man dann ebenso a, b und Δ, somit v aus Gl. (3) mit $w = 0{,}001$.

Hinsichtlich der Art und Weise, wie die adiabatische Curve und die Curve constanter Dampfmenge, welche durch denselben Punkt (v, p) gehen, in diesem Punkte sich schneiden, kann man bemerken, dass dem Früheren zufolge, sofern die verhältnissmässige Dampfmenge y einen gewissen, durch Gl. (6) in §. 33 bestimmten Grenzwerth y' überschreitet, mit der Expansion des Gemisches nach der adiabatischen Curve eine theilweise Condensation von Dampf zu Flüssigkeit, also eine Abnahme von y verbunden ist, bei einem Gemische von Wasserdampf und Wasser bis zu den höchsten technisch verwertheten Pressungen jedenfalls immer dann, wenn $y > 0{,}6$ ist. Mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung

$$v = w + y\Delta$$

nimmt also bei der Expansion (Zunahme von v) Δ schneller zu, somit p schneller ab, als es der Fall wäre, wenn y unverändert bliebe. Von irgend einem Punkte (v, p) aus nähert sich also im Falle $y > y'$ die adiabatische Curve $(Q = 0)$ der v-Axe schneller, als die Curve constanter Dampfmenge $(y = Const.)$, und da diese sich nach §. 34 der v-Axe schneller nähert, als die isodynamische Curve $(U = Const.)$, so haben die im Vorhergehenden betrachteten ausgezeichneten Zustandscurven eines Dampf- und Flüssigkeitsgemisches in einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte (v, p) überhaupt eine solche Lage zu einander, wie Fig. 11 erkennen lässt. Die Curve $Q = 0$ würde im Punkte (v, p) die Curve $y = Const.$ berühren resp. zwischen sie und die Curve $U = Const.$ (für wachsende Werthe von v) fallen, wenn $y = y'$ resp. $< y'$ wäre. —

Fig. 11.



In Betreff der Expansionsarbeit E pro 1 Kgr. des Gemisches hat man nach §. 30, Gl. (7) wegen $dQ = 0$:

$$dE = -dU,$$

also wegen $AU = q + y\rho$ nach §. 30, Gl. (2)

$$A \cdot dE = -dq - d(y\rho)$$

und für eine Zustandsänderung von endlicher Grösse, bei welcher die Pressung von p_1 bis p abnimmt, während die verhältnissmässige Dampfmenge Anfangs $= y_1$ war,

$$AE = q_1 - q + y_1\varrho_1 - y\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Darin sind q_1 und ϱ_1 durch p_1, q und ϱ durch p bestimmt, während nach obiger Gl. (2)

$$y = \frac{a_1 + y_1 b_1 - a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

ist, in welchem Ausdrucke wieder a_1 und b_1 durch p_1, a und b durch p bestimmt sind.

Nach diesen Formeln ist u. A. die Arbeit zu berechnen, welche der Dampf in einer Dampfmaschine durch Expansion verrichtet, wenn er ohne Ueberhitzung im Cylinder abgesperrt wird und dieser gegen Wärmeverluste geschützt ist. Indem aber dabei ausser dem Anfangszustande nicht sowohl die Pressung im Endzustande, als vielmehr das Expansionsverhältniss

$$e = \frac{v_1}{v}$$

gegeben zu sein pflegt, ist es wünschenswerth, durch eine möglichst einfache Näherungsformel die Expansionsarbeit als unmittelbare Function der mit dem Anfangszustande gegebenen Grössen und des Expansionsverhältnisses e ausdrücken zu können. Dieser Zweck ist erreicht, wenn sich die adiabatische Curve des Dampf- und Flüssigkeitsgemisches durch eine einfache Gleichung $p = f(v)$ unmittelbar zwischen p und v darstellen lässt; denn dann ist bei gegebenem Expansionsgrade e

$$E = \int_{v_1}^{v} p\,dv = \int_{v_1}^{v} f(v)\,dv = F(v) - F(v_1) = F\left(\frac{v_1}{e}\right) - F(v_1).$$

Als Form einer solchen Gleichung hat zuerst Rankine

$$pv^m = Const. = p_1 v_1^{\,m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

vorgeschlagen analog der Gleichung $pv^{\varkappa} = Const.$ der adiabatischen Curve eines Gases (§. 20). Dabei wird zwar der Exponent m nicht (wie dort der Exponent $\varkappa$) constant, sondern eine Function des Expansionsverhältnisses e und der den Anfangszustand bestimmenden Grössen p_1 und y_1 sein; indessen wird die Gleichung (8) schon dadurch als praktisch brauchbar gerechtfertigt, dass sich m als hinlänglich wenig mit e, p_1 und y_1 veränderlich herausstellt, um dafür bei gewissen Gruppen von Aufgaben ohne wesentlichen Fehler constante Mittelwerthe setzen zu können.

Zur Bestimmung des Exponenten m bei gegebenen Werthen von e, p_1 und y_1 insbesondere für ein Gemisch von Wasserdampf und Wasser ist es mit Rücksicht auf die Einrichtung der Tabellen in diesem §. und in §. 29, welche die in Betracht kommenden Grössen unmittelbar als Functionen der Pressung enthalten, am bequemsten, diese Bestimmung zunächst für gegebene Werthe von p, p_1 und y_1 auszuführen, wodurch dann bei gleichzeitiger Bestimmung des entsprechenden Werthes von e auch der Zusammenhang zwischen m und e, p_1, y_1 sich ergiebt. Man findet dann nämlich

zunächst y aus Gl. (7),

dann $v = 0{,}001 + y\Delta$; $v_1 = 0{,}001 + y_1\Delta_1$; $e = \frac{v_1}{v}$

und aus Gl. (8)

$$\left(\frac{v_1}{v}\right)^m = e^m = \frac{p}{p_1}; \quad m = \frac{lg\frac{p}{p_1}}{lg e}.$$

Auf diese Weise ergeben sich für verschiedene Werthe von y_1, p_1 und p, welche zwischen solchen Grenzen gewählt sind, dass dieselben bei den hier vorzugsweise in Betracht kommenden technischen Anwendungen selten erheblich überschritten werden, die in den folgenden 3 Tabellen enthaltenen Werthe von y, e und m.

1) $y_1 = 1$.

	$p = 0{,}5$	1	2	4
$p_1 = 8$	$y = 0{,}8541$	0,8844	0,9182	0,9564
	$e = 0{,}0863$	0,1602	0,2962	0,5453
	$m = 1{,}1319$	1,1356	1,1393	1,1432
$p_1 = 4$	$y = 0{,}8882$	0,9211	0,9581	
	$e = 0{,}1592$	0,2949	0,5442	
	$m = 1{,}1315$	1,1353	1,1394	
$p_1 = 2$	$y = 0{,}9241$	0,9598		
	$e = 0{,}2934$	0,5428		
	$m = 1{,}1304$	1,1345		
$p_1 = 1$	$y = 0{,}9615$			
	$e = 0{,}5412$			
	$m = 1{,}1291$			

2) $y_1 = 0,9.$

	$p = 0,5$	1	2	4
$p_1 = 8$	$y = 0,7834$	0,8083	0,8357	0,8661
	$e = 0,0847$	0,1578	0,2930	0,5421
	$m = 1,1234$	1,1264	1,1293	1,1322
$p_1 = 4$	$y = 0,8100$	0,8369	0,8667	
	$e = 0,1571$	0,2922	0,5415	
	$m = 1,1235$	1,1268	1,1301	
$p_1 = 2$	$y = 0,8385$	0,8676		
	$e = 0,2910$	0,5405		
	$m = 1,1231$	1,1265		
$p_1 = 1$	$y = 0,8686$			
	$e = 0,5392$			
	$m = 1,1222$			

3) $y_1 = 0,8.$

	$p = 0,5$	1	2	4
$p_1 = 8$	$y = 0,7128$	0,7822	0,7532	0,7757
	$e = 0,0828$	0,1550	0,2891	0,5382
	$m = 1,1131$	1,1152	1,1172	1,1187
$p_1 = 4$	$y = 0,7318$	0,7527	0,7753	
	$e = 0,1546$	0,2889	0,5382	
	$m = 1,1139$	1,1164	1,1187	
$p_1 = 2$	$y = 0,7529$	0,7754		
	$e = 0,2881$	0,5376		
	$m = 1,1141$	1,1168		
$p_1 = 1$	$y = 0,7757$			
	$e = 0,5367$			
	$m = 1,1137$			

In jeder dieser 3 Tabellen findet man die Differenzen der nebeneinander stehenden Werthe von m nahe gleich gross ebenso wie die entsprechenden Differenzen der Werthe von $lg e$, so dass sich für einen gegebenen Werth von y_1 näherungsweise setzen lässt:

$$m = a + b . lg e,$$

unter b eine Constante und unter a eine Function von p_1 verstanden, welche mit grosser Annäherung durch die Formel

$$a = \alpha - \beta p_1 + \gamma \, lg p_1$$

ausgedrückt werden kann, so dass schliesslich

$$m = \alpha - \beta p_1 + \gamma \, lg p_1 + b \, lg e \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9$$

wird, während α, β, γ, b nur noch von y_1 abhängig bleiben. Insbesondere ergiebt sich auf Grund obiger Tabellen für

$$y_1 = 1: \quad m = 1{,}1334 - 0{,}0004 \, p_1 + 0{,}0188 \, lg p_1 + 0{,}0145 \, lg e$$

$$y_1 = 0{,}9: m = 1{,}1256 - 0{,}0006 \, p_1 + 0{,}0165 \, lg p_1 + 0{,}0117 \, lg e$$

$$y_1 = 0{,}8: m = 1{,}1166 - 0{,}0008 \, p_1 + 0{,}0124 \, lg p_1 + 0{,}0081 \, lg e,$$

worin p_1 in Atm. ausgedrückt vorausgesetzt ist und lg einen gewöhnlichen Logarithmus zur Basis 10 bedeutet. Die hiernach berechneten Werthe von m differiren von den Tabellenwerthen

für $y_1 =$ 1 0,9 0,8

um höchstens 0,0002 0,0004 0,0005.

Mit entsprechender Annäherung kann m für andere Werthe von y_1, welche $>$ 0,75 sind, nach Gl. (9) berechnet werden, wenn darin gesetzt wird:

$$\alpha = \quad 1{,}0014 + 0{,}192 \, y_1 - 0{,}06 \, y_1^2$$

$$\beta = \quad 0{,}0024 - 0{,}002 \, y_1$$

$$\gamma = -0{,}0852 + 0{,}194 \, y_1 - 0{,}09 \, y_1^2$$

$$b = -0{,}0495 + 0{,}104 \, y_1 - 0{,}04 \, y_1^2.$$

Zu einer einfacheren, wenn auch weniger genauen Formel für m führt die Bemerkung, dass die Werthe von m in den obigen 3 Tabellen sich mit p_1 erheblich weniger und weniger regelmässig ändern, als mit p, und dass, wenn man deshalb für diejenigen Werthe von m, welche gleichen Werthen von p und verschiedenen Werthen von p_1 entsprechen, ihre Mittelwerthe setzt, mit mindestens derselben Annäherung auch die Differenzen dieser Mittelwerthe einander gleich, also den in den Tabellen constanten Differenzen von $lg p$ proportional gesetzt werden können. Setzt man somit

$$m = a + b \, lg p,$$

so ist auch wegen $p = p_1 \left(\frac{r_1}{r}\right)^m = p_1 e^m$ nach Gl. (8)

$$m = a + b \, (lg p_1 + m \, lg e) = \frac{a + b \, lg p_1}{1 - b \, lg e} = \frac{\alpha + lg p_1}{\beta - lg e} \text{ mit } \alpha = \frac{a}{b}, \ \beta = \frac{1}{b}.$$

Auf Grund der obigen tabellarischen Ausrechnungen findet man, wenn wieder p_1 in Atm. ausgedrückt ist und lg einen Logarithmus zur Basis 10 bedeutet,

für $y_1 =$	1	0,9	0,8
$\alpha =$	81,95	111,85	201,04
$\beta =$	72,20	99,30	180,18

und die hiernach berechneten Werthe von m differiren von den Tabellenwerthen

für $y_1 =$	1	0,9	0,8
um höchstens	0,0017	0,0011	0,0013.

Für andere Werthe von $y_1 > 0{,}75$ kann m nach der Formel

$$m = \frac{81{,}95 + 2983\,(1 - y_1)^2 + lg p_1}{72{,}20 + 2705\,(1 - y_1)^2 - lg e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

berechnet werden.

Will man sich mit einer noch geringeren Annäherung begnügen, so kann man bemerken, dass der Exponent m in geringerem Grade von p_1 und e, als von y_1 abhängt, so dass er behufs einer ersten Annäherung als Function von y_1 allein dargestellt werden kann. In der That weichen die Mittel der je 10 einzelnen Werthe von m in den obigen Tabellen, nämlich

für $y_1 =$	1	0,9	0,8
$m =$	1,1350	1,1264	1,1158
um höchstens	0,0082	0,0058	0,0029

von den betreffenden Einzelwerthen ab, während sie von ihrem Hauptmittel $= 1{,}1257$ bis zu 0,0099 differiren. Jene Mittelwerthe lassen sich aber in der Formel

$$m = 1{,}035 + 0{,}1\,y_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

zusammenfassen, welche für $y_1 > 0{,}7$ aus ähnlichen Proberechnungen, wie die oben mitgetheilten, von Zeuner abgeleitet wurde. —

Wenn nun auf diese Weise der Exponent m in der vorausgesetzten Zustandsgleichung (8) den Umständen entsprechend angemessen bestimmt wird, so können auf die ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme stattfindende Zustandsänderung des in Rede stehenden Gemisches ohne Weiteres die Formeln in §. 20 angewendet werden, insoweit in denselben die Temperatur nicht vorkommt, deren Beziehungen zu p und v dort und hier wesentlich verschieden sind. Ist also ausser dem Anfangszustande das Expansionsverhältniss

$$e = \frac{v_1}{v}$$

gegeben, so ist nach §. 20, Gl. (4) die Expansionsarbeit pro 1 Kgr. des Gemisches:

$$E = \frac{p_1 v_1}{m-1}(1 - e^{m-1}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 12)$$

und unmittelbar nach Gl. (8) die Pressung im Endzustande

$$p = p_1 e^m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 13).$$

Durch p sind auch die übrigen davon abhängenden Grössen bestimmt für ein Gemisch von Wasser und Wasserdampf nach der Tabelle in §. 29, unter anderen die Grösse Δ, womit dann aus der Gleichung

$$v = \frac{v_1}{e} = w + y\Delta$$

auch die verhältnissmässige Dampfmenge im Endzustande

$$y = \frac{\frac{v_1}{e} - w}{\Delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

gefunden wird.

Handelt es sich um Compression, so kann freilich der Coefficient m, welcher in diesen Formeln den Anfangswerthen p_1, y_1 und dem gegebenen Compressionsverhältnisse $e = \frac{v_1}{v} > 1$ entspricht, nach obigen Regeln nicht direct bestimmt werden; man müsste vielmehr zu dem Ende die obigen Tabellen unter 1), 2) und 3) (oder andere entsprechende Ausrechnungen) zur Darstellung von m als Function der dortigen Grössen p, y und von $\frac{1}{e}$ benutzen. Indessen kann man in diesem für die Anwendungen weniger wichtigen Falle mit einem vorläufig angenommenen Werthe von m nach Gl. (13) und (14) die Grössen p und y berechnen und dann nach den oben für m aufgestellten Formeln, in welchen diese Werthe p und y für p_1 und y_1 sowie $\frac{1}{e}$ für e zu setzen sind, die Zulässigkeit des angenommenen Werthes von m prüfen. Die zur Compression pro 1 Kgr. aufzuwendende Arbeit ist

$$-E = \frac{p_1 v_1}{m-1}(e^{m-1} - 1).$$

§ 36. Mischung zweier Dampf- und Flüssigkeitsgemische von gleicher Art und verschiedenem Zustande.

Ein Gefäss A_1 enthalte m_1 Kgr. eines Gemisches von Dampf und gleichartiger Flüssigkeit; die Pressung sei $= p_1$, die Dampfmenge $= y_1$ in 1 Kgr. des Gemisches.

Ein zweites Gefäss A_2 enthalte m_2 Kgr. eines Dampf- und Flüssigkeitsgemisches von derselben Art wie das Gefäss A_1; die Pressung in A_2 sei $= p_2$, die Dampfmenge $= y_2$ in 1 Kgr. des Gemisches.

Wenn beide Gefässe in Communication gesetzt werden, so findet eine Mischung statt, eine nicht umkehrbare Zustandsänderung, deren stetiger Verlauf sich einer rechnungsmässigen Untersuchung entzieht. Dagegen ist es leicht, den Zustand zu ermitteln, welchen die Masse in den vereinigten Gefässen angenommen haben wird, nachdem die Bewegung aufgehört hat und eine gleichförmige Mischung eingetreten ist, falls die Wärmemenge $= Q$ gegeben ist, welche unterdessen etwa von aussen durch die Wandungen der Gefässe hindurch der Masse mitgetheilt wurde. Dieser Zustand ist bestimmt durch die Pressung $= p$ und die Dampfmenge $= y$ in 1 Kgr. des resultirenden Gemisches, vorausgesetzt dass letztere nicht > 1 gefunden wird als Zeichen des eingetretenen Zustandes der Ueberhitzung.

Eine erste Gleichung zur Bestimmung dieser beiden Unbekannten p und y ergiebt sich aus dem Umstande, dass das Gesammtvolumen sich nicht geändert hat. Ist nämlich V_1 das Volumen des ersten, V_2 das Volumen des zweiten Gefässes, so ist

$$V_1 = m_1 (w + y_1 \Delta_1); \quad V_2 = m_2 (w + y_2 \Delta_2)$$

und das Volumen des resultirenden Gemisches

$$V_1 + V_2 = (m_1 + m_2)(w + y\Delta),$$

folglich

$$(m_1 + m_2) y\Delta = m_1 y_1 \Delta_1 + m_2 y_2 \Delta_2 \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Ferner ist nach der allgemeinen Gleichung des Arbeitsvermögens — §. 11, Gl. (1) — für jedes der beiden ursprünglichen Gemische

$$d(L + U) = dM + dP + W.dQ.$$

Wenn man für jedes von beiden das Integral dieser Gleichung über den ganzen Verlauf ihrer gegenseitigen Mischung ausdehnt, wobei

$$\Delta U_1,\ P_1,\ Q_1 \text{ und } \Delta U_2,\ P_2,\ Q_2$$

die Aenderung des inneren Arbeitsvermögens, die Arbeit des äusseren Drucks

und die mitgetheilte Wärme für das erste resp. zweite Gemisch bedeuten sollen, so ergiebt sich bei Abstraction von Massenkräften und mit Rücksicht darauf, dass zu Anfang und zu Ende Ruhe stattfindet, die resultirende Aenderung der lebendigen Kraft L folglich für jeden von beiden Theilen $= 0$ ist,

$$\Delta U_1 = P_1 + W'Q_1, \quad \Delta U_2 = P_2 + W'Q_2.$$

Hieraus folgt

$$\Delta(U_1 + U_2) = W'Q \text{ oder } \Delta(AU_1 + AU_2) = Q,$$

weil die Arbeiten P_1 und P_2 nur von dem gegenseitigen Druck zwischen beiden Gemischen herrühren, somit $P_1 + P_2 = 0$ ist, und weil ebenso diejenigen Bestandtheile von Q_1 und Q_2, welche von dem gegenseitigen Wärmeaustausch herrühren, entgegengesetzt gleich sind. Indem nun die Körperwärme oder der Wärmewerth des inneren Arbeitsvermögens beider Gemische zusammen $= AU_1 + AU_2$

im Anfangszustande $= m_1(q_1 + y_1\varrho_1) + m_2(q_2 + y_2\varrho_2)$

und im Endzustande $= (m_1 + m_2)(q + y\varrho)$

ist, ergiebt sich

$$(m_1 + m_2)(q + y\varrho) = m_1(q_1 + y_1\varrho_1) + m_2(q_2 + y_2\varrho_2) + Q \quad . \quad . \quad (2)$$

In diesen Gleichungen (1) und (2) sind q, ϱ und Δ Functionen von p, aus der Gleichung, welche durch Elimination von y entsteht, ist p durch Probiren zu ermitteln, wonach sich y aus Gl. (1) ergiebt.

Wenn insbesondere $Q = 0$ ist und $p_1 > p_2$ vorausgesetzt wird, so ist für gewisse Anwendungen von Interesse die Frage nach derjenigen Wärme $= Q_1$ resp. Q_2, welche der in den communicirenden Gefässen nach erfolgter Mischung in Ruhe gekommenen Gesammtmasse mitgetheilt resp. entzogen werden müsste, um ihre Pressung von p bis p_1 zu erhöhen resp. bis p_2 zu erniedrigen. Die erstere Wärme ist nach §. 32, Gl. (2)

$$Q_1 = (m_1 + m_2)\left[q_1 - q + y\Delta\left(\frac{\varrho_1}{\Delta_1} - \frac{\varrho}{\Delta}\right)\right]$$

$$= (m_1 + m_2)\left[q_1 - q + y\Delta\frac{\varrho_1}{\Delta_1} - y\varrho\right]$$

oder, wenn für $y\Delta$ und $y\varrho$ die Werthe aus Gl. (1) und (2) substituirt werden,

$$Q_1 = (m_1 + m_2)\left[q_1 - q + \frac{m_1y_1\Delta_1 + m_2y_2\Delta_2}{m_1 + m_2}\frac{\varrho_1}{\Delta_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{m_1(q_1 + y_1\varrho_1) + m_2(q_2 + y_2\varrho_2)}{m_1 + m_2} + q\right]$$

$$= m_2 q_1 + m_1 y_1 \varrho_1 + m_2 y_2 \Delta_2 \frac{\varrho_1}{\Delta_1} - m_1 y_1 \varrho_1 - m_2 (q_2 + y_2 \varrho_2)$$

oder

$$Q_1 = m_2 \left[q_1 - q_2 + y_2 \Delta_2 \left(\frac{\varrho_1}{\Delta_1} - \frac{\varrho_2}{\Delta_2} \right) \right] \quad \ldots \ldots \ldots (3);$$

die specif. Dampfmenge y', welche nach Mittheilung dieser Wärme die resultirende Mischung besitzt, ist

$$y' = \frac{y \Delta}{\Delta_1} = \frac{m_1 y_1 \Delta_1 + m_2 y_2 \Delta_2}{(m_1 + m_2) \Delta_1} \quad \ldots \ldots \ldots (4).$$

Die Wärmemenge Q_1 ist, wie aus Gl. (3) und aus §. 32, Gl. (2) ersichtlich, derjenigen gleich, welche der Masse m_2 im Gefässe Δ_2 vor der Mischung hätte mitgetheilt werden müssen, um ihre Pressung bis p_1 zu erhöhen; ihre specif. Dampfmenge wäre dadurch zunächst

$$y_2' = \frac{y_2 \Delta_2}{\Delta_1}$$

geworden, und erst nach Herstellung der Communication zwischen beiden Gefässen hätte sich die mittlere specif. Dampfmenge

$$= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2'}{m_1 + m_2} = y'$$

ergeben.

Die Wärme Q_2 ergiebt sich offenbar aus Gl. (3) durch Vertauschung der Marke 1 mit der Marke 2 und Multiplication des ganzen Ausdrucks mit -1; sie ist also

$$Q_2 = - m_1 \left[q_2 - q_1 + y_1 \Delta_1 \left(\frac{\varrho_2}{\Delta_2} - \frac{\varrho_1}{\Delta_1} \right) \right]$$

$$= m_1 \left[q_1 - q_2 + y_1 \Delta_1 \left(\frac{\varrho_1}{\Delta_1} - \frac{\varrho_2}{\Delta_2} \right) \right] \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

= derjenigen Wärme, welche der Masse m_1 im Gefässe Δ_1 vor der Mischung hätte entzogen werden müssen, um ihre Pressung bis p_2 zu erniedrigen. Die specif. Dampfmenge der resultirenden Mischung nach Entziehung dieser Wärme ist

$$y'' = \frac{y \Delta}{\Delta_2} = \frac{m_1 y_1 \Delta_1 + m_2 y_2 \Delta_2}{(m_1 + m_2) \Delta_2} \quad \ldots \ldots \ldots (6).$$

III. Ueberhitzter Dampf.

§. 37. Erfahrungsmässige Grundlagen.

Um das Verhalten überhitzter Dämpfe mit Hülfe der allgemeinen Formeln der mechanischen Wärmetheorie unter beliebig gegebenen Umständen untersuchen zu können, ist die Kenntniss ihrer Zustandsgleichung. d. h. der Beziehung zwischen dem specif. Volumen v, der Pressung p und der Temperatur t resp. $T = 273 + t$ erforderlich. In allseitig befriedigender Weise und gleichmässig zutreffend für den ganzen Umfang des Zustandsgebietes vom Zustande der Sättigung bis zum entgegengesetzten Grenzzustande (dem Gaszustande), also von verschwindend kleiner bis zu unendlich grosser Ueberhitzung, hat diese Zustandsgleichung bisher nicht aufgestellt werden können, weil die dazu nöthigen erfahrungsmässigen Grundlagen noch nicht in genügendem Umfange vorhanden sind.

Dieselben betreffen zunächst die Abweichungen der Dämpfe vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze, welche indessen (insbesondere von Regnault) hauptsächlich nur für solche Zustände näher untersucht worden sind, welche dem Grenzzustande der Sättigung nicht nahe kommen. Wenn das specif. Volumen, die Pressung und die Temperatur für zwei verschiedene Zustände mit

$$v_0, p_0, t_0 \text{ und } v_1, p_1, t_1$$

bezeichnet werden, und wenn

$$m = \frac{v_1}{v_0} \text{ für } t_1 > t_0 \text{ und } p_1 = p_0,$$

$$m_1 = \frac{p_1}{p_0} \text{ für } t_1 > t_0 \text{ und } v_1 = v_0,$$

$$n = \frac{p_1 v_1}{p_0 v_0} \text{ für } t_1 = t_0 \text{ und } v_1 > v_0, \text{ also } p_1 < p_0$$

gesetzt wird, so sollte nach dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze

$$m = m_1 = \frac{T_1}{T_0} \text{ und } n = 1$$

sein. Die Regnault'schen Versuche aber ergaben m und m_1 bei gleichen Werthen von t_0 und t_1, nämlich $t_0 = 0$ und $t_1 = 100$ um so mehr

je grösser p_0 war, bei gleichen Werthen von p_0 zudem m etwas $> m_1$, endlich n bei gleichen Werthen von $t_0 = t_1$ um so mehr > 1, je grösser p_1 und $p_0 - p_1$ waren; die Abweichungen wachsen also mit der Verdichtung des Dampfes, d. h. mit seiner Annäherung an den Sättigungszustand. Beispielsweise für **Kohlensäuredampf** sind die gefundenen Werthe von m, m_1 und n in folgenden Tabellen zusammengestellt, wobei für die Pressungen die sie messenden Quecksilberhöhen, in Millimetern ausgedrückt, gesetzt sind.*

$$t_0 = 0;\ t_1 = 100.$$

$p_0 = p_1$	m	p_0	m_1
760	1,3710	758	1,3686
2520	1,3845	901	1,3694
		1743	1,3752
		3589	1,3860

$t_0 = t_1$	p_1	p_0	n	$t_0 = t_1$	p_1	p_0	n
3,28	764	1517	1,008	3,20	4876	14478	1,109
3,31	1423	2789	1,013	3,16	6820	12791	1,066
3,32	2164	4247	1,019	3,16	6820	20284	1,177
3,65	3186	6205	1,029	3,15	8395	15483	1,084
3,65	3185	11526	1,087	3,15	8394	20766	1,169
3,65	3186	11045	1,081	3,15	8395	20648	1,167
3,56	3807	7359	1,035	2,68	9618	17450	1,100
3,56	3807	11195	1,077	2,68	9620	20791	1,156
3,20	4877	9332	1,046	2,68	9616	20689	1,154
3,20	4877	14377	1,107				

Auf Wasserdampf haben sich die Regnault'schen Versuche in dieser Hinsicht noch nicht erstreckt. Zwar fand **Siemens**,** dass, wenn gesättigter Wasserdampf von 1 Atm. Pressung, also $t = 100^0$, getrennt von Wasser unter constantem atmosphärischem Druck weiter

um 10^0 $15{,}6^0$ $26{,}5^0$ $86{,}1^0$ erhitzt wird,
er sich 5 4 3 2 Mal

so stark ausdehnt, als atmosph. Luft; indessen bedürfen diese Angaben einer weiteren Bestätigung und Ergänzung, um als zuverlässige Grundlage für die Ableitung allgemeiner Formeln dienen zu können, indem **Fairbairn**

* Mém. de l'Acad. Roy. des Sc., T. 21, p. 112, 117, 388—393.

** Civil Engin. and Archit. Journ. 1852, p. 294.

und Tate* den Ausdehnungscoefficienten des wenig überhitzten Wasserdampfes zwar auch viel grösser fanden, als denjenigen der Luft, indessen mit der Ueberhitzung so schnell abnehmend, dass er im Widerspruch mit den obigen Angaben von Siemens schon wenige Grade über der Sättigungstemperatur dem Ausdehnungscoefficienten der Luft nahe gleich werden soll.

Andere Versuche, das Verhalten der Dämpfe betreffend, beziehen sich auf ihre specif. Wärme c_p bei constanter Pressung, welche namentlich auch von Regnault für eine grosse Zahl von Dämpfen bestimmt worden ist.** Ob und nach welchem Gesetze etwa diese Grösse mit dem Zustande des betreffenden Dampfes sich ändert, ist freilich mit Bestimmtheit noch nicht aufgeklärt. Für die Kohlensäure wurde zwar aus Versuchen, bei denen ihre Temperatur zwischen -30^0 und $+210^0$ lag, eine sehr merkliche Zunahme von c_p mit der Temperatur nachgewiesen, indem daraus (bei atmosphärischer Pressung) gefolgert werden konnte:

$$c_p = 0{,}1870 \quad 0{,}2145 \quad 0{,}2396$$
$$\text{für } t = \quad 0^0 \quad 100^0 \quad 200^0.$$

Indessen ist es möglich, dass dieser bedeutende Einfluss der Temperatur hauptsächlich auf einer der Kohlensäure eigenthümlichen Veränderlichkeit ihres Molekularzustandes beruht und nicht allgemein mit der (bei diesen Versuchen in der That nur sehr geringen) Abweichung vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze zusammenhängt; auch konnte Regnault bei anderen Versuchen, bei denen unter übrigens ähnlichen Umständen die Pressung der Kohlensäure im Verhältniss 1 : 8 verschieden gewählt wurde, einen Einfluss der Pressung auf c_p mit Sicherheit nicht erkennen.

Für Wasserdampf von atmosphärischer Pressung, für welchen Regnault früher $c_p = 0{,}475$ gefunden hatte, liegen 4 neuere Versuchsreihen vor, aus denen sich für die Temperaturintervalle

$t =$	127,7 bis 231,1;	137,7 bis 225,9;	124,3 bis 210,4;	122,7 bis 216,0
$c_p =$	0,4688	0,4811	0,4808	0,4796

als betreffende Mittelwerthe ergaben. Den ersten dieser Werthe erklärt Regnault selbst für weniger zuverlässig; aus den übrigen ergiebt sich im Mittel

$$c_p = 0{,}4805.$$

Uebrigens sind die obigen Temperaturintervalle zu wenig unter sich

* Phil. Magazine. Vol. XXI. 1861, p. 233.

** Er berichtet darüber im 2. Bande seiner „Relation des expériences entreprises pour déterminer les principales lois et les données numériques, qui entrent dans le calcul des machines à vapeur", welcher 1862 als Tome XXVI der Mém. de l'Acad. des Sciences de l'Inst. impér. de France erschienen ist

verschieden, als dass diese Versuche über eine etwaige Veränderlichkeit der specif. Wärme c_p des Wasserdampfes mit dem Grade seiner Ueberhitzung irgend einen Aufschluss gewähren könnten. Die Prüfung dieses Umstandes hat Regnault späteren Versuchen vorbehalten. —

In Betreff des Wasserdampfes sind ferner zweierlei Versuchsreihen von Hirn besonders werthvoll. Die erstere betrifft das direct durch Wägung bestimmte specif. Volumen v bei verschiedenen Pressungen p und Temperaturen t. Die wesentlichen Resultate dieser Versuche* sind in folgender Tabelle enthalten.

v	p Atm.	t	v	p Atm.	t
1,74	1	118,5	0,4822	4	165
1,85	1	141	0,522	4	200
0,92	2,25	200	0,5752	4	246
0,697	3	200	0,3758	5	162,5
0,591	3,5	196	0,414	5	205
0,6574	3,5	246,5			

Die andere, im Jahre 1866 in Gemeinschaft mit A. Cazin ausgeführte, Reihe von Versuchen betrifft die Zustandsänderung des überhitzten Wasserdampfes nach der adiabatischen Curve zunächst für den Fall, dass er im Anfangs- oder Endzustande gesättigt und seine Pressung der atmosphärischen gleich ist. Zur Begründung einer demnächst vorzunehmenden kleinen Modification der aus diesen Versuchen zu ziehenden Folgerung ist es nöthig, die Versuchsmethode hier kurz anzudeuten. Ein cylindrisches Gefäss von Kupfer war an den Enden mit durch Glasplatten verschlossenen Oeffnungen versehen, so dass zur Beobachtung der Vorgänge im Inneren des Gefässes durch dasselbe in der Richtung seiner Axe hindurch gegen einen hell beleuchteten weissen Schirm gesehen werden konnte. Aus diesem Gefässe, welches durch ein Oelbad längere Zeit auf constanter Temperatur t_1 erhalten wurde, so dass auch der dasselbe erfüllende überhitzte Wasserdampf diese Temperatur annehmen musste, liess man den Dampf, nachdem kurz vorher seine Pressung p_1 beobachtet worden war, durch eine plötzlich geöffnete so weite Mündung in die äussere Luft theilweise ausströmen, dass in der entsprechend kurzen Zeit, während welcher die Pressung des zurückbleibenden Dampfes dem äusseren Drucke p_2 gleich wurde, nur eine sehr kleine Wärmemenge aus dem Oelbade durch die Ge-

* G. A. Hirn, Théorie mécanique de la chaleur, première partie: Exposition analytique et expérimentale, 2. édit., 1865, p. 202.

fässwand hindurchgegangen, also dem Dampfe mitgetheilt worden sein konnte. Bei wiederholten Versuchen, derselben Anfangstemperatur t_1, nämlich derselben Temperatur des Oelbades entsprechend, wurde nun die anfängliche Pressung p_1 nach und nach so lange verändert, bis der nach der Ausströmung zurückbleibende Dampf gerade gesättigt war, was daran erkannt werden konnte, dass bei einer nur sehr wenig grösseren Anfangspressung, also bei sehr wenig geringerer Ueberhitzung sich vorübergehend Nebel von condensirtem Wasser im Inneren des Gefässes zeigten, während bei kleinerer Anfangspressung das Gefäss vollkommen durchsichtig blieb. Auf diesen besonderen Werth von p_1, bei welchem somit durch die bekannte atmosphärische Pressung nicht nur die ihr gleiche Pressung p_2, sondern auch als entsprechende Sättigungstemperatur die Temperatur t_2 (deren directe Beobachtung bei ihrer verschwindend kleinen Dauer kaum möglich gewesen wäre) für den Endzustand des zurückbleibenden Dampfes bestimmt ist, beziehen sich die folgenden zusammengehörigen Versuchswerthe von p_1, t_1, p_2, t_2.*

p_1 Atm.	t_1	p_2 Atm.	t_2	p_1 Atm.	t_1	p_2 Atm.	t_2
1,397	131,5	0,984	99,6	2,528	192,2	0,981	99,5
1,685	151,8	0,984	99,6	2,636	197,8	0,975	99,3
2,115	174,0	0,981	99,5	3,231	219,4	0,975	99,3
2,219	179,0	0,981	99,5	3,743	239,0	0,967	99,1
2,451	189,2	0,979	99,4	4,275	254,7	0,967	99,1

Sofern die vorstehend mitgetheilten Erfahrungen zu einer vollständig zuverlässigen Aufstellung der Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe, insbesondere auch des für uns vorzugsweise wichtigen Wasserdampfes nicht ausreichen, vielmehr verschiedene Formen einer solchen Zustandsgleichung sich angeben lassen, denen bei angemessener Bestimmung ihrer Constanten die Versuchswerthe innerhalb der Grenzen ihrer wahrscheinlichen Fehler entsprechen, so kann man bei der Wahl unter verschiedenen solchen möglichen Formen durch Gründe der Zweckmässigkeit sich mitbestimmen lassen. Indem aber der Zustand der Dämpfe durch Pressung und Temperatur gegeben zu sein pflegt, und indem unter den verschiedenen Arten von Zustandsänderungen besonders diejenige wichtig ist, welche ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme stattfindet, ist es angemessen, bei nahe gleich gutem Anschlusse an die erfahrungsmässigen Thatsachen einer solchen

* Comptes rendus, 31. Dec. 1866.

Form der Zustandsgleichung den Vorzug zu geben, welche eine möglichst einfache Berechnung von v als Function von p und t gestattet und welche möglichst einfache Gleichungen für die Zustandsänderung nach der adiabatischen Curve zur Folge hat. Jedenfalls muss sie den allgemeinen Gleichungen (8) bis (12) in §. 15 entsprechend abgeleitet werden, nämlich gemäss den Gleichungen:

$$dQ = c_p \frac{\partial T}{\partial v} dv + c_v \frac{\partial T}{\partial p} dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$= c_v\, dT + AT \frac{\partial p}{\partial T} dv \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

$$= c_p\, dT - AT \frac{\partial v}{\partial T} dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

$$A = \frac{\partial}{\partial p}\left(c_p \frac{\partial T}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(c_v \frac{\partial T}{\partial p}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

$$AT = (c_p - c_v) \frac{\partial T}{\partial v} \frac{\partial T}{\partial p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5),$$

worin

$$\frac{\partial v}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} = 1$$

ist.

§. 38. Zustandsgleichung der Dämpfe.

Sofern in dieser Gleichung die Zustandsgleichung eines Gases

$$pv = RT$$

als Grenzfall enthalten sein muss, liegt es nahe, sie versuchsweise der allgemeineren Form

$$PV = RT \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

anzupassen, unter R eine Constante, unter V aber eine solche Function von v und unter P eine solche Function von p verstanden, dass

$$lim. \frac{V}{v} = 1 \text{ ist für } v = \infty$$

$$\text{und } lim. \frac{P}{p} = 1 \text{ ist für } p = 0.$$

Aus der Art, wie die Dämpfe vom Gay-Lussac'schen Gesetze abweichen, folgt dann zunächst, dass sich $\frac{V}{v}$ abnehmend, $\frac{P}{p}$ zunehmend der Grenze 1 nähert, dass also ausser dieser Grenze

$$V > v \text{ und } P < p$$

sein muss. In der That ist für $t_1 > t_0$ und $p_1 = p_0$

$$\frac{v_1}{v_0} > \frac{T_1}{T_0}, \text{ also nach Gl. (1) auch } \frac{v_1}{v_0} > \frac{V_1}{V_0} \text{ oder } \frac{V_1}{v_1} < \frac{V_0}{v_0},$$

und indem hier $v_1 > v_0$ ist, so nimmt $\frac{V}{v}$ ab mit wachsendem v. Ebenso ist für $t_1 > t_0$ und $v_1 = v_0$

$$\frac{p_1}{p_0} > \frac{T_1}{T_0}, \text{ also nach Gl. (1) auch } \frac{p_1}{p_0} > \frac{P_1}{P_0} \text{ oder } \frac{P_1}{p_1} < \frac{P_0}{p_0},$$

und indem hier $p_0 < p_1$ ist, so nimmt $\frac{P}{p}$ zu mit abnehmendem p.

Mit den kürzeren Bezeichnungen

$$V' = \frac{dV}{dv}; \quad P' = \frac{dP}{dp}$$

folgt aus Gl. (1)

$$R\frac{\partial T}{\partial v} = PV'; \quad R\frac{\partial T}{\partial p} = P'V \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und damit

$$\text{für } dT = 0: \begin{cases} \dfrac{dQ}{dv} = \dfrac{ART}{P'V} = A\dfrac{P}{P'}, \text{ nach §. 37, Gl. (2),} \\ \dfrac{dQ}{dp} = -\dfrac{ART}{PV'} = -A\dfrac{V}{V'}, \text{ nach §. 37, Gl. (3),} \end{cases}$$

so dass in diesem Falle $\frac{dQ}{dv}$ nur von p, $\frac{dQ}{dp}$ nur von v abhängig wäre. Die Vergleichung dieser Folgerungen mit der Erfahrung kann u. A. dazu dienen, die Zulässigkeit der vorausgesetzten allgemeinen Form (1) der Zustandsgleichung zu prüfen. Insbesondere folgt aus der ersteren, weil für eine umkehrbare Aenderung des Wärmezustandes allgemein

$$W\,dQ = dU + p\,dv$$

ist — §. 13, Gl. (2) —, dass auf Grund von Gl. (1) im Falle $dT = 0$ auch

$$\frac{dU}{dv} = W\frac{dQ}{dv} - p = \frac{P}{P'} - p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

nur von p abhängig wäre.

Aus den Gleichungen (4) und (5), §. 37, folgt ferner mit Rücksicht auf obige Gleichungen (2) und gemäss Gl. (1)

$$c_p - c_v = \frac{AR^2T}{PVP'V'} = \frac{AR}{P'V'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$A = \frac{\partial}{\partial p}\left(c_p \frac{PV'}{R}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(c_v \frac{P'V}{R}\right)$$

$$AR = V' \frac{\partial}{\partial p}(Pc_p) - P' \frac{\partial}{\partial v}(Vc_v)$$

$$= V'\left(P'c_p + P\frac{\partial c_p}{\partial p}\right) - P'\left(V'c_v + V\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)$$

$$= P'V'(c_p - c_v) + PV'\frac{\partial c_p}{\partial p} - P'V\frac{\partial c_v}{\partial v}$$

oder wegen Gl. (4)

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} : \frac{\partial c_p}{\partial p} = PV' : P'V = \frac{V'}{V} : \frac{P'}{P} = \frac{\partial ln V}{\partial v} : \frac{\partial ln P}{\partial p} \quad \ldots\ldots (5).$$

Hiernach wäre, wenn c_v nur von p abhängig, also $\frac{\partial c_v}{\partial v} = 0$ wäre, auch $\frac{\partial c_p}{\partial p} = 0$, also c_p nur von v abhängig und umgekehrt, falls v und p als die den Wärmezustand bestimmenden unabhängig Veränderlichen vorausgesetzt werden. Wäre insbesondere c_v constant, so wäre nicht nur c_p, sondern auch $c_p - c_v$ eine Function nur von v, also nach Gl. (4): $P' = Const.$, und wenn c_p constant wäre, so wäre nicht nur c_v, sondern auch $c_p - c_v$ eine Function nur von p, somit nach Gl. (4): $V' = Const.$ Da nun P und V beziehungsweise die Grenzen p und v, also P' und V' die Grenze 1 haben, so wäre im Falle

$$c_v = Const.: \ P' = Const. = 1; \ P = p - b$$

$$c_p = Const.: \ V' = Const. = 1; \ V = v + a,$$

unter a und b positive Constante verstanden. Weil aber im ersten Falle

$$\text{für } p = 0: \ lim. \frac{P}{p} = lim. \left(1 - \frac{b}{p}\right) = \infty \text{ statt } = 1$$

wäre, während im zweiten Falle, wie es sein muss,

$$\text{für } v = \infty: \ lim. \frac{V}{v} = lim. \left(1 + \frac{a}{v}\right) = 1$$

ist, so erkennt man, dass, wenn eine der beiden specifischen Wärmen c_v und c_p behufs einer vorläufigen Annäherung constant vorausgesetzt werden soll, dieses gemäss Gl. (1) nur die letztere sein kann. Somit werde

$$c_p = Const., \ V = v + Const. = v + a$$

angenommen, weil auch diese Annahme hinsichtlich c_p den bisherigen Erfahrungen wenigstens nicht entschieden widerspricht.

Eine weitere Prüfung derselben gestatten die im vorigen §. erwähnten Versuche von Hirn und Cazin über die Expansion des Wasserdampfes nach der adiabatischen Curve. Nach Gl. (3) des vorigen §. und mit Rücksicht auf obige Gl. (2) ist nämlich für $dQ = 0$

$$c_p dT = AT \frac{R}{PV'} dp$$

oder wegen $V' = 1$ und wenn die Constante

$$\frac{AR}{c_p} = m$$

gesetzt wird,

$$\frac{dT}{T} = m \frac{dp}{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6.$$

Wegen $P < p$ ist also um so mehr, je grösser p ist,

$$\frac{dT}{T} > m \frac{dp}{p}; \quad ln \frac{T_1}{T_2} > m \, ln \frac{p_1}{p_2}; \quad \frac{T_1}{T_2} > \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^m,$$

falls $T_1 > T_2$, also $p_1 > p_2$; und wenn für die fraglichen Versuche, bei denen in allen Fällen p_2 nahe gleich gross war, nämlich = dem atmosphärischen Druck,

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^x$$

gesetzt wird, so müsste der dieser Gleichung entsprechende Werth von x mit p_1 etwas wachsen. Die Werthe von x, welche sich aus den 10 Gruppen zusammengehöriger Werthe von p_1, t_1, p_2, t_2 ergeben, sind

für p_1 =	1,397	1,685	2,115	2,219	2,451
x =	0,2343	0,2437	0,2373	0,2370	0,2353
für p_1 =	2,528	2,636	3,231	3,743	4,275
x =	0,2348	0,2360	0,2334	0,2358	0,2351

mit dem Mittelwerth $x = 0{,}236$. Diese Werthe von x lassen nun freilich eine Abhängigkeit von p_1 nicht erkennen, vielmehr auf einen constanten Werth schliessen, von welchem sie in ungesetzmässiger, zufälliger Weise nach beiden Seiten abweichen. Wenn man aber berücksichtigt, dass bei den fraglichen Versuchen die dem expandirenden Dampfe mitgetheilte Wärme Q nicht genau = 0, sondern positiv, wenn auch sehr klein war, so war t_1 etwas kleiner, als es im Falle $Q = 0$ unter übrigens gleichen Umständen bei denselben Werthen von p_1 und p_2) hätte sein müssen, es

ist also $\frac{T_1}{T_2}$ etwas zu klein beobachtet, somit x etwas zu klein gefunden worden, und zwar um so mehr zu klein, je grösser p_1, also t_1 war, je mehr Wärme also auch während der kleinen Versuchsdauer von dem Oelbade an den expandirenden Dampf, entsprechend der dabei von 0 bis $t_1 - t_2$ wachsenden Temperaturdifferenz, mitgetheilt werden musste. In Ermangelung einer specielleren Untersuchung des hier besprochenen Einflusses erscheint es daher einstweilen nicht in Widerspruch mit den fraglichen Versuchen, wenn dem Exponenten x ein mit p_1 etwas wachsender Werth beigelegt, somit P in Gl. (6) als eine solche Function von p angenommen wird, welche $< p$ ist und nur mit abnehmendem p sich der Grenze p nähert.

Die einfachste solche Function ist, unter b eine positive Constante verstanden,

$$P = p(1 - bp) \text{ oder } P = \frac{p}{1 + bp},$$

von denen jedoch die erstere höchstens bis zu mässigen Werthen von p zutreffend sein könnte. Denn bei constanter Temperatur nimmt jedenfalls v, also auch $V = v + a$ ab, wenn p wächst, was nach der Gleichung $PV = RT$ nur dann der Fall ist, wenn P beständig mit p wächst, wenn also P' immer positiv ist. Nun ist

$$\text{für } P = p(1 - bp):\ P' = 1 - 2bp,$$

$$\text{für } P = \frac{p}{1 + bp}:\ P' = \frac{1}{(1 + bp)^2},$$

also P' im zweiten Falle beständig positiv, im ersten dagegen nur so lange $p < \frac{1}{2b}$ ist.

Den bisherigen Erwägungen könnte also nun die Form

$$\frac{p(v + a)}{1 + bp} = RT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

der Zustandsgleichung entsprechen nebst einem constanten Werthe von c_p, während nach Gl. (4)

$$c_v = c_p - AR(1 + bp)^2 = c_p[1 - m(1 + bp)^2] \quad \ldots\ldots (8)$$

wäre und mit abnehmender Pressung sich wachsend der Grenze nähern würde:

$$lim.\ c_v = c_p(1 - m) \text{ mit } m = \frac{AR}{c_p}.$$

Die Beziehung zwischen p und T bei einer Zustandsänderung nach der adiabatischen Curve ergiebt sich nach Gl. (6)

$$\frac{dT}{T} = m\left(\frac{1}{p} + b\right)dp$$

$$lnT = m.lnp + mbp + Const.$$

oder

$$T = Const.\, p^m \,.\, e^{mbp} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden.

Die Zustandsgleichung (7) entwickelte zuerst Th. Reye* auf Grund der Voraussetzung, dass c_p constant und der Differentialquotient $\frac{dU}{dv}$ für $dT = 0$ (in Uebereinstimmung mit gewissen Versuchen von Joule und Thomson) proportional p^2 ist; er fand diese Gleichung bei entsprechender Bestimmung der Constanten a, b und R in sehr befriedigender Uebereinstimmung mit den Abweichungen, welche nach Regnault die Kohlensäure und selbst schon die permanenten Gase von dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze zeigen. In der That entspricht ihr nach Gl. (3) für $dT = 0$:

$$\frac{dU}{dv} = p(1 + bp) - p = bp^2.$$

Uebrigens lässt Gl. (8) erkennen, dass auch die Zustandsgleichung (7) in Verbindung mit der Annahme $c_p = Const.$ nicht allgemein bis zu beliebig grossen Pressungen zutreffend sein kann; denn sofern c_v nicht negativ werden kann, müsste jedenfalls

$$m(1 + bp)^2 < 1, \text{ also } p < \frac{1}{b}\left(\sqrt{\frac{1}{m}} - 1\right) \quad \ldots \quad (10)$$

sein. Betrachtet man z. B. für Wasserdampf den in der Tabelle, §. 19, angeführten Werth

$$n = \frac{c_1}{c} = 1,3$$

als die Grenze des Verhältnisses $\frac{c_p}{c_v}$, wenn p verschwindend klein wird, setzt also

$$\frac{1}{1-m} = 1,3, \text{ so wäre } m = 0,2308.$$

Wird dafür

$$m = 0,23 \text{ entsprechend } \frac{1}{1-m} = 1,2987$$

---

* Die mechanische Wärmetheorie und das Spannungsgesetz der Gase. Inaugural-Dissertation. Göttingen. 1861.

gesetzt, so ist die Bedingung für p:

$$p < \frac{1{,}085}{b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10, a).^{*}$$

Zur Bestimmung der Constanten a, b, R in der Zustandsgleichung (7) insbesondere für Wasserdampf kann man bemerken, dass, wenn für eine solche Zustandsänderung desselben, welche ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme stattfindet,

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^x$$

gesetzt wird, aus den betreffenden Versuchen von Hirn und Cazin im Mittel x etwas $> 0{,}236$ gefolgert werden konnte; indem aber andererseits nach Gl. (9)

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^m . e^{mb\,(p_1-p_2)}$$

ist, so ergiebt sich durch Gleichsetzung beider Ausdrücke von $\frac{T_1}{T_2}$

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{x-m} = e^{mb\,(p_1-p_2)}; \; b = \frac{(x-m)\, ln \frac{p_1}{p_2}}{m\,(p_1-p_2)} \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Die Zustandsgleichung (7) muss namentlich auch dem Grenzzustande der Sättigung möglichst angepasst werden, für welchen die zusammengehörigen Werthe von v, p und T (durch die Tabelle in §. 29) z. Z. sicherer bekannt sind, als für den Zustand der Ueberhitzung; sind also

$$v', p', T' \text{ und } v'', p'', T''$$

zwei Gruppen solcher zusammengehörigen Werthe für weit auseinander liegend zu wählende Zustände gesättigten Wasserdampfes, so folgt aus den Gleichungen

$$v' + a = \frac{RT'}{p'}(1 + bp'); \quad v'' + a = \frac{RT''}{p''}(1 + bp'')$$

durch Elimination von a

---

* Mit $P = p\,(1-bp)$ hätte sich ergeben:

$$c_v = c_p\left(1 - \frac{m}{1-2bp}\right)$$

mit dem Grenzwerthe $lim.\ c_v = c_p\,(1-m)$ wie oben. Die Bedingung dafür, dass c_v nicht negativ werden kann, wäre aber noch ungünstiger:

$$p < \frac{1-m}{2b} \text{ d. h. } < \frac{0{,}385}{b} \text{ mit } m = 0{,}23.$$

$$\frac{v'-v''}{R} = \frac{T'}{p'} - \frac{T''}{p''} + b(T'-T'')$$

und daraus wegen $R = \frac{mc_p}{A}$

$$b = \frac{\frac{T'}{p'} - \frac{T''}{p''} - \frac{A}{mc_p}(v'-v'')}{T''-T'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12.$$

Aus Gl. (11) und (12) folgt

$$\left(\frac{x}{m} - 1\right)\frac{T''-T'}{p_1-p_2}\, ln\frac{p_1}{p_2} = \frac{T'}{p'} - \frac{T''}{p''} - \frac{A}{mc_p}(v'-v'')$$

$$m = \frac{x\frac{T''-T'}{p_1-p_2}\, ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{A}{c_p}(v'-v'')}{\frac{T''-T'}{p_1-p_2}\, ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{T'}{p'} - \frac{T''}{p''}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13$$

Ist hieraus m gefunden, so folgt $R = \frac{mc_p}{A}$, b aus Gl. (11) oder (12); schliesslich ist a der Tabelle in §. 29 und zugleich den Hirn'schen Versuchswerthen von v für überhitzten Wasserdampf möglichst anzupassen. Sind die Pressungen in Atm. statt in Kgr. pro Quadratm. ausgedrückt, so muss das Glied $\frac{A}{c_p}(v'-v'')$ in Gl. (13) mit 10333 multiplicirt und der Ausdruck für R, nämlich $\frac{mc_p}{A}$ durch dieselbe Zahl dividirt werden.

Bei den Versuchen von Hirn und Cazin war im Mittel

$$p_1 = 2{,}628 \text{ und } p_2 = 0{,}977 \text{ Atm.}$$

Setzt man ferner gemäss §. 29

$$p' = 0{,}5 \text{ Atm.} \quad t' = 81{,}71 \quad v' = 3{,}1718$$
$$p'' = 8 \quad „ \quad t'' = 170{,}81 \quad v'' = 0{,}2339$$

und $A = \frac{1}{424}$, $c_p = 0{,}48$, so folgt aus Gl. (13

$$m = 0{,}2109 + 0{,}0755\, x.$$

Der oben gemäss §. 19 angenommene Werth $m = 0{,}23$, welchem hiernach $x = 0{,}253$ entsprechen würde, erscheint somit nicht unpassend. Mit diesen Werthen von m und x ergiebt sich

$$R = 0{,}00453 \text{ und nach Gl. (11): } b = 0{,}06,$$

genauer $b = 0{,}05994$, wofür aber 0,06 gesetzt werden mag. Nach Gl. 7 ist jetzt p in Atm. ausgedrückt),

$$a = 0{,}00453\, T\left(\frac{1}{p} + 0{,}06\right) - v,$$

wonach sich für gesättigten Wasserdampf gemäss der Tabelle in §. 29

für $p = 0{,}5$ 1 2 3 4 6 8 Atm.

$a = 0{,}1383;\ 0{,}1406;\ 0{,}1386;\ 0{,}1375;\ 0{,}1372;\ 0{,}1374;\ 0{,}1380;$

im Mittel $a = 0{,}1382$ ergiebt, und gemäss den Hirn'schen Bestimmungen von v für überhitzten Wasserdampf (§. 37)

$a = 0{,}1399$ 0,1379 0,1609 0,1458 0,1435 0,1562
0,1329 0,1422 0,1536 0,1371 0,1490

mit dem Mittelwerth $a = 0{,}1454$. Setzt man hiernach im Durchschnitt $a = 0{,}14$, so wird die Zustandsgleichung des Wasserdampfes:

$$\frac{p(v + 0{,}14)}{1 + 0{,}06\,p} = 0{,}00453\, T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

worin p in Atm. ausgedrückt vorausgesetzt ist. Uebrigens wird diese Gleichung kaum für Pressungen über 8 Atm. als hinlänglich zutreffend zu betrachten sein, weil ihr entsprechend nach Gl. (8) und (10, a) schon für

$$p = \frac{1{,}085}{0{,}06} = 18{,}1 \text{ Atm.}$$

$c_v = 0$ werden würde.

Um bei der Voraussetzung $c_p = Const.$, also $V = v + a$, diese Einschränkung, die Gültigkeit der Zustandsgleichung $PV = RT$ betreffend, zu vermeiden, müsste man mit Rücksicht darauf, dass nach Gl. (4)

$$c_v = c_p - \frac{AR}{P'} = c_p\left(1 - \frac{m}{P'}\right) \text{ mit } m = \frac{AR}{c_p}$$

ist, für P eine solche Function wählen, dass für jeden Werth von p nicht nur $P' > 0$, sondern sogar $P' > m$ ist, was in Verbindung mit den früher festgestellten Bedingungen

$$P < p \text{ und } \lim \frac{P}{p} = 1 \text{ für } p = 0$$

darauf hinauskommt, P' so zu wählen, dass

$$m < P' \leq 1 \text{ und zwar } \lim . P' = 1 \text{ für } p = 0$$

ist. Diesen Bedingungen könnte am einfachsten entsprochen werden durch die Annahme

$$P' = \frac{1 + bp}{1 + p} \text{ mit } m < b < 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Danach wäre mit Rücksicht darauf, dass für $p = 0$ bei gegebener Temperatur

$$v = \infty, \text{ also auch } V = \infty, \text{ somit } P = 0$$

sein muss,

$$P = \int_0^p \frac{1 + bp}{1 + p}\, dp = b \int_0^p \frac{1 + p + \frac{1}{b} - 1}{1 + p}\, dp$$

$$= b \int_0^p \left(dp + \frac{1-b}{b} \frac{dp}{1 + p} \right) = bp + (1-b)\, ln\, (1 + p)$$

und somit die Zustandsgleichung:

$$[bp + (1-b)\, ln\, (1 + p)]\, (v + a) = RT \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

Nachdem die Constanten a, b und R angemessen bestimmt wären, könnte zwar hieraus immer noch mit Leichtigkeit v für gegebene Werthe von p und t berechnet werden, aber die Formeln für eine Zustandsänderung nach der adiabatischen Curve würden sehr unbequem; schon die Beziehung zwischen p und t führt nach Gl. (6) auf das Integral

$$\int \frac{dp}{bp + (1-b)\, ln\, (1 + p)},$$

welches tabellarisch durch mechanische Quadratur berechnet werden müsste. —

Schliesslich ist zu bemerken, dass die Zustandsgleichung

$$P(v + a) = RT,$$

unter P eine Function von p verstanden, also z. B. die Gleichung (7) oder (16), nicht nothwendig einen constanten Werth von c_p voraussetzt, sondern auch dem allgemeineren Falle entspricht, dass c_p eine Function der Temperatur ist. Setzt man nämlich

$$PV = RT \text{ und } c_p = f(T),$$

so folgt mit Rücksicht auf Gl. (2)

$$\frac{\partial c_p}{\partial p} = f'(T) \frac{\partial T}{\partial p} = f'(T) \frac{P'V}{R}$$

und damit aus Gl. (5)

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial c_p}{\partial p} \frac{PV'}{P'V} = f'(T) \frac{PV'}{R}.$$

Andererseits ist nach Gl. (4)

$$c_v = c_p - \frac{AR}{P'V'} = f(T) - \frac{AR}{P'V'},$$

folglich mit Rücksicht auf Gl. (2)

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = f'(T)\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{ARV''}{P'V'^2} = f'(T)\frac{PV'}{R} + \frac{ARV''}{P'V'^2},$$

so dass die beiden Ausdrücke von $\frac{\partial c_v}{\partial v}$ übereinstimmen, wenn

$$V'' = 0;\; V' = Const. = 1;\; V = v + a$$

gesetzt wird. Gemäss den Regnault'schen Versuchen über die specif. Wärme der Kohlensäure könnte etwa

$$c_p = c_1 \frac{\alpha + T}{\beta + T} \text{ mit } \alpha < \beta$$

gesetzt werden, unter c_1 den Grenzwerth verstanden, welchem sich c_p mit zunehmendem Grade der Ueberhitzung nähert. In Betreff des Wasserdampfes ist aber eine weitere Verfolgung dieser allgemeineren Annahme hinsichtlich c_p vorläufig ohne Nutzen, weil die vorhandenen Versuche zur Bestimmung der Constanten α, β und c_1 nicht ausreichen.

§. 39. Andere Form der Zustandsgleichung.

Aus den Versuchen von Hirn und Cazin (§. 37) ist zu folgern, dass bei Zustandsänderungen ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme die absolute Temperatur des überhitzten Wasserdampfes sehr nahe einer constanten Potenz der Pressung proportional gesetzt werden kann. Diese Folgerung möge jetzt, nachdem die anderweitigen Annahmen des vorigen §. zu einer ganz befriedigenden und zugleich für die Anwendung günstigen Form der Zustandsgleichung nicht geführt haben, als für Dämpfe allgemein gültiges Gesetz um so mehr vorläufig zu Grunde gelegt werden, als sich auf Grund desselben besonders für Zustandsänderungen nach der adiabatischen Curve möglichst einfache Formeln erwarten lassen, welche den entsprechenden Formeln für Gase ähnlich oder gleich gebildet sind. Um diese Uebereinstimmung in der Form möglichst vollständig zu erzielen, werde — entsprechend §. 20 unter 3) — das fragliche Gesetz geschrieben in der Form:

$$dQ = 0;\; T = ap^{\frac{n-1}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

unter a und n Constante verstanden, von denen letztere den Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{c_p}{c_v}$ für unendlich grosse Ueberhitzung des Dampfes, d. h. für den Gaszustand bedeutet. Aus dieser Gl. (1) folgt

$$\frac{dT}{dp} = a\frac{n-1}{n}p^{\frac{n-1}{n}-1} = \frac{n-1}{n}\frac{T}{p} \quad \ldots \ldots \quad 2,$$

während nach §. 37, Gl. (3) unter derselben Voraussetzung $dQ = 0$ auch

$$\frac{dT}{dp} = \frac{AT}{c_p\frac{\partial T}{\partial v}}$$

ist, wobei $1 : \frac{\partial T}{\partial v}$ statt $\frac{\partial v}{\partial T}$ geschrieben wurde, weil v und p als die den Wärmezustand charakterisirenden unabhängig Veränderlichen vorausgesetzt werden; aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke von $\frac{dT}{dp}$ folgt

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{n}{n-1}\frac{A}{c_p}p \quad \ldots \ldots \quad 3.$$

Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus der ersten Hauptgleichung (4) in §. 37

$$A = \frac{n}{n-1}A - \frac{\partial}{\partial v}\left(c_v\frac{\partial T}{\partial p}\right); \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(c_v\frac{\partial T}{\partial p}\right) = \frac{1}{n-1}A$$

$$c_v\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{1}{n-1}Av + F(p) \quad \ldots \ldots \quad 4,$$

unter $F(p)$ eine Function nur von p verstanden, und aus der zweiten Hauptgleichung (5) in §. 37

$$AT = (c_p - c_v)\frac{n}{n-1}\frac{A}{c_p}p\frac{\partial T}{\partial p}; \quad c_v\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{n-1}{n}\frac{c_pc_v}{c_p-c_v}\frac{T}{p}.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit Gl. (4)

$$\frac{(n-1)^2}{n}\frac{1}{A}\frac{c_pc_v}{c_p-c_v}T = pv + F_1(p) \quad \ldots \ldots \quad 5,$$

unter $F_1(p) = (n-1)\frac{p}{A}F(p)$ eine andere noch näher zu bestimmende Function von p verstanden. Dieselbe, folglich auch $F(p)$ ist dadurch bestimmt, dass Gl. (5) u. A. die Zustandsgleichung $RT = pv$ eines Gases als Grenzfall in sich begreifen muss. Für diesen Grenzfall ist

$$\frac{c_p}{c_v} = n \text{ und } c_p - c_v = AR \text{ (§. 19, Gl. 1)},$$

folglich $\frac{(n-1)^2}{n}\frac{1}{A}\frac{c_pc_v}{c_p-c_v} = \frac{(n-1)^2}{n}\frac{1}{A}\frac{nc_v}{n-1} = \frac{(n-1)c_v}{A} = \frac{c_p-c_v}{A} = R;$

Gl. (5) geht also über in

$$RT = pv + F_1(p),$$

woraus folgt:

$$F_1(p) = 0, \text{ also auch } F(p) = 0.$$

Die Zustandsgleichung (5) des Dampfes lässt sich nun schreiben:

$$pv = \frac{(n-1)^2}{n}\frac{1}{A}\frac{T}{\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}} \text{ oder } \frac{A}{c_v}-\frac{A}{c_p} = \frac{(n-1)^2}{n}\frac{T}{pv} \quad \ldots (6),$$

worin aber c_v und c_p im Allgemeinen veränderliche Grössen sind, welche mit v, p, T durch die Gleichungen (3) und (4)

$$\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{n}{n-1}\frac{A}{c_p}p; \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{1}{n-1}\frac{A}{c_v}v \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

zusammenhängen. Auf keinen Fall sind c_v und c_p beide constant, weil sonst Gl. (6) allgemein die Zustandsgleichung eines Gases wäre.

Die Substitution von $\frac{A}{c_v}$ und $\frac{A}{c_p}$ aus den Gleichungen (7) in Gl. (6) liefert die partielle Differentialgleichung

$$(n-1)\frac{1}{v}\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{n-1}{n}\frac{1}{p}\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{(n-1)^2}{n}\frac{T}{pv}$$

$$T = \frac{n}{n-1}p\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{1}{n-1}v\frac{\partial T}{\partial v} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Das allgemeine Integral derselben ist*

$$\varphi(x, y) = 0,$$

unter φ das Zeichen einer willkürlichen Function verstanden, wenn $x =$ Const. das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dT}{T} = \frac{dv}{-\frac{1}{n-1}v} = -(n-1)\frac{dv}{v},$$

also $x = ln\,T + (n-1)\,ln\,v = ln\,(Tv^{n-1})$ oder $x = Tv^{n-1}$

und $y =$ *Const.* das Integral der Differentialgleichung

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{\frac{n}{n-1}p} = \frac{n-1}{n}\frac{dp}{p},$$

also $y = ln\,T - \frac{n-1}{n}ln\,p = ln\,\frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}}$ oder $y = \frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}}$

---

* Siehe u. A. J. A. Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, Nr. 774 und 775.

ist, so dass also die allgemeine Form der Zustandsgleichung von Dämpfen auf Grund des Gesetzes Gl. (1) sein würde:*

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(Tv^{n-1}, \frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots (9).$$

Zur Bestimmung der Function φ müssen weitere Erfahrungen in Betreff des Verhaltens der Dämpfe, z. B. in Betreff ihrer specif. Wärmen c_v und c_p, zu Hülfe genommen, oder in Ermangelung derselben gewisse Annahmen gemacht werden vorbehaltlich ihrer nachträglichen Rechtfertigung durch die genügende Uebereinstimmung der daraus gezogenen Folgerungen mit der Gesammtheit aller vorliegenden erfahrungsmässigen Thatsachen. Zu den einfachsten Resultaten führen die beiden Annahmen, dass c_p nur von p oder c_v nur von v abhängig sei.

1) Ist c_p nur von p abhängig, so folgt aus der ersten der Gleichungen (7)

$$T = \frac{n}{n-1}\frac{A}{c_p}pv + f(p)$$

oder

$$RT = pv + Sp^{\frac{n-1}{n}} \text{ mit } R = \frac{n-1}{n}\frac{c_p}{A} \ldots\ldots\ldots (10)$$

---

* Dass die Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0 \text{ mit } x = Tv^{n-1} \text{ und } y = \frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}}$$

in der That der Differentialgleichung (8) entspricht, was für eine Function von x und y auch $\varphi(x, y)$ bedeuten mag, kann leicht nachträglich verificirt werden, indem aus den Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} = 0$$

folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von x und y

$$\left[T(n-1)v^{n-2} + v^{n-1}\frac{\partial T}{\partial v}\right]\left[T\left(-\frac{n-1}{n}p^{-\frac{n-1}{n}-1}\right) + p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{\partial T}{\partial p}\right] - v^{n-1}\frac{\partial T}{\partial p}p^{-\frac{n-1}{n}}\frac{\partial T}{\partial v},$$

welche Gleichung durch Reduction auf die Form von Gl. (8) gebracht werden kann.

und wenn $f(p) = \frac{S}{R} p^{\frac{n-1}{n}}$ gesetzt wird; dabei sind R und S Functionen nur von p. Die Gleichung lässt sich auch schreiben

$$R \frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}} = p^{\frac{1}{n}} v + S = \left(\frac{p^{\frac{n-1}{n}}}{T}\right)^{\frac{1}{n-1}} (Tv^{n-1})^{\frac{1}{n-1}} + S$$

$$\text{oder } Ry - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n-1}} - S = 0 \text{ mit } x = Tv^{n-1},\ y = \frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Wenn aber diese Gleichung, unter R und S Functionen nur von p verstanden, unter die allgemeine Form der Gl. (9) soll begriffen werden können, so müssen R und S constant sein. Mit $R = Const.$ wäre dann auch

$$c_p = Const.,$$

während für c_v sich aus Gl. (6) ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_p}{c_v} &= 1 + \frac{(n-1)^2}{n} \frac{c_p}{A} \frac{T}{pv} = 1 + (n-1) \frac{RT}{pv} \\ &= 1 + (n-1)\left(1 + \frac{S}{vp^{\frac{1}{n}}}\right) = n + \frac{(n-1)S}{vp^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11).$$

Wenn v in's Unendliche wächst, so nähert sich c_v der Grenze $\frac{1}{n} c_p$. Je grösser v ist, desto mehr verschwindet auch in der Zustandsgleichung das Glied $Sp^{\frac{n-1}{n}}$ gegen pv, und geht sie über in die Zustandsgleichung eines Gases: $RT = pv$.

Sind v_0, p_0, T_0 und v_1, p_1, T_1 die Werthe von v, p, T für zwei verschiedene Zustände eines Dampfes, und ist $T_1 > T_0$, so ist nach Gl. (10)

$$\text{für } p_1 = p_0: \qquad \frac{v_1}{v_0} = m = \frac{RT_1 - Sp_0^{\frac{n-1}{n}}}{RT_0 - Sp_0^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$\text{und für } v_1 = v_0: \qquad \frac{p_1}{p_0} = m_1 = \frac{RT_1 - Sp_1^{\frac{n-1}{n}}}{RT_0 - Sp_0^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Sofern $n > 1$ ist, die Constanten R und S positiv sind und $Sp_0^{\frac{n-1}{n}} < RT_0$ ist, sind hiernach die Verhältnisse m und $m_1 > \frac{T_1}{T_0}$ um so mehr je grösser p_0 ist, und ist bei gleichen Werthen von T_1, T_0 und p_0 auch $m > m_1$, ganz in Uebereinstimmung mit den in §. 37 erwähnten Folgerungen aus Regnault's Versuchen.

Die Zustandsgleichung (10), auf andere Weise abgeleitet, ist zuerst von Zeuner aufgestellt worden.* Um ihre Constanten R, S, n insbesondere für Wasserdampf zu bestimmen, werde nach Regnault $c_p = 0{,}48$ angenommen; mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen R, n und c_p reducirt sich dadurch die Zahl der noch zu bestimmenden Constanten auf zwei, wobei zu bemerken ist, dass die Gleichung

$$R = \frac{n-1}{n}\frac{c_p}{A}$$

die Pressungen in Kgr. pro Quadratm. ausgedrückt voraussetzt. Hier sollen dieselben in Atm. ausgedrückt werden; dann ist

$$R = \frac{n-1}{n}\frac{c_p}{10333A} = \frac{424.0{,}48}{10333}\frac{n-1}{n} = 0{,}019696\frac{n-1}{n}.$$

Zur Bestimmung des Factors $\frac{n-1}{n}$, welcher nach den Versuchen von Hirn und Cazin etwas $> 0{,}236$ ist, mögen die zusammengehörigen Werthe von v, p und T für gesättigten Wasserdampf gemäss der Tabelle in §. 29 benutzt werden. Sind

$$v', p', T' \text{ und } v'', p'', T''$$

zwei Gruppen solcher zusammengehörigen Werthe, so folgt aus den Gleichungen

$$RT' = p'v' + Sp'^{\frac{n-1}{n}} \text{ und } RT'' = p''v'' + Sp''^{\frac{n-1}{n}}$$

durch Elimination von S

$$\frac{RT''-p''v''}{RT'-p'v'} = \left(\frac{p''}{p'}\right)^{\frac{n-1}{n}} \text{ mit } R = 0{,}019696\frac{n-1}{n}.$$

Hieraus ergiebt sich z. B. mit

$$\left.\begin{matrix} p' = 0{,}5 \text{ Atm.} & t' = 81{,}71 & v' = 3{,}1718 \\ p'' = 8 \quad ,, & t'' = 170{,}81 & v'' = 0{,}2339 \end{matrix}\right\} \frac{n-1}{n} = 0{,}249.$$

In runder Zahl werde dafür gesetzt:

$$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{4}; \text{ also } n = \frac{4}{3} \text{ und } R = 0{,}004924.$$

Schliesslich bleibt die Constante

$$S = (0{,}004924\,T - pv)\sqrt[4]{\frac{1}{p}}$$

* Zeitschr. des Vereins deutscher Ingen., Bd. XI, S. 1, und „Civilingenieur", XIII. Jahrg., 6. Heft.

den zusammengehörigen Werthen von v, p, T für gesättigten Wasserdampf nach §. 29 und für überhitzten Wasserdampf nach den Versuchen von Hirn (§. 37) möglichst anzupassen. Folgende Tabelle der so berechneten Werthe von S lässt erkennen, in welchem Grade die Gleichung (10) den Versuchen sich anschliesst.

Gesättigter Wasserdampf.				Versuche von Hirn.	
p Atm.	S	p Atm.	S	S	S
0,2	0,1991	4	0,1836	0,1878	0,1880
0,5	0,1911	6	0,1852	0,1885	0,1612
1	0,1862	8	0,1868	0,2115	0,1704
2	0,1836	10	0,1884	0,1809	0,1801
3	0,1832	12	0,1898	0,1761	0,1775
					0,1897

Die Hirn'schen Versuche sind hier in derselben Reihenfolge zu Grunde gelegt, wie sie in der betreffenden Tabelle von §. 37 aufgeführt wurden; dem Mittel $S = 0{,}1829$ dieser 11 Specialwerthe von S ist übrigens ein geringeres Gewicht beizulegen, als dem Mittel $S = 0{,}1877$ der 10 Werthe für gesättigten Dampf. Wird das Generalmittel $= 0{,}186$ angenommen, nahe übereinstimmend mit dem Werthe von S für den am genauesten bekannten gesättigten Dampf von atmosphärischer Pressung, so ist also überhaupt in der Zustandsgleichung (10) für Wasserdampf zu setzen:

$$n = \frac{4}{3}; \quad \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4}; \quad R = 0{,}004924; \quad S = 0{,}186 \quad \ldots\ldots \quad (12),$$

wobei, was R und S betrifft, die Pressung p in Atm. ausgedrückt vorausgesetzt ist.

2) Ist c_v nur von v abhängig, so folgt aus der zweiten der Gleichungen (7)

$$T = \frac{1}{n-1} \frac{A}{c_v} pv + f(v)$$

oder

$$RT = pv + \frac{S}{v^{n-1}} \text{ mit } R = (n-1)\frac{c_v}{A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

und wenn $f(v) = \frac{S}{Rv^{n-1}}$ gesetzt wird; dabei sind R und S Functionen nur von v. Die Gleichung lässt sich auch schreiben

$$RTv^{n-1} = pv^n + S = \left(\frac{p^{\frac{n}{n}}}{T}\right)^{\frac{n}{n-1}} \cdot (Tv^{n-1})^{\frac{n}{n-1}} + S$$

$$\text{oder } Rx - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{n-1}} - S = 0 \text{ mit } x = Tv^{n-1},\ y = \frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Wenn aber diese Gleichung, unter R und S Functionen nur von r verstanden, unter die allgemeine Form der Gl. (9) soll begriffen werden können, so müssen R und S constant sein. Mit $R = Const.$ wäre dann auch

$$c_v = Const.,$$

während für c_p sich aus Gl. (6) ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_v}{c_p} &= 1 - \frac{(n-1)^2 c_v}{n} \frac{T}{A pv} = 1 - \frac{n-1}{n} \frac{RT}{pv} \\ &= 1 - \frac{n-1}{n}\left(1 + \frac{S}{pv^n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S}{pv^n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 14.$$

Wenn v in's Unendliche wächst, so nähert sich c_p der Grenze nc_v. Je grösser v ist, desto mehr verschwindet auch in der Zustandsgleichung das Glied $\frac{S}{v^{n-1}}$ gegen pv, und geht sie über in die Zustandsgleichung eines Gases: $RT = pv$.

Ebenso wie es oben in Betreff der Gleichung (10) geschehen ist, lässt sich auch ebenso leicht erkennen, dass sich die Form (13) der Zustandsgleichung ganz in Uebereinstimmung befindet mit den in §. 37 erwähnten Folgerungen aus Regnault's Versuchen bezüglich der Verhältnisse $\frac{r_1}{r_0}$ für $p_1 = p_0$ und $\frac{p_1}{p_0}$ für $v_1 = v_0$. Sie wurde, auf andere Weise abgeleitet, zuerst von Hirn,* später und unabhängig davon auch von G. Schmidt** als Zustandsgleichung der Dämpfe aufgestellt.

Was insbesondere für Wasserdampf die Constanten R, S und n der Gl. (13) betrifft, so mag der zuvor unter 1) bestimmte abgerundete Werth $n = \frac{4}{3}$ hier beibehalten werden, weil er mit $\frac{n-1}{n} = \frac{1}{4}$ den Versuchen von Hirn und Cazin genügend entspricht und zugleich bequem für die Rechnung ist. Sind dann wieder

$$v',\ p',\ T' \text{ und } v'',\ p'',\ T''$$

zwei Gruppen zusammengehöriger Werthe von v, p, T für gesättigten als den am besten bekannten Wasserdampf, so folgt aus den Gleichungen

* Mém. sur la détente de la vapeur surchauffée par G. A. Hirn et A. Cazin. Ann. de Chim. et de Phys., 4e série, t. X.

** Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1867.

$$RT' = p'v' + \frac{S}{v'^{n-1}} \text{ und } RT'' = p''v'' + \frac{S}{v''^{n-1}}$$

durch Elimination von S

$$R = \frac{p'v'^n - p''v''^n}{T'v'^{n-1} - T''v''^{n-1}}$$

und daraus insbesondere wieder für $p' = 0,5$ und $p'' = 8$ Atm. sowie mit $= n\frac{4}{3}$

$$R = 0,004752.$$

Werden die Pressungen in Kgr. pro Quadratm. ausgedrückt, so ist dieses R mit 10333 zu multipliciren; also ist der entsprechende constante Werth von

$$c_v = \frac{10333AR}{n-1} = \frac{30999R}{424} = 0,3474$$

und der Grenzwerth, welchem sich c_p mit zunehmendem Grade der Ueberhitzung nähert,

$$lim.\ c_p = \frac{4}{3} c_v = 0,4632.$$

Da der von Regnault bestimmte Werth $c_p = 0,48$ einem solchen Zustande des Wasserdampfes entspricht, in welchem derselbe nicht sehr bedeutend überhitzt ist, nämlich $p = 1$ Atm. und (cf. §. 37)

$$t = \frac{1}{6}(137,7 + 225,9 + 124,3 + 210,4 + 122,7 + 216,0) = 173,$$

so erkennt man, dass auch die vorliegende Annahme $c_v = Const.$ auf einen nur wenig veränderlichen Werth von c_p führt.

Schliesslich bleibt die Constante S gemäss der Gleichung

$$S = (0,004752T - pv)\sqrt[3]{v}$$

der Tabelle §. 29 für gesättigten Wasserdampf, den Hirn'schen Versuchen und den zusammengehörigen Werthen

$$c_p = 0,48;\ p = 1 \text{ Atm. und } T = 273 + 173 = 446$$

möglichst anzupassen. Diesen letzteren Werthen und den bereits bestimmten Werthen von n, R und c_v entspricht nach Gl. (14)

$$v = \frac{n-1}{n}\frac{RT}{p}\frac{c_p}{c_p - c_v} = 1,918;\ \text{also } S = 0,2502.$$

Im Uebrigen ergeben sich für dieselben Fälle, wie oben unter 1), die folgenden Werthe von S.

Gesättigter Wasserdampf.				Versuche von Hirn.	
p Atm.	S	p Atm.	S	S	S
0,2	0,1486	4	0,1439	0,1448	0,1459
0,5	0,1465	6	0,1453	0,1440	0,1197
1	0,1442	8	0,1465	0,1728	0,1286
2	0,1432	10	0,1477	0,1389	0,1376
3	0,1433	12	0,1486	0,1344	0,1375
					0,1501

Die Mittelwerthe sind

$S = 0,1458$ für den Sättigungszustand,

$S = 0,1413$ nach den Versuchen von Hirn, und mag danach vorläufig $S = 0,144$ als Generalmittel angenommen werden, besonders nahe wieder übereinstimmend mit demjenigen Werthe von S, welcher gesättigtem Dampf von atmosphärischer Pressung entspricht. Von dem aus der Regnault'schen Bestimmung von c_p abgeleiteten Werthe $S = 0,2502$ ist jenes Mittel $S = 0,144$ allerdings sehr verschieden; es ist aber zu bemerken, dass eine bedeutende Aenderung von S eine nur kleine Aenderung von c_p zur Folge hat, wie solche wohl durch die der Regnault'schen Bestimmung von c_p anhaftenden Fehler erklärt werden kann. Insbesondere mit $S = 0,144$ und den bereits festgestellten Werthen von n, R und c_v folgt aus Gl. (13) und (14) für $p = 1$ Atm. und $T = 446$

$$v = 2,005 \text{ und } c_p = 0,4722.$$

In der Zustandsgleichung (13) kann also für Wasserdampf gesetzt werden:

$$n = \frac{4}{3};\ \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4};\ R = 0,004752;\ S = 0,144 \quad \ldots\ldots (15)$$

wobei, was R und S betrifft, die Pressung p in Atm. ausgedrückt vorausgesetzt ist. —

Von den beiden Annahmen unter 1) und 2) hat, was den Grad der Uebereinstimmung der aus ihnen gezogenen Folgerungen mit den bekannten Thatsachen betrifft, keine einen entschiedenen Vorzug vor der anderen. Beide sind als vorläufige Näherungen zu betrachten, bis ein vollständigeres Versuchsmaterial zu genauerer Prüfung vorliegen wird. Indessen hat die erstere Annahme, welche zu der Folgerung $c_p = Const.$ und zu der Zeuner'schen Gleichung (10) geführt hat, den Vorzug, dass sie eine directe Berechnung von v gestattet vermittelst der gegebenen Werthe von p und T, durch welche der Zustand überhitzten Dampfes in den Anwendungen charakterisirt zu werden pflegt. Zu dem Ende ist Gl. (10) bequemer zu schreiben:

$$pv = R\left(T - \frac{S}{R} p^{\frac{n-1}{n}}\right) = R(T - P) \quad \ldots\ldots\ldots (16).$$

Darin ist, wenn p in Atm. ausgedrückt wird, nach Gl. (12) für Wasserdampf zu setzen:

$$R = 0{,}004924;\ P = \frac{0{,}186}{0{,}004924}\sqrt[4]{p} = 37{,}774\sqrt[4]{p}.$$

Diese Werthe von P können der folgenden Tabelle entnommen werden.

p Atm.	P	Diff. für $\Delta p = 0{,}1$.	p Atm.	P	Diff. für $\Delta p = 0{,}1$.	p Atm.	P	Diff. für $\Delta p = 0{,}1$.
0,1	21,24		1,6	42,48	0,697	6	59,12	0,256
0,2	25,26	4,019	1,8	43,75	0,635	7	61,44	0,232
0,3	27,96	2,695	2	44,92	0,583	8	63,53	0,206
0,4	30,04	2,085	2,5	47,50	0,516	9	65,43	0,190
0,5	31,76	1,723	3	49,71	0,443	10	67,17	0,175
0,6	33,25	1,482	3,5	51,67	0,391	11	68,79	0,162
0,8	35,72	1,239	4	53,42	0,351	12	70,30	0,151
1,0	37,77	1,025	4,5	55,02	0,320	13	71,72	0,142
1,2	39,53	0,880	5	56,48	0,293	14	73,07	0,134
1,4	41,09	0,777	5,5	57,85	0,273	15	74,34	0,127

Die Zustandsgleichung (16), nämlich

$$pv = R\left(T - \beta p^{\frac{n-1}{n}}\right) \text{ mit } \beta = \frac{S}{R}$$

kann nach Zeuner u. A. dazu benutzt werden, die Temperatur gesättigter Dämpfe als Function ihrer Pressung durch eine bemerkenswerthe Näherungsformel darzustellen. Indem nämlich nach §. 28, Gl. (4) für solche Dämpfe die empirische Formel

$$pv^m = a \text{ oder } pv = R\alpha p^{\frac{m-1}{m}} \text{ mit } \alpha = \frac{1}{R} a^{\frac{1}{m}}$$

bewährt gefunden wurde, ergiebt sich durch Gleichsetzung beider Ausdrücke von pv

$$T = \alpha p^{\frac{m-1}{m}} + \beta p^{\frac{n-1}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

Setzt man insbesondere für gesättigten Wasserdampf dem Obigen zufolge und nach §. 28

$$\frac{m-1}{m} = \frac{0{,}0646}{1{,}0646} = 0{,}06068;\ \frac{n-1}{n} = 0{,}25$$

$$\alpha = \frac{1}{0{,}004924 \,.\, 0{,}6058} = 335{,}24;\ \beta = 37{,}774$$

so wird

$$t = 335{,}24\, p^{0{,}06068} + 37{,}774\, p^{0{,}25} - 273 \quad \ldots\ldots\ldots (18).$$

Hiernach ist z. B.

für $p =$	1	3	6	9	12	Atm.
$t =$	100,01	135,04	159,86	175,47	187,08	"
nach §. 29: $t =$	100,00	133,91	159,22	175,77	188,41	"
Differenz $=$	+ 0,01	+ 1,13	+ 0,64	− 0,30	− 1,33	"

Durch entsprechende Wahl der Constanten α, β, m, n unabhängig von Gl. (16) und der Gl. (4) in §. 28 liesse sich die Uebereinstimmung von Gl. (17) mit der Tabelle in §. 29 wesentlich verbessern; doch würde dann eben der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Beziehungen, wodurch die Gl. (18) im Vergleich mit anderen solchen empirischen Formeln sich auszeichnet, verloren gehen.

§. 40. Wärmegleichung und inneres Arbeitsvermögen der Dämpfe.

Bei den folgenden Untersuchungen über das Verhalten der (gesättigten oder überhitzten) Dämpfe wird die im vorigen §. entwickelte Zustandsgleichung, und zwar insbesondere die auf Grund der Annahme unter 1 gefundene Gleichung (16) vorausgesetzt. Die drei Formen der Wärmegleichung (1) — (3) in §. 37 gehen dann mit Rücksicht auf die Gleichungen (7) im vorigen §. über in:

$$dQ = A\left(\frac{n}{n-1}\, p\,dv + \frac{1}{n-1}\, v\,dp\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$= c_v\left(dT + (n-1)\frac{T}{v}\,dv\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$= c_p\left(dT - \frac{n-1}{n}\,\frac{T}{p}\,dp\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Diese Gleichungen, welche die Wärmemenge ausdrücken, die einem Kgr. Dampf behufs einer unendlich kleinen umkehrbaren Aenderung seines Wärmezustandes mitgetheilt werden muss, und welche insbesondere mit $n = \frac{4}{3}$ (für Wasserdampf) die Formen

$$dQ = A(4p\,dv + 3v\,dp) = c_v\left(dT + \frac{1}{3}\frac{T}{v}\,dv\right) = c_p\left(dT - \frac{1}{4}\frac{T}{p}\,dp\right)$$

annehmen, sind ihrer Form nach von den besonderen Voraussetzungen unabhängig, welche im vor. §. unter 1) und 2) in Betreff der specif. Wärmen

c_v und c_p gemacht wurden. Sie unterscheiden sich von den betreffenden Gleichungen für Gase — §. 18, Gl. (5), (6), (7) — nur durch die Coëfficienten, insbesondere dadurch, dass hier c_v und c_p nicht beide zugleich constant sind wie dort c und c_1.

Aus der ursprünglichen Form der Wärmegleichung für umkehrbare Aenderungen des Wärmezustandes, nämlich — §. 13, Gl. (2) — aus der Gleichung

$$WdQ = dU + pdv \text{ oder } dQ = A(dU + pdv)$$

folgt in Verbindung mit obiger Gl. (1) für das specif. innere Arbeitsvermögen U der Dämpfe

$$\left.\begin{aligned} dU &= \frac{1}{n-1}(pdv + vdp) = \frac{1}{n-1} d(pv) \\ U - U_1 &= \frac{pv - p_1 v_1}{n-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

übereinstimmend mit Gl. 5 in §. 19 für Gase; wegen abweichender Form der Zustandsgleichung beschränkt sich indessen diese Uebereinstimmung auf den Fall, dass U als Function von p und v ausgedrückt wird. Mit

$$C = U_1 - \frac{p_1 v_1}{n-1}$$

ergiebt sich die specif. Körperwärme der Dämpfe

$$AU = AC + \frac{A}{n-1} pv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

oder als Function von p und t mit Rücksicht auf Gl. (16) und gemäss der Bedeutung von R nach Gl. (10) im vorigen §.

$$AU = AC + \frac{AR}{n-1}(T-P) = AC + \frac{c_p}{n}(T-P) \quad \ldots\ldots (6).$$

Die Constante C ist abhängig von dem Anfangszustande, von welchem aus das innere Arbeitsvermögen gerechnet wird. Rechnet man es vom Zustande tropfbarer Flüssigkeit von $t = 0$, so dass unter U der Ueberschuss des specif. inneren Arbeitsvermögens im Zustande p, v resp. p, T des Dampfes über dasselbe in jenem Zustande tropfbarer Flüssigkeit von 0^0 verstanden wird, so ist für gesättigten Dampf

$$AU = q + \varrho \text{ (§. 27)}$$

und man findet dann nach Gl. (5)

$$AC = q + \varrho - \frac{A}{n-1} pv$$

durch Einsetzung der für gesättigten Dampf bekannten zusammengehörigen

Werthe von p, v, q, ϱ. Insbesondere für Wasserdampf ergiebt sich durch Einsetzung der Tabellenwerthe aus §. 29 für gesättigten Dampf von atmosphärischer Pressung mit $n = \frac{4}{3}$ und $1 : A = 424$

$$AC = 100{,}5 + 496{,}3 - \frac{3 \,.\, 10333 \,.\, 1{,}6505}{424} = 476{,}13$$

und somit nach Gl. (5) und (6) mit $c_p = 0{,}48$

$$AU = 476{,}13 + 3Apv = 476{,}13 + 0{,}36(T-P) \quad \ldots \quad 7.$$

Darin kann $P = 37{,}774 \sqrt[4]{p}$ der Tabelle im vorigen §. entnommen werden.

§. 41. Zustandsänderung nach dem Gesetze: $pv^m = Const$

Analog der Voraussetzung in §. 20 in Betreff des Verhaltens der Gase erfolge die umkehrbare Zustandsänderung eines Dampfes nach dem Gesetze

$$pv^m = C \quad \ldots \quad 1.$$

unter C und m Constante verstanden, so dass auch wie dort

$$\frac{dp}{dv} = -m\frac{p}{v} \quad \ldots \quad 2$$

ist. Sind dann v_1, p_1, T_1 die Werthe von v, p, T im Anfangszustande, so folgt aus den Gleichungen

$$pv^m = p_1 v_1{}^m \text{ und } pv = R(T-P) \text{ mit } P = \beta p^{\frac{n-1}{n}}$$

analog den Gleichungen (3) und (4) in §. 20

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^m; \quad \frac{T-P}{T_1-P_1} = \frac{pv}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} \quad \ldots \quad 3$$

und die Expansionsarbeit E, welche von 1 Kgr. Dampf beim Uebergang aus dem Zustande (v_1, p_1) in den Zustand (v, p) verrichtet wird,

$$E = \frac{p_1 v_1}{m-1}(1 - \varepsilon^{m-1}) \text{ mit } \varepsilon = \frac{v_1}{v} \quad \ldots \quad 4.$$

Die Wärme Q, welche dabei dem Dampf mitgetheilt werden muss, ist nach der allgemeinen Wärmegleichung für umkehrbare Zustandsänderungen

$$Q = A(U - U_1 + E).$$

Nach §. 40, Gl. (6) mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung der Dämpfe und auf obige Gleichungen (3) und (4) ist aber

$$A(U-U_1)=\frac{AR}{n-1}(T_1-P_1)\left(\frac{T-P}{T_1-P_1}-1\right)=\frac{A}{n-1}p_1v_1(e^{m-1}-1)$$
$$=-A\frac{m-1}{n-1}E,$$

also

$$Q=\left(1-\frac{m-1}{n-1}\right)AE=\frac{n-m}{n-1}AE \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (7) in §. 20. Die specifische Wärme für eine solche Zustandsänderung ist während derselben im Allgemeinen veränderlich; sie ist nämlich

$$\mu=\frac{dQ}{dT}=\frac{n-m}{n-1}A\frac{dE}{dT}=\frac{n-m}{n-1}Ap\frac{dv}{dT}$$

oder weil nach der Zustandsgleichung

$$dT=\frac{d(pv)}{R}+dP \text{ und } dP=\beta\frac{n-1}{n}p^{-\frac{1}{n}}dp=\frac{S}{R}\frac{n-1}{n}p^{-\frac{1}{n}}dp,$$

also
$$\frac{dT}{dv}=\frac{1}{R}\left[p+\left(v+S\frac{n-1}{n}p^{-\frac{1}{n}}\right)\frac{dp}{dv}\right]$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (2)

$$\frac{dT}{dv}=\frac{p}{R}\left(1-m-\frac{n-1}{n}\frac{mS}{vp^{\frac{1}{n}}}\right)=\frac{p}{R}\left[1-\frac{m}{n}\left(n+\frac{(n-1)S}{vp^{\frac{1}{n}}}\right)\right]$$

oder endlich nach §. 39, Gl. (11)

$$\frac{dT}{dv}=\frac{p}{R}\left(1-\frac{m}{n}\frac{c_p}{c_v}\right)$$

ist wegen $AR=\frac{n-1}{n}c_p$ nach §. 39, Gl. (10)

$$\mu=\frac{n-m}{n-1}\,\frac{AR}{1-\frac{m}{n}\frac{c_p}{c_v}}=\frac{n-m}{1-\frac{m}{n}\frac{c_p}{c_v}}\,\frac{c_p}{n}=\frac{m-n}{m\frac{c_p}{c_v}-n}c_p \ldots\ldots (6).$$

In der Grenze für unendlich grosse Ueberhitzung oder für den Gaszustand ist

$$lim.\frac{c_p}{c_v}=n, \text{ also } lim.\ \mu=\frac{m-n}{m-1}c_v \text{ (§. 20, Gl. 5).}$$

Von besonderen Fällen sind folgende bemerkenswerth:

1) Zustandsänderung bei constantem Volumen, entsprechend $m=\infty$. Pressung und Temperatur stehen dabei in der Beziehung

$$\frac{T-P}{T_1-P_1}=\frac{p}{p_1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Wegen $E = 0$ ergiebt sich Q nach Gl. (5) in unbestimmter Form; nach §. 40, Gl. (5) ist aber

$$Q = A(U - U_1) = \frac{A}{n-1}(p - p_1)v \quad \ldots \ldots \ldots \quad 8.$$

Insbesondere mit $n = \frac{4}{3}$ ist diese Wärmemenge, welche einem Kgr. Wasserdampf mitgetheilt werden muss, um bei constantem Volumen v die Pressung von p_1 auf p zu steigern,

$$Q = 3A(p - p_1)v \quad \ldots \ldots \ldots \quad 9.$$

2) Der Zustandsänderung bei constanter Pressung entspricht $m = 0$ und die Beziehung

$$\frac{T - P}{T_1 - P} = \frac{v}{v_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10$$

zwischen Volumen und Temperatur. Die Expansionsarbeit pro 1 Kgr. und die mitzutheilende Wärme sind

$$E = p(v - v_1);\; Q = \frac{n}{n-1} AE = \frac{n}{n-1} Ap(v - v_1) \quad \ldots \quad 11$$

Insbesondere ist mit $n = \frac{4}{3}$ die Wärmemenge, welche einem Kgr. Wasserdampf mitgetheilt werden muss, um bei constanter Pressung das Volumen von v_1 bis v zu vergrössern,

$$Q = 4Ap(v - v_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 12$$

3) Bei constantem inneren Arbeitsvermögen ist nach Gl. (5) in vorigem §. auch pv constant, also $m = 1$. Die Beziehungen (3) werden somit:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{v_1}{v};\; \frac{T - P}{T_1 - P_1} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 13.$$

Für die Expansionsarbeit liefert Gl. (4) einen unbestimmten Ausdruck; indessen ergiebt sich direct:

$$E = \int_{v_1}^{v} p\,dv = p_1 v_1 \int_{v_1}^{v} \frac{dv}{v} = p_1 v_1 \ln \frac{v}{v_1};\; Q = AE \quad \ldots \quad 14.$$

4) Für die Zustandsänderung ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme ist $m = n$; nach §. 39, Gl. (1) ist T proportional $p^{\frac{n-1}{n}}$, somit proportional P, und es gehen also die Beziehungen (3 über in:

$$\frac{p}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^n;\; \frac{T}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^{n-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \quad \ldots \ldots \quad 15.$$

der Form nach übereinstimmend mit den betreffenden Gleichungen für Gase. Die Expansionsarbeit pro 1 Kgr., insbesondere mit $n = \frac{4}{3}$ für Wasserdampf, ist

$$E = \frac{p_1 v_1}{n-1}(1 - e^{n-1}) = 3 p_1 v_1 \left(1 - \sqrt[3]{e}\right) \ldots\ldots\ldots (16).$$

Obige Formeln gelten natürlich nur so lange, als der Zustand der Sättigung nicht überschritten wird. In dieser Hinsicht ist es namentlich für den letzten Fall unter 4) von Interesse, diejenige Ueberhitzung $= x$ Grad C. zu kennen, bei welcher Dampf von gegebener Pressung $= p_1$ Atm., wenn er ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme im Verhältniss $e = \frac{v_1}{v}$ expandirt, gerade gesättigt wird. Bezeichnet dann T_1 die absolute Temperatur gesättigten Dampfes von der Pressung p_1, also $x + T_1$ die absolute Anfangstemperatur des überhitzten Dampfes, so ist nach Gl. (15)

$$\frac{T}{x + T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

und wenn darin T und T_1 nach §. 39, Gl. (17) mit den kürzeren Bezeichnungen

$$\frac{m-1}{m} = a \text{ und } \frac{n-1}{n} = b$$

ausgedrückt werden,

$$\frac{\alpha p^a + \beta p^b}{x + \alpha p_1^{\,a} + \beta p_1^{\,b}} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^b.$$

Daraus folgt

$$\alpha p^{a-b} + \beta = x p_1^{\,-b} + \alpha p_1^{\,a-b} + \beta;\ \left(\frac{p}{p_1}\right)^{a-b} = \frac{x}{\alpha} p_1^{\,-a} + 1$$

und somit nach Gl. (15) durch Elimination von p die folgende Beziehung zwischen p_1, e und x:

$$e^{n-1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^b = \left(\frac{x}{\alpha p_1^{\,a}} + 1\right)^{\frac{b}{a-b}}$$

oder wegen $\frac{n-1}{b} = n$

$$x = \alpha p_1^{\,a}\left[e^{n(a-b)} - 1\right] = \alpha p_1^{\,a}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^{n(b-a)} - 1\right] \ldots\ldots (17).$$

Insbesondere für **Wasserdampf** ergiebt sich mit

$$n = \frac{4}{3};\ \alpha = 335,24;\ a = 0,0607;\ b = 0,25 \text{ (cf. §. 39)}$$

$$x = 335,24 p_1^{0,0607} \left[\left(\frac{1}{e} \right)^{0,2524} - 1 \right] \quad \ldots \ldots \ldots (18.$$

Folgende Tabelle enthält die hiernach für verschiedene Werthe von p_1 und e berechneten Werthe von x.

e	$p_1 = 1$	$p_1 = 2$	$p_1 = 3$	$p_1 = 4$	$p_1 = 6$	$p_1 = 8$	$p_1 = 10$
0,1	264,2	275,6	282,4	287,4	294,6	299,7	303,8
0,15	205,9	214,7	220,1	224,0	229,6	233,6	236,8
0,2	168,0	175,2	179,6	182,7	187,3	190,6	193,2
0,25	140,4	146,5	150,1	152,8	156,6	159,3	161,5
0,3	119,0	124,2	127,3	129,5	132,7	135,1	136,9
0,4	87,2	91,0	93,2	94,9	97,2	99,0	100,3
0,5	64,1	66,9	68,5	69,7	71,5	72,7	73,7
0,6	46,1	48,1	49,3	50,2	51,4	52,3	53,0
0,8	19,4	20,2	20,7	21,1	21,6	22,0	22,3

§. 42. Zustandsänderung bei constanter Temperatur.

Im Gegensatze zu dem Verhalten der Gase ist diese Zustandsänderung nicht mit derjenigen bei constantem inneren Arbeitsvermögen, die isothermische nicht mit der isodynamischen Curve identisch. Die Gleichung der ersteren

$$v = R\frac{T-P}{p} = R\frac{T-\beta p^{\frac{n-1}{n}}}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1$$

mit $T = Const.$, welche überhaupt nicht der in vorigem §. betrachteten allgemeineren Form $pv^m = C$ entspricht, lässt leicht erkennen, dass v mit abnehmendem p schneller zunimmt, oder p mit zunehmendem v langsamer abnimmt, als es bei der Zustandsänderung nach der isodynamischen Curve $pv = C$ von demselben Punkte aus der Fall sein würde.

Aus Gl. (1) folgt

$$dv = R\left(-Tp^{-2} + \frac{\beta}{n} p^{-\frac{1}{n}-1}\right) dp$$

und es ist also die Expansionsarbeit pro 1 Kgr. Dampf

$$E=\int_{p_1}^{p} p dv = R\int\left(-Tp^{-1}+\frac{\beta}{n}p^{-\frac{1}{n}}\right)dp$$

$$= R\left(-Tln\frac{p}{p_1}+\frac{\beta}{n}\frac{p^{\frac{n-1}{n}}-p_1^{\frac{n-1}{n}}}{\frac{n-1}{n}}\right) = R\left(Tln\frac{p_1}{p}-\frac{P_1-P}{n-1}\right)\,..\,(2).$$

Nach §. 40, Gl. (6) ist

$$A(U-U_1)=\frac{AR}{n-1}(P_1-P)$$

und deshalb die Wärmemenge, welche einem Kgr. Dampf mitgetheilt werden muss, wenn derselbe bei constanter Temperatur von der Pressung p_1 zur Pressung p übergehen soll,

$$Q = A(U-U_1+E) = ARTln\frac{p_1}{p} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

ebenso wie für Gase, nur mit dem Unterschiede, dass hier nicht, wie dort, p_1v_1 an die Stelle von RT und $\frac{v}{v_1}$ für $\frac{p_1}{p}$ gesetzt werden kann.

§. 43. Wärmemenge zur Erzeugung überhitzten Dampfes aus der betreffenden Flüssigkeit bei constanter Pressung.

Die Herstellung überhitzten Wasserdampfes zum Betriebe von Dampfmaschinen geschieht entweder so, dass die ganze Dampfmenge auf dem Wege vom Kessel zur Maschine durch einen Ueberhitzungsapparat geleitet wird, oder so, dass nur ein Theil des Dampfes entsprechend höher überhitzt und mit dem anderen Theil, welcher, direct vom Kessel herkommend, gesättigt und im Allgemeinen zugleich feucht ist, vor dem Eintritt in die Maschine gemischt wird. In beiden Fällen geschieht die Ueberführung aus Wasser in überhitzten Dampf bei constanter Pressung p, abgesehen von solchen Druckdifferenzen, welche durch die Bewegungswiderstände auf dem Wege vom Kessel zur Maschine bedingt sind. Diese Erzeugung überhitzten Dampfes bei constanter Pressung, übrigens nach der einen oder anderen der beiden so eben erwähnten Verfahrungsweisen, ist deshalb überhaupt, auch bei anderen Dämpfen, von vorwiegendem Interesse.

Die Wärmemenge Q, welche dabei zur Bildung von 1 Kgr. überhitzten Dampfes vom Zustande v, p, t aus der betreffenden Flüssigkeit von der Temperatur t_1 erfordert wird, ist in beiden genannten Fällen gleich gross,

weil sie ausser von dem hervorzubringenden Zuwachs an Körperwärme, nämlich

$$AU - q_1 = AC + \frac{A}{n-1} pv - q_1 \text{ nach §. 40, Gl. (5),}$$

nur von der Expansionsarbeit E abhängt, letztere aber wegen der in beiden Fällen constanten Pressung auch in beiden Fällen gleich ist, und zwar bei Vernachlässigung des specif. Volumens w der Flüssigkeit gegen dasjenige v des Dampfes

$$E = p(v - w) = pv.$$

Somit ist

$$Q = A(U + E) - q_1 = A\left(C + \frac{n}{n-1} pv\right) - q_1 \quad \ldots\ldots \quad 1$$

oder auch mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung und die Beziehung

$$AR = \frac{n-1}{n} c_p \text{ nach §. 39, Gl. (10)}$$

$$Q = A\left[C + \frac{n}{n-1} R(T-P)\right] - q_1 = AC + c_p(T-P) - q_1 \quad \ldots \quad 2.$$

Insbesondere ist die Wärmemenge, welche zur Erzeugung von 1 Kgr. überhitzten Wasserdampfes vom Zustande p, v resp. p, t aus Wasser von 0° bei constanter Pressung p direct oder durch Mischung erfordert wird, mit

$$c_p = 0{,}48 \text{ und } AC = 476{,}13 \text{ (§. 40)}$$

$$Q = 476{,}13 + 4Apv = 476{,}13 + 0{,}48(T-P) \quad \ldots\ldots \quad 3.$$

Diese Formeln gelten insbesondere auch in der Grenze für gesättigten Dampf und liefern dann die sogenannte Gesammtwärme desselben, welche von Regnault als Function ihrer Temperatur t bestimmt wurde §. 27 z. B. für gesättigten Wasserdampf:

$$Q = 606{,}5 + 0{,}305t \text{ (§. 27, Gl. 4).}$$

Die sehr befriedigende Uebereinstimmung der zwar weniger einfachen, dagegen allgemein gültigen Gl. (3) für Wasserdampf mit dieser Regnault'schen Formel für gesättigten Wasserdampf lässt die folgende Zusammenstellung erkennen.

Für $p =$	0,5	1	2	4	8 Atm.	
ist $T =$	354,71	373,00	393,60	417,00	443,81	nach §. 29.
$P =$	31,76	37,77	44,92	53,42	63,53	nach §. 39.
also $Q =$	631,15	637,04	643,50	650,65	658,66	nach Gl. 3
Nach §. 27, Gl. (4) ist						
$Q =$	631,42	637,00	643,28	650,42	658,60	
Differenz =	— 0,27	+ 0,04	+ 0,22	+ 0,23	+ 0,06	

Durch Verbindung von Gl. (2) resp. (3) mit Gl. (17) resp. (18) in §. 39, wonach, wenn p in Atm. ausgedrückt wird,

$$T-P=ap^{\frac{m-1}{m}}$$

und insbesondere für gesättigten Wasserdampf

$$T-P=335,24p^{0,06068}$$

ist, lässt sich die Gesammtwärme gesättigter Dämpfe auch näherungsweise als unmittelbare Function ihrer Pressung $=p$ Atm. ausdrücken, z. B. für Wasserdampf

$$Q=476,13+160,92p^{0,06068} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Das Verhältniss der zur Erzeugung von 1 Kgr. Dampf aufzuwendenden Wärme Q zum Wärmewerth der dabei gewonnenen Expansionsarbeit $E=p(v-w)$ oder sehr nahe $E=pv$ ist nach Gl. (1) für $t_1=0$, also $q_1=0$

$$\frac{Q}{AE}=\frac{C}{pv}+\frac{n}{n-1}=\frac{C}{R(T-P)}+\frac{n}{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Darin ist für Wasserdampf zu setzen, wenn p in Atm. ausgedrückt wird,

$$C=\frac{476,13 \,.\, 424}{10333}=19,537;\ \frac{C}{R}=\frac{19,537}{0,004924}=3967,8$$

und $\frac{n}{n-1}=4.$

Das obige Verhältniss $\frac{Q}{AE}$ kann als Maassstab für die Oekonomie der Verwendung mehr oder weniger überhitzten Dampfes zur Arbeitsverrichtung zunächst in Dampfmaschinen ohne Expansion dienen; es ist um so kleiner, die mit einem gewissen Wärmeaufwande gewonnene Arbeit folglich um so grösser, je grösser v oder T bei gegebener Pressung p, je bedeutender also die Ueberhitzung des Dampfes ist. Im Vergleich mit dem Falle, dass der Dampf im Anfangszustande nicht nur gesättigt, sondern zugleich feucht ist, stellt sich der Vortheil des überhitzten Dampfes noch grösser heraus. Dagegen tritt er wieder etwas zurück bei Expansionsmaschinen um so mehr, je stärker expandirt wird, in Folge des Umstandes, dass dabei ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme die Pressung überhitzten Dampfes rascher abnimmt, als diejenige des Anfangs gesättigten oder gar feuchten Dampfes, somit auch die Expansionsarbeit unter übrigens gleichen Umständen kleiner ist; in der Gleichung $pv^m=Const.$ der adiabatischen Curve ist z. B. für überhitzten und überhitzt bleibenden Wasserdampf $m=1,333$ zu setzen, dagegen für Anfangs gesättigten und trockenen

Wasserdampf im Mittel $m = 1,135$ (§. 35) und noch kleiner, wenn er vor der Expansion schon feucht ist. Die Ersparung an Brennmaterial kann sich übrigens grösser herausstellen, als der Verkleinerung des Verhältnisses $\frac{Q}{AE}$ entspricht, wenn zur Ueberhitzung die Wärme der abziehenden Heizgase, überhaupt solche Wärme benutzt wird, welche sonst verloren gehen würde.

§. 44. Mischung zweier Dampfmengen von gleicher Art und verschiedenem Zustande.

Entsprechend dem in vorigem §. erwähnten Mischungsverfahren zur Erzeugung überhitzten Wasserdampfes ist hier namentlich der Fall von Interesse, dass beide Dampfmengen, von denen die eine gesättigt und im Allgemeinen zugleich feucht, die andere überhitzt ist, dieselbe Pressung haben und bei dieser constant bleibenden Pressung gemischt werden.

1) Die Mischung werde bei constanter Pressung p gebildet aus m_1 Kgr. gesättigten Dampfes von der Pressung p (Temperatur entsprechend $= t_1$), welcher in 1 Kgr. aus y_1 Kgr. Dampf und $(1 - y_1)$ Kgr. Flüssigkeit besteht, und m_2 Kgr. überhitzten Dampfes von derselben Art, dessen Pressung auch $= p$, dessen Temperatur aber $= t_2 > t_1$ ist. Zu bestimmen sind: die Temperatur $= t$ der Mischung und die resultirende Volumenänderung.

Sind Q_1, Q_2 und Q die Wärmemengen, welche zur Erzeugung von je 1 Kgr. der beiden Gemengtheile $= m_1$ und m_2 Kgr. und des resultirenden Dampfes aus Flüssigkeit von einer gewissen, in allen Fällen gleichen Anfangstemperatur bei constanter Pressung p erforderlich sind, so hat man

$$(m_1 + m_2) Q = m_1 Q_1 + m_2 Q_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

vorausgesetzt, dass bei der Mischung Wärme weder mitgetheilt noch entzogen wird. Dabei ist mit Rücksicht auf Gl. (2) in vorigem §., und wenn r_1 die Verdampfungswärme für die Pressung p oder entsprechende Temperatur t_1 (§. 27) bedeutet,

$$Q_1 = AC + c_p(T_1 - P) - (1 - y_1) r_1$$

$$Q_2 = AC + c_p(T_2 - P); \quad Q = AC + c_p(T - P),$$

vorausgesetzt, dass der resultirende Dampf keine Flüssigkeit mehr enthält, also $t \geqq t_1$ gefunden wird. Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in obige Gleichung ergiebt sich zur Berechnung von t:

$$(m_1 + m_2) T = m_1 \left[T_1 - (1 - y_1) \frac{r_1}{c_p} \right] + m_2 T_2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

worin statt T, T_1 und T_2 auch t, t_1 und t_2 gesetzt werden können. Umgekehrt ergeben sich daraus die Gewichtsmengen der Bestandtheile, welche erforderlich sind, um durch Mischung m Kgr. trockenen Dampfes von der Temperatur t zu bilden,

$$m_1 = \frac{m(T_2 - T)}{T_2 - T_1 + (1 - y_1)\frac{r_1}{c_p}};\ m_2 = m - m_1 \ldots\ldots (3).$$

Für $y_1 = 1$, in welchem Falle auch t_1 grösser sein kann, als die Sättigungstemperatur des Dampfes von der Pressung p, ergiebt sich als Mischungstemperatur von zwei trockenen Dampfmengen, welche beide überhitzt sein können,

$$T = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2},$$

wie auch ohne Weiteres aus der Voraussetzung $c_p = Const.$ folgt.

Durch Pressung und Temperatur ist der Zustand des resultirenden Dampfes bestimmt, insbesondere auch sein specif. Volumen

$$v = \frac{R(T - P)}{p}.$$

Sein Gesammtvolumen ist dann $V = (m_1 + m_2)v$. Sind ferner

$$v_1 = \frac{R(T_1 - P)}{p} \text{ und } v_2 = \frac{R(T_2 - P)}{p}$$

die specif. Volumina des im ersten Gemengtheil enthaltenen trockenen Dampfes und des zweiten Gemengtheils, so können ihre absoluten Volumina

$$V_1 = m_1 y_1 v_1 \text{ und } V_2 = m_2 v_2$$

gesetzt werden, wenn bei V_1 von dem verhältnissmässig kleinen Volumen der vorhandenen Flüssigkeit (ebenso wie in den Gleichungen des vorigen §. abstrahirt wird. Hiernach kann mit Rücksicht auf Gl. (2) die mit der Mischung verbundene Aenderung des Gesammtvolumens

$$V - V_1 - V_2 = (m_1 + m_2)v - m_1 y_1 v_1 - m_2 v_2 \ldots\ldots (4)$$

berechnet werden. Uebrigens ergiebt sich directer, wenn in Gl. (1) nach §. 43. Gl. (1)

$$Q_1 = A\left(C + \frac{n}{n-1} p v_1\right) - (1 - y_1) r_1$$

$$Q_2 = A\left(C + \frac{n}{n-1} p v_2\right);\ Q = A\left(C + \frac{n}{n-1} p v\right)$$

gesetzt wird,

$$(m_1 + m_2)v = m_1\left[v_1 - (1 - y_1)\frac{n-1}{n}\frac{r_1}{Ap}\right] + m_2 v_2$$

und somit nach Gl. (4)

$$V - V_1 - V_2 = m_1 v_1 (1 - y_1)\left(1 - \frac{n-1}{n}\frac{r_1}{Apv_1}\right) \dots\dots (5).$$

Mit Rücksicht auf die Vernachlässigung des Volumens der Flüssigkeit im ersten Gemengtheil ist (§. 27) Apv_1 die äussere Verdampfungswärme, also, wenn ρ_1 die innere Verdampfungswärme bedeutet,

$$r_1 = \rho_1 + Apv_1$$

und somit auch

$$V - V_1 - V_2 = m_1 v_1 (1 - y_1)\left(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{\rho_1}{Apv_1}\right) \dots\dots (6).$$

Diese Volumänderung ist negativ, einer Verdichtung entsprechend, sofern

$$\rho_1 > \frac{Apv_1}{n-1}, \text{ bei Wasserdampf } \rho_1 > 3Apv_1$$

ist, wie es der Tabelle in §. 29 zufolge zutrifft. Für $y_1 = 1$, d. h. wenn zwei Mengen trockenen, gesättigten oder überhitzten Dampfes von gleichen Pressungen bei constant bleibender Pressung gemischt werden, findet eine Aenderung des Volumens nicht statt.

2) Die Mischung erfolge ohne Volumenänderung, wie bei der früher in §. 36 betrachteten Aufgabe. Ein Gefäss enthalte nämlich m_1 Kgr eines Gemisches von je y_1 Kgr. Dampf und $(1 - y_1)$ Kgr. gleichartiger Flüssigkeit von der Pressung p_1 (entsprechendes specif. Volumen des gesättigten Dampfes für sich $= v_1$, also des Gemisches mit genügender Annäherung $= y_1 v_1$); ein zweites Gefäss enthalte m_2 Kgr. überhitzten Dampfes derselben Art von der Pressung p_2 und dem specif. Volumen v_2. Welches ist der Zustand (p, v) der Mischung, welche dadurch entsteht, dass beide Gefässe in Communication gesetzt werden, falls dabei Wärme von aussen weder mitgetheilt noch entzogen wird und der resultirende Dampf keine Flüssigkeit mehr enthält?

Das specif. Volumen v ergiebt sich ohne Weiteres:

$$v = \frac{m_1 y_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \dots\dots\dots\dots\dots (7).$$

Da ferner im Ganzen weder Expansionsarbeit verrichtet noch Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird, das innere Arbeitsvermögen also im Ganzen keine Aenderung erfährt, hat man die Gleichung

$$(m_1 + m_2)\, U = m_1 U_1 + m_2 U_2$$

oder, wenn darin mit Rücksicht auf §. 40, Gl. (5)

$$U_1 = C + \frac{p_1 v_1}{n-1} - (1 - y_1)\, W \varrho_1 \text{ mit } W = \frac{1}{A} = 424,$$

$$U_2 = C + \frac{p_2 v_2}{n-1};\; U = C + \frac{pv}{n-1}$$

gesetzt wird,

$$(m_1 + m_2) pv = m_1 [p_1 v_1 - (1 - y_1)(n - 1) W \varrho_1] + m_2 p_2 v_2,$$

woraus in Verbindung mit Gl. (7) sich ergiebt:

$$p = \frac{m_1 [p_1 v_1 - (1 - y_1)(n - 1) W \varrho_1] + m_2 p_2 v_2}{m_1 y_1 v_1 + m_2 v_2} \quad \ldots\ldots (8).$$

Die Vergleichung obigen Werthes von v mit dem bekannten specif. Volumen gesättigten Dampfes von der Pressung p, welches nicht grösser als jenes v sein darf, lässt die Richtigkeit der Voraussetzung erkennen, dass der resultirende Dampf nicht feucht ist. Die absolute Temperatur desselben ist dann

$$T = \frac{pv}{R} + P.$$

Ist $y_1 = 1$, in welchem Falle auch der Dampf im ersten Gefässe überhitzt sein kann, so ergiebt sich

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2};\; p = \frac{m_1 v_1 p_1 + m_2 v_2 p_2}{m_1 v_1 + m_2 v_2} \quad \ldots\ldots\ldots (9).$$

Wenn sich im Falle unter 1) die Temperatur T der Mischung nach Gl. (2) kleiner ergäbe, als die Sättigungstemperatur für die gegebene Pressung p, oder wenn im Falle unter 2) das specif. Volumen v nach Gl. (7) kleiner gefunden würde, als dasjenige gesättigten Dampfes für die nach Gl. (8) berechnete Pressung p, als Zeichen dafür, dass die resultirende Mischung feucht wäre, etwa nur y Kgr. Dampf in 1 Kgr. enthielte, so müssten andere Formeln zur Bestimmung ihres Zustandes, übrigens durch eine der obigen ganz analoge Entwickelung aufgestellt werden.

Im Falle 1) wäre zu setzen:

$$Q = AC + c_p (T_1 - P) - (1 - y) r_1 = A\left(C + \frac{n}{n-1} p v_1\right) - (1 - y) r_1$$

und $V = (m_1 + m_2) y v_1$. Mit p wäre nämlich auch $t = t_1$ und v_1 gegeben, zur Bestimmung des Zustandes der Mischung also nur y zu berechnen.

Im Falle 2) wäre zu setzen:

$$U = C + \frac{pv}{n-1} - (1-y)\,W\varrho; \quad v = \frac{m_1 y_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2) y},$$

unter v jetzt das specif. Volumen nicht der resultirenden Mischung, sondern des darin enthaltenen Dampfes verstanden; der Zustand der Mischung wäre bestimmt durch y mit einer der Grössen p, t, v.

E. Molekulartheorie der Wärme.

Den bisherigen Untersuchungen lag die Vorstellung einer continuirlichen Raumerfüllung durch die Materie zu Grunde. Wenn auch bereits im Anschlusse an die Besprechung des Fundamentalprincips der Aequivalenz und gegenseitigen Umwandelbarkeit von Wärme und Arbeit oder lebendiger Kraft (§. 11) darauf hingewiesen wurde, dass das Wesen der Wärme in dem Molekularzustande der atomistisch, also discontinuirlich constituirten Materie zu suchen sei, so war doch im Vorhergehenden keine Veranlassung, diese Vorstellung weiter zu verfolgen, weil die bisher entwickelten Sätze aus erfahrungsmässigen Thatsachen abgeleitet wurden, um sie als unabhängig von jener, in vieler Hinsicht noch mangelhaften und im Einzelnen von verschiedenen Autoren sehr verschieden ausgeführten Atomistik hinzustellen. Die zeitige Ausbildung der letzteren eingehend darzustellen, liegt auch dem Zweck dieses Buches fern. Im Folgenden soll nur anhangsweise insoweit darauf eingegangen werden, als es zum Verständniss gewisser darauf beruhender weiterer Sätze der Wärmetheorie nöthig ist, welche, wenn sie auch noch nicht als so wohlbegründet wie die früheren Sätze zu betrachten sind, doch schon jetzt durch ihre Folgerungen sich in mehrfacher Hinsicht bewährt haben und einen wesentlichen Fortschritt für die weitere Entwickelung der Theorie und ihrer Anwendungen in Aussicht zu stellen scheinen.

§. 45. Molekularzustand eines Körpers.

Schon abgesehen von der mechanischen Erklärung der Wärmeerscheinungen und selbst abgesehen von den die atomistische Theorie so wesentlich unterstützenden Gesetzen der Chemie hatten die allgemeinen physikalischen Eigenschaften der Körper, die Veränderlichkeit ihres Volumens und ihrer Gestalt, ihre Porosität, ihre gegenseitige Durchdringbarkeit oder Mischbarkeit und event. ihre Mischbarkeit in sich, d. h. die Mischbarkeit

ihrer eigenen kleinsten Theilchen unter einander, desgl. die mit diesen Eigenschaften zusammenhängenden Eigenthümlichkeiten der verschiedenen Aggregatformen zu der Ansicht geführt, dass die Materie den von einem Körper scheinbar eingenommenen und von einer scheinbar zusammenhängenden Fläche begrenzten Raum nicht continuirlich erfülle, dass vielmehr jeder Körper als ein Aggregat von unmessbar kleinen materiellen Theilchen, sogenannten Molekülen, zu betrachten sei, welche sich im Allgemeinen nicht berühren, eine (bei festen Körpern beschränkt, bei flüssigen und luftförmigen unbeschränkt) veränderliche, relative Lage haben und bei unmessbar kleinen Entfernungen ihrer Massenmittelpunkte eine solche Wirkung auf einander ausüben, welche durch die dem Newton'schen Gravitationsgesetze folgende allgemeine gegenseitige Massenanziehung allein nicht erklärt werden kann und deshalb besonderen sogenannten Molekularkräften zugeschrieben wird. Dabei ist es nicht ausgeschlossen, im Gegentheil am natürlichsten anzunehmen, dass jene allgemeine und auf beliebige messbare Entfernungen nachweislich wirkende Gravitation mit unverändertem Wirkungsgesetze auch einen Bestandtheil dieser nur auf unmessbar kleine Entfernungen wirkenden Molekularkräfte ausmacht.

Die Molekularwirkung zwischen zwei Molekülen, diese selbst vorläufig als unveränderlich vorausgesetzt, ist abhängig von ihrer Entfernung und überhaupt von ihrer relativen Lage. Wenn also durch äussere Kräfte eine Deformation des Körpers bewirkt wird, oder wenn relativ gleitende Bewegungen im Inneren eines (flüssigen oder luftförmigen) Körpers stattfinden, womit in beiden Fällen eine relative Lagenänderung der Moleküle verbunden sein muss, so werden dadurch auch entsprechende Aenderungen der Molekularkräfte bedingt, und diese Aenderungen sind es, welche als innere Flächenkräfte, Spannungen und innere Reibungen (§. 3), in die Betrachtung eingeführt werden müssen, wenn die Zustandsänderung eines Körpers dadurch mathematisch untersucht werden soll, dass er (unter Abstraction von seiner vorausgesetzten discontinuirlichen Constitution aus unmessbar kleinen Molekülen) in unendlich kleine Elemente zerlegt gedacht wird, welche continuirlich an einander grenzen.* Uebrigens kann umgekehrt eine relative Lagenänderung der Moleküle auch stattfinden, ohne dass damit

* Der Begriff der Messbarkeit oder Unmessbarkeit ist hier stets im Sinne der Messbarkeit resp. Unmessbarkeit durch Beobachtung, d. h. durch unmittelbare oder mittelbare (künstlich verschärfte) sinnliche Wahrnehmung verstanden. Es ist denkbar, dass eine in diesem Sinne als unmessbar klein bezeichnete Grösse durch Vervollkommnung unserer Hülfsmittel zur Verfeinerung sinnlicher Wahrnehmung einst messbar wird. Auch ist die Möglichkeit nicht ausge-

messbare Deformationen oder relativ gleitende Bewegungen von Körpertheilen verbunden sind.

Wenn in der Folge von der Entfernung zweier Moleküle A und A' die Rede sein wird, so soll darunter stets die Entfernung SS' ihrer Massenmittelpunkte S und S' verstanden sein. Wenn bei gegebener Entfernung $SS' = r$ die Moleküle um die Punkte S und S' gedreht werden, so kann die Molekularwirkung zwischen ihnen sich im Allgemeinen ändern; ist r_1 der grösste Werth von r, bei welchem die Moleküle, wie sie auch um S und S' gedreht werden mögen, überhaupt noch eine Molekularwirkung, d. h. eine von der allgemeinen Gravitation nachweislich abweichende Wirkung auf einander ausüben (nachweislich zwar nicht im Einzelnen, aber für viele Moleküle zusammen), so soll der Raum, welcher von einer um S als Mittelpunkt mit dem Radius r_1 beschriebenen Kugelfläche eingeschlossen wird, der Wirkungsraum des Moleküls A bezüglich auf das Molekül A' heissen.

Denkt man sich um alle Moleküle eines Körpers die Wirkungsräume in Beziehung auf die übrigen beschrieben, so können diese Räume sich mehr oder weniger vielfach dauernd oder vorübergehend gegenseitig durchdringen, womit besonders die Eigenthümlichkeiten der verschiedenen Aggregatformen zusammenhängend zu denken sind. Bei festen und flüssigen Körpern ist anzunehmen, dass in dem Wirkungsraume irgend eines Moleküls A gleichzeitig die Massenmittelpunkte S' mehrerer anderer Moleküle A' liegen, und zwar bei festen Körpern beständig derselben anderen Moleküle mit Ausnahme solcher, für welche die Entfernung SS' verhältnissmässig wenig vom Halbmesser des Wirkungsraumes um A verschieden ist, so dass deren Massenmittelpunkte S' vorübergehend aus dem fraglichen Wirkungsraume heraustreten können, wogegen bei Flüssigkeiten die Moleküle A' nach und nach durch immer andere Moleküle ersetzt werden können, indem jedes Molekül, zwischen den übrigen hindurch sich bewegend, seinen Ort innerhalb des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes wechseln kann. Bei luftförmigen Körpern ist anzunehmen, dass die Moleküle meistens ausserhalb des Molekularwirkungs-Bereiches von anderen sich befinden, dass ihre Massenmittelpunkte nur vorübergehend und während verhältnissmässig um so kürzerer Zeiten, je mehr der Zustand dem voll-

schlossen, eine in jenem Sinne unmessbare Grösse durch theoretische Betrachtungen und durch Rechnung mit messbaren Grössen vergleichbar, also einer Messung im weiteren Sinne des Wortes zugänglich zu machen, indem eine unmessbare und selbst eine unmessbar kleine Grösse nicht als unendlich klein sondern als endlich zu denken ist.

kommenen Gaszustande nahe kommt, in die Wirkungsräume anderer Moleküle eindringen, welche nicht nur, wie bei Flüssigkeiten, nach und nach immer andere sein können, sondern auch in der Regel immer andere sein werden. In allen Fällen sind übrigens an der Oberfläche eines Körpers die Wirkungsräume seiner Moleküle bezüglich auf diejenigen des angrenzenden Körpers zu unterscheiden von ihren Wirkungsräumen bezüglich auf die anderen Moleküle desselben Körpers.

Freilich kann hier die Frage aufgeworfen werden, wie überhaupt auf Grund der vorausgesetzten molekularen Constitution der Materie das Volumen und somit die Oberfläche eines Körpers mathematisch definirt werden könne. Indem aber bei festen und flüssigen Körpern den so eben erklärten Vorstellungen gemäss die Wirkungsräume ihrer Moleküle bezüglich auf einander sich stets so durchdringen, dass sie einen zusammenhängenden Gesammtraum bilden, kann dieser als das Volumen des Körpers, seine Oberfläche als die Körperoberfläche definirt werden. Auf einen luftförmigen Körper, dessen Molekular-Wirkungsräume sich isolirt von einander befinden können, würde diese Definition des Volumens nicht passen. Wäre derselbe in einem von festen oder flüssigen Wänden ringsum begrenzten Raume enthalten, so könnte zwar letzterer als sein eigenes Volumen definirt werden; allein diese Definition wäre durch die fragliche Bedingung beschränkt, und würde z. B. den Begriff des Volumens und der äusseren Oberfläche der Erdatmosphäre nicht in sich schliessen. Nimmt man aber die später näher auszuführende Vorstellung mit zu Hülfe, gemäss welcher die Moleküle des luftförmigen Körpers in beständiger Bewegung begriffen sind der Art, dass die von ihren Wirkungsräumen in einer gewissen Zeit beschriebenen Räume (den inneren Zustand, insoweit er messbar ist, unterdessen als constant vorausgesetzt) in ähnlicher Weise einen zusammenhängenden Gesammtraum bilden, wie es von den Wirkungsräumen der Moleküle an sich bei festen und flüssigen Körpern in jedem Augenblicke anzunehmen war, so kann jener Gesammtraum allgemein gültig als das Volumen des luftförmigen Körpers definirt werden.

An der Berührungsstelle eines Körpers mit einem anderen können zweierlei Oberflächen desselben unterschieden werden: seine absolute oder Oberfläche an sich, entsprechend den Wirkungsräumen seiner Moleküle bezüglich auf die anderen Moleküle desselben Körpers, und seine relative Oberfläche, entsprechend den Wirkungsräumen seiner Moleküle bezüglich auf diejenigen des anderen Körpers. Berührung im physikalischen Sinne findet statt, sobald die Massenmittelpunkte von Molekülen des einen Körpers die absolute oder relative Oberfläche des anderen Körpers durch-

dringen; dabei können verschiedene Erscheinungen stattfinden, jenachdem die absolute Oberfläche von der relativen oder umgekehrt die letztere von der ersteren eingeschlossen wird. Wäre endlich ein Körper als Gemisch von Molekülen verschiedener Art zu betrachten, so würden verschiedene absolute und bezüglich auf einen anderen verschiedene relative Oberflächen desselben zu unterscheiden sein. Auf die thatsächliche Messung des Volumens und der Oberfläche eines Körpers hat diese principielle Unterscheidung verschiedener Oberflächen keinen Einfluss, sofern die Entfernungen derselben von einander unmessbar klein sind.

Eine speciellere Vorstellung von der Beschaffenheit der Moleküle wird durch die Eigenthümlichkeit der chemischen Vorgänge bedingt, insbesondere durch die Verbindungsfähigkeit verschiedenartiger Stoffe zu neuen von ganz anderen Eigenschaften, und umgekehrt durch die Zerlegbarkeit von Stoffen in Theile von anderen und unter sich verschiedenen Eigenschaften, beides stattfindend nach einfachen rationalen Verhältnissen bestimmter sogenannter Verbindungsgewichte, welche den sich verbindenden oder durch Zerlegung erhaltenen Stoffen eigenthümlich sind und auf das Verbindungsgewicht eines gewissen conventionell gewählten chemisch einfachen (unzerlegbaren) Stoffes, gewöhnlich des Wasserstoffes, als Einheit bezogen werden. Hiernach sieht man sich zu der weiteren Annahme genöthigt, dass die Moleküle selbst wieder aus noch kleineren, ihrerseits aber nun nicht weiter theilbaren und deshalb Atome genannten Theilchen bestehen, dass sie Gruppen von Atomen und zwar bei chemisch einfachen Stoffen von gleichartigen, bei chemisch zusammengesetzten Stoffen von ungleichartigen Atomen sind, indem man so viele verschiedene Arten der letzteren von je einer bestimmten, der betreffenden Art eigenthümlichen Masse annimmt, wie es chemisch einfache Stoffe giebt. Da die Atome Grössen und als solche mathematisch theilbar sind, kann die ihnen zugeschriebene Untheilbarkeit selbstverständlich nur als eine thatsächliche physische Untheilbarkeit durch mechanische, chemische, überhaupt durch natürliche Einwirkungen verstanden werden. Von den Atomen eines Moleküls ist anzunehmen, dass sie mit gewissen Kräften auf einander wirken, im Allgemeinen sich nicht berühren und, so lange das Molekül seinen physikalischen und chemischen Charakter behält, eine beschränkt veränderliche relative Lage in demselben haben.

Manche Erscheinungen, insbesondere die verschiedenen Formen, in denen gewisse Stoffe (dimorphe Körper) unter verschiedenen Umständen krystallisiren können, oder sonstige Verschiedenheiten des Verhaltens (Allotropie und Isomerie) gewisser chemischer Elemente (z. B. gewöhnlicher Sauerstoff und Ozon) und zusammengesetzter Stoffe bei gleicher chemischen

Zusammensetzung, deuten darauf hin, dass die Atome (bei unveränderlichem Zahlenverhältnisse der verschiedenartigen Atome im Falle eines chemisch zusammengesetzten Stoffes) sich in verschiedener absoluter Zahl und auf verschiedene Weise, d. h. zwischen verschiedenen Grenzen bezüglich auf ihre beschränkt veränderliche relative Lage, zu einem Molekül gruppiren können. Auch mögen die verschiedenen Aggregatformen eines Körpers durch diese Umstände zum Theil bedingt sein; insbesondere ist es wahrscheinlich, dass die Moleküle fester Körper von zusammengesetzterer Art sind, indem die einfachen Moleküle von geringster Atomzahl, wie solche bei flüssigen und luftförmigen Körpern von gleichförmigem Wärmezustande in durchschnittlich gleichförmiger Vertheilung vorkommen, bei ihnen zunächst engere Gruppen, mehrfache Moleküle bilden, welche dann ihrerseits den Körper constituiren und durch die Art ihrer Zusammensetzung aus den einfachen Molekülen die Eigenschaften des Körpers bestimmen. Auf diese Weise wird die Vorstellung einer grösseren Zertheilung oder Auflockerung der Materie beim Schmelzen eines festen Körpers auch ohne Volumvergrösserung desselben gewonnen, sofern die durchschnittlichen Entfernungen nächstbenachbarter solcher mehrfachen Moleküle wesentlich grösser, als ihre grössten Dimensionen, d. h. als die Entfernungen von irgend zwei Atomen desselben mehrfachen Moleküls vorausgesetzt werden. Wenn ausserdem in einem mehrfachen Molekül die durchschnittlichen Entfernungen nächstbenachbarter einfacher Moleküle wesentlich grösser sind, als die grössten Dimensionen der letzteren, so ist das durchschnittliche Verhältniss der grössten Dimensionen zu der kleinsten Entfernung für zwei mehrfache Moleküle eines festen Körpers grösser, als für zwei einfache Moleküle desselben Körpers als Flüssigkeit von gleichem Volumen; dadurch kann es bewirkt werden, dass die Molekularwirkung zwischen den Molekülen eines festen Körpers nicht nur von anderer Grösse, sondern auch von anderer Art, insbesondere in höherem Grade von den Lagen der Moleküle gegen die gerade Verbindungslinie ihrer Massenmittelpunkte abhängig ist als bei flüssigen Körpern, dass sie also in höherem Grade ausser ihrer gegenseitigen Anziehung oder Abstossung auch eine gegenseitige Richtkraft auf einander ausüben. Ebenso wie den Atomen in den einfachen Molekülen ist auch den letzteren in den mehrfachen Molekülen eine beschränkt veränderliche relative Lage zuzuschreiben; die Ueberschreitung einer gewissen Grenze in dieser Hinsicht hat entweder eine Structurveränderung (veränderte Gruppirung der einfachen zu mehrfachen Molekülen) oder eine Schmelzung des festen Körpers (Auflösung der mehrfachen in einfache Moleküle) zur Folge, wogegen die Ueberschreitung einer gewissen Grenze

hinsichtlich der relativen Lage der Atome in den einfachen Molekülen eine chemische Zersetzung bedingt.

Indem die Untersuchungen über die Erscheinungen und das Wesen des Lichtes sowie auch der denselben Gesetzen folgenden strahlenden Wärme zu dem Schlusse geführt haben, dass Licht- und Wärmestrahlen als das Resultat einer schwingenden Bewegung der unmessbar kleinen, auch als physisch untheilbar zu denkenden Theilchen eines im ganzen Weltraume verbreiteten und alle Körper durchdringenden Stoffes, des Aethers, zu betrachten sind, müssen endlich noch die **Aetheratome** als weitere zur Molekularconstitution eines Körpers gehörige Bestandtheile berücksichtigt werden. Zwischen ihnen gegenseitig sowie auch zwischen ihnen und den Körperatomen sind gewisse Kräfte wirkend vorauszusetzen von solcher Art, dass diese Aetheratome im Allgemeinen weder sich gegenseitig noch die Körperatome berühren, dass sie zum Theil wenigstens die zur Licht- und Wärmestrahlung nöthige freie Beweglichkeit im Körper besitzen. Die Gesammtmasse aller Aetheratome eines Körpers ist übrigens nicht nur sehr klein im Vergleich mit der Gesammtmasse aller Körperatome, sondern auch an und für sich unmessbar klein.

Gewöhnlich nimmt man an, die Aetheratome seien sehr klein im Vergleich mit den Körperatomen, und ihre Anzahl sei verhältnissmässig sehr gross; indessen ist namentlich in letzterer Hinsicht auch eine entgegengesetzte Ansicht vertreten worden.* Im Folgenden mag jede Annahme in diesen Beziehungen, sowie auch in Betreff der Gestalt der Atome und der Ursachen, durch welche die Verschiedenheit des chemischen Verhaltens der Körperatome ausser durch ihre verschiedenen Massen (Atomgewichte) begründet zu denken ist, dahingestellt bleiben. Körper- und Aetheratome werden wie **materielle Punkte** bei den folgenden Untersuchungen behandelt.

Ebenso wenig übereinstimmend, wie in den genannten Beziehungen, sind die bisher gemachten Annahmen hinsichtlich des Sinnes und des Wirkungsgesetzes der **Kräfte, womit die Atome auf einander wirken.** Abgesehen von der Licht- und Wärmestrahlung, welche vom Aether abhängt, und von der Art, wie die Gruppirung seiner Atome in einem Körper modificirt ist, kann in der That aus den meisten Erscheinungen physikalischer Natur zunächst nur auf die gegenseitige Wirkung der kleinsten gleich-

---

* Entwurf einer Molekularphysik von Prof. Dr. **Wittwer.** Zeitschr. f. Mathem. und Physik, 1866, S. 177, mit weiteren Ausführungen in späteren Jahrgängen derselben Zeitschrift.

tigen Körpertheile geschlossen, diese Gesammtwirkung aber auf verschiedene Weise als das Resultat von Einzelwirkungen zwischen Körper- und Aetheratomen erklärt werden. Uebereinstimmung herrscht nur darüber, dass Aetheratome sich gegenseitig abstossen. Im Uebrigen wird gewöhnlich angenommen, dass sowohl Körper- und Körperatome als auch Körper- und Aetheratome sich anziehen; jedoch ist sowohl in jener (Wittwer a. a. O.), als auch in dieser Hinsicht* die entgegengesetzte Annahme durchzuführen versucht worden. Obschon die folgenden Entwickelungen nicht nothwendig an eine bestimmte Voraussetzung in diesen Beziehungen gebunden sind, mag doch zur Veranschaulichung der Verhältnisse die gewöhnliche Annahme zu Grunde gelegt werden, dass Körper- und Körperatome, desgl. Körper- und Aetheratome sich anziehen, Aether- und Aetheratome sich abstossen. Gegen die Annahme einer gegenseitigen Anziehung zwischen Körper- und Aetheratomen scheint zwar der Umstand zu sprechen, dass der Theorie zufolge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in homogenem Aether der Quadratwurzel der Aetherdichte proportional ist,** indem daraus, weil diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit in

* Die Grundzüge der Weltordnung, von Prof. Dr. Chr. Wiener, 1863.

** Die Fortpflanzung von ebenen Wellen geradliniger Schwingungen in homogenem Aether ist im Allgemeinen an die Bedingung geknüpft, dass diese Schwingungen nach drei bestimmten, auf einander senkrechten Richtungen stattfinden, welche von der zur Wellenebene senkrechten Fortpflanzungsrichtung, deren Winkel mit drei rechtwinkeligen Coordinatenaxen α, β, γ seien, von der Wellenlänge λ und von der Gruppirung der Atome des als unbegrenzt vorausgesetzten Aethers abhängen. Die Cosinusse a, b, c der Winkel, welche eine solche mögliche Schwingungsrichtung mit den Coordinatenaxen bildet, sind nämlich dreifach bestimmt durch die Gleichungen

$$a^2+b^2+c^2=1;\quad \frac{La+Rb+Qc}{a}=\frac{Ra+Mb+Pc}{b}=\frac{Qa+Pb+Nc}{c},$$

und wenn der Werth dieser drei einander gleichen Quotienten mit Δ bezeichnet wird, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der betreffenden Schwingungen

$$v=\frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\Delta}\,.$$

Darin ist

$$L=\Sigma\left[m\left(\frac{f(r)}{r}+\frac{x^2\varphi(r)}{r^3}\right)E\right];\quad P=\Sigma\left[m\frac{yz\varphi(r)}{r^3}E\right]$$

$$M=\Sigma\left[m\left(\frac{f(r)}{r}+\frac{y^2\varphi(r)}{r^3}\right)E\right];\quad Q=\Sigma\left[m\frac{zx\varphi(r)}{r^3}E\right]$$

$$N=\Sigma\left[m\left(\frac{f(r)}{r}+\frac{z^2\varphi(r)}{r^3}\right)E\right];\quad R=\Sigma\left[m\frac{xy\varphi(r)}{r^3}E\right]$$

einem Körper erfahrungsmässig kleiner ist, als im körperleeren Raume, auf eine geringere Dichtigkeit des Aethers in einem Körper, als im Weltraum und somit auf eine Abstossung zwischen Körper- und Aetheratomen scheint geschlossen werden zu müssen. Indessen ist zu bemerken, dass bei der Anwendung jener theoretischen Formeln auf die Gesetze der Lichtstrahlen in einem Körper der Einfluss der Körperatome auf den Aether nur insofern berücksichtigt wird, als derselbe eine veränderte Gruppirung der Aetheratome zur Folge hat, während die Schwingungen der letzteren als nur unter der Einwirkung der übrigen Aetheratome stattfindend vorausgesetzt werden. Wenn aber diese Annahme zu Resultaten führt, welche der Erfahrung entsprechen, wie es thatsächlich der Fall ist, so folgt daraus nur, dass der Einfluss der Körperatome auf die schwingenden Aetheratome durch die Annahme einer gewissen Beschaffenheit des Aethers rechnungsmässig berücksichtigt werden kann; in der That wird ein solcher Einfluss stattfinden, und zwar so, dass, wenn er in einer Anziehung besteht, dadurch die Abstossung einer entsprechenden Aethermenge compensirt wird, die Schwingungen also so stattfinden, als ob die Dichtigkeit des Aethers geringer wäre, als sie in Wirklichkeit ist.

Wenn schon in Betreff des Sinnes der dreierlei Einzelkräfte zwischen den zweierlei Atomen bisher noch keine allseitige Uebereinstimmung der Annahmen erzielt ist, so ist es begreiflich, dass um so mehr auch über die Wirkungsgesetze, welche den fraglichen Einzelkräften behufs Erklärung der Naturerscheinungen zuzuschreiben sind, noch die grösste Ungewissheit herrscht. Unbezweifelt ist nur, dass alle diese Kräfte zwischen je zwei Atomen den Producten ihrer Massen proportional zu setzen sind und

---

$$\text{mit } E = 2\, sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda}(x\, cos\, \alpha + y\, cos\, \beta + z\, cos\, \gamma)\right]$$

$$\varphi(r) = r\frac{df(r)}{dr} - f(r)$$

›e mit wachsenden Entfernungen abnehmen, wobei je zwei Aetheratome und je zwei chemisch gleichartige Körperatome als gleichmassig gelten.*

Den im Vorhergehenden besprochenen Vorstellungen entsprechend wird der im Volumen eines Körpers befindliche Aether nur insoweit als Bestandtheil des Körpers betrachtet, als er in seiner Beschaffenheit durch die Einwirkung der Körperatome modificirt ist. Dabei kann jedes Atom dieses Aethers als zu einem bestimmten, nämlich zu demjenigen Körperatom gehörig betrachtet werden, von welchem die grösste Kraftwirkung (Anziehung) auf dasselbe ausgeübt wird. Auf solche Weise erscheint der vollständige Körper als ein System von Molekülen, deren jedes eine Gruppe von Körper- und Aetheratomen ist; diese vervollständigten Moleküle, den Redtenbacher'schen Dynamiden entsprechend, werden in der Folge als Körpermoleküle oder schlechtweg als Moleküle bezeichnet, sofern nur bei den Atomen eine Unterscheidung von Körper- und Aetheratomen erforderlich ist. Zwischen den zweierlei Bestandtheilen eines Moleküls findet aber der Unterschied statt, dass seine Körperatome, so lange es seinen physikalischen und chemischen Charakter bewahrt, stets dieselben bleiben, während die Aetheratome zwischen zwei sich nahe kommenden Molekülen theilweise ausgetauscht werden können. Auch kann, wie schon erwähnt, wenigstens bei luftförmigen Körpern, der Raum zwischen den vollständigen Molekülen von solchem Aether erfüllt sein, welcher dieselbe Beschaffenheit wie der allgemeine Weltäther (gleiche Dichtigkeit bei gleichförmiger isotroper Gruppirung) besitzt, und deshalb überhaupt nicht als Körperbestandtheil betrachtet wird; darauf deuten u. A. die Versuche von Fizeau, nach welchen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in der Luft von derjenigen im körperleeren Weltraume nicht merklich verschieden ist.

Die resultirende Wirkung zwischen zwei Molekülen A und A' ist nun Resultat von paarweise gleichen und entgegengesetzten einzelnen Anziehungs- und Abstossungskräften, womit die Körper- und Aetheratome von [illegible] iese auf jene wirken. Dieses [illegible] auf zwei gleiche Kräfte P ent[illegible] in dieselbe Gerade C (die [illegible] elche mit gleichen Momenten

[illegible] ichungen über die Theorie des [illegible] le la lumière, 1864), dass die [illegible] ten Potenz ihrer Entfernung ab[illegible] ch umgekehrt proportional der [illegible] h dem Newton'schen Gesetze

M_0 in entgegengesetztem Sinne um diese Gerade C drehen, so dass di resultirende Einwirkung der Moleküle auf einander als eine gegenseitig Schraubenwirkung mit der gemeinschaftlichen Axe C betrachtet werde kann. Wenn die resultirende Kraft P, womit A' auf A wirkt, an de Massenmittelpunkt S von A versetzt, und das dieser Versetzung entspr chende Kräftepaar $= Pa$ (unter a die Entfernung des Punktes S von de Centralaxe C verstanden) mit dem von A' auf A ausgeübten kleinste Kräftepaare M_0 zu einem resultirenden Paare $M = \sqrt{M_0^2 + (Pa)^2}$ zusam mengesetzt, und wenn ebenso hinsichtlich der von A auf A' ausgeübte Wirkung verfahren wird, wodurch die im Massenmittelpunkte S' von angreifende Kraft P und ein Paar $M' = \sqrt{M_0^2 + (Pa')^2}$ erhalten werd so sind die in S und S' angreifenden Kräfte P gleich gross, parallel un von entgegengesetztem Sinne, während die Paare M und M' im Allgemein verschiedene Momente und nicht parallele Ebenen haben. Die Kräfte können in je zwei Componenten: R nach SS' resp. $S'S$ und N senkrec darauf zerlegt werden; die beiden Componenten R sind dann gleich u entgegengesetzt, die Componenten N gleich, parallel und von entgegeng setztem Sinne. Alle diese Grössen, R, N, M und M' sind im Allgemein abhängig sowohl von der Entfernung $SS' = r$, als auch von den Lagen d Moleküle gegen die Gerade SS', und zwar in solcher Weise, dass mit wa sender Entfernung r diese letztere Abhängigkeit von den Lagen der Mo küle gegen die Gerade SS' mehr und mehr untergeordnet wird im Ve gleich mit dem Einfluss von r, und auch die Wirkungen von N, M und M' mehr und mehr vernachlässigt werden können gegen die Wirkung d Kraft R. Ist $r = r_1$ geworden $=$ dem unmessbar kleinen Halbmesser d Wirkungsräume von A und A' bezüglich auf einander, so ist R nicht m merklich verschieden von der Anziehungskraft $= Const. \frac{mm'}{r_1^2}$, welche in S und S' vereinigt gedachten Molekülmassen m und m' (mit verschw dend kleinem Fehler $=$ den Summen der Massen nur ihrer Körperatom nach dem Gravitationsgesetze auf einander ausüben.

Der analytische Ausdruck der Kraft R als Function der Einzelkrä zwischen den Atomen und der die Oerter der letzteren bestimmenden C ordinaten enthält Bestandtheile mit entgegengesetzten Vorzeichen, welc positiv gewählt werden sollen, wenn sie einer gegenseitigen Anziehun negativ, wenn sie einer Abstossung der Punkte S und S' entsprech Setzt man dann $R = R_1 - R_2$, unter R_1 die Summe der positiven u unter R_2 die absolut genommene Summe der negativen Bestandtheile v standen, und lässt man die Entfernung SS' sich ändern, während die M

küle immer in bestimmten, z. B. in denjenigen Lagen gegen die Gerade SS' bleiben mögen, für welche der Absolutwerth von R bei der betreffenden Entfernung $SS' = r$ am grössten ist, so ändern sich R_1 und R_2 nach verschiedenen Gesetzen. Durch das gesammte Verhalten der Körper, insbesondere z. B. durch die Erscheinungen der Elasticität und der Cohäsion namentlich bei festen Körpern, wird in dieser Hinsicht die Behauptung begründet, dass es einen gewissen Werth $r = r_0$ der Entfernung SS' giebt, für welchen $R_1 = R_2$, also $R = 0$ ist, und dass bei diesem Werthe r_0 und in der Nähe desselben sich R_2 schneller mit r ändert, als R_1, so dass, wenn man von dieser Entfernung $SS' = r_0$ ausgeht, bei abnehmendem r eine zunehmende Abstossung, bei wachsendem r eine zunächst zunehmende und dann wieder abnehmende Anziehung der Moleküle nach der Geraden SS' stattfindet, bis letztere für $r = r_1$ nicht mehr merklich von der allgemeinen Gravitationsanziehung verschieden ist.* Bei Voraussetzung von an-

* Ist m die Gesammtmasse der Körperatome, μ die Aethermasse des Moleküls A, und haben m' und μ' die entsprechenden Bedeutungen für das Molekül A', so ist, wenn die Kraft R näherungsweise so berechnet wird, als ob m und μ im Punkte S, m' und μ' im Punkte S' vereinigt wären, bei Voraussetzung der in voriger Anmerkung erwähnten Wirkungsgesetze der betreffenden Partialkräfte:

$$R = a\frac{mm'}{r^2} + b\frac{m\mu' + m'\mu}{r^2} - c\frac{\mu\mu'}{r^6},$$

unter a, b, c Constante verstanden, oder wenn die Aethermassen μ und μ' den körperlichen Massen m und m' proportional gesetzt werden, etwa

$$\mu = \alpha m \text{ und } \mu' = \alpha m',$$

$$R = \frac{mm'}{r^2}\left(a + 2b\alpha - \frac{c\alpha^2}{r^4}\right) = A\frac{mm'}{r^2}\left(1 - \frac{B}{r^4}\right) = A\frac{mm'}{r^2}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^4\right].$$

R ist positiv oder negativ, jenachdem $r > r_0$ oder $r < r_0$ ist. Mit $\frac{r_0}{r} = x$ ist

$$R = A\frac{mm'}{r_0^2}x^2(1 - x^4) = max.$$

für $x^2 - x^6 = max.$, also $x^4 = \frac{1}{3}$.

oder für $r = r' = r_0\sqrt[4]{3} = 1{,}316\, r_0$,

und zwar ist $max.R = \frac{2}{3}A\frac{mm'}{r'^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}A\frac{mm'}{r_0^2}$.

Indem der Wirkungsraum eines Moleküls nicht als ein mathematisch bestimmter Begriff definirt wurde, ist sein Halbmesser r_1 ein conventionell anzunehmendes Vielfache von r_0. Würde z. B. der Wirkungsraum durch die Be-

deren bestimmten Lagen der Moleküle gegen die Gerade SS' können der Bedingung $R = 0$ etwas andere Werthe von r_0 entsprechen; ebenso können mit Rücksicht auf die beschränkt veränderliche relative Lage der Atome in den Molekülen (vielleicht auch mit Rücksicht auf eine verschiedene Zahl von Aetheratomen in denselben) r_0 sowohl wie r_1 je nach den Umständen verschieden sein. Jedenfalls lassen sich um den Massenmittelpunkt S eines Moleküls als geometrischen Mittelpunkt zwei Kugelflächen beschreiben, welche seinen betreffenden Wirkungsraum bezüglich auf ein anderes Molekül A' in einen äusseren Anziehungsraum, einen inneren Abstossungsraum und einen dazwischen liegenden Uebergangsraum theilen, so dass, jenachdem der Massenmittelpunkt S' von A' in dem ersten, zweiten oder dritten dieser Räume liegt, zwischen A und A' nach der Geraden SS' Anziehung, Abstossung oder je nach Umständen das Eine oder das Andere stattfindet.

Bei gegebenen relativen Lagen der Atome in den Molekülen A und A' seien SX, SY, SZ drei Axen von festen Lagen in dem Molekül A; die Gerade SS', welche die Massenmittelpunkte S und S' der beiden Moleküle

---

dingung begrenzt, dass das Verhältniss der Abstossungskraft R_2 zur Anziehungskraft R_1

$$\frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^4 = 0.01 \qquad 0.001 \qquad 0.0001 \text{ ist,}$$

so wäre $r_1 = 3{,}162\, r_0 \quad 5{,}623\, r_0 \quad 10\, r_0$

Wird $r < r_0$, so nimmt der Absolutwerth von R sehr rasch zu; es ist z. B.

$$\text{für } r = \frac{1}{2} r_0 \qquad \frac{1}{3} r_0 \qquad \frac{1}{4} r_0$$

$$-R = 15 \qquad 80 \qquad 255 \times A \frac{mm'}{r^2}$$

$$= 60 \qquad 720 \qquad 4080 \times A \frac{mm'}{r_0^2}.$$

Die Constante A der Newton'schen Gravitation $= A \frac{mm'}{r^2}$ = dem Werth von R für ein verschwindend kleines Verhältniss $\frac{r_0}{r}$ ist als abhängig nicht nur von der gegenseitigen Anziehung der körperlichen Materie, sondern auch von der Anziehung zwischen ihr und dem Aether zu betrachten; denn wenn auch in dem Ausdrucke

$$A = a + 2ba$$

a ein sehr kleiner Bruch ist, so kann doch b viel $> a$ sein ebenso wie jedenfalls in noch höherem Grade die Constante c viel $> a$ sein muss.

enthält, habe eine gegebene Lage gegen diese Axen. Die relative Lage von A' gegen A ist dann bestimmt durch 4 Bestimmungsstücke, z. B. durch die Strecke $SS' = r$, ferner durch die Winkel, welche von einer in A' festen Geraden $S'T'$ mit zwei von den drei Coordinatenaxen gebildet werden, endlich durch den Winkel zwischen der Ebene $SS'T'$ und einer durch $S'T'$ gehenden, in A' festen Ebene. Diese 4 Elemente lassen sich (unter Umständen auf mehrfache Weise) so bestimmen, dass die vorhin mit R, N, M, M' bezeichneten Kräfte und Kräftepaare = Null sind, dass also Gleichgewicht zwischen den Systemen von Einzelkräften stattfindet, womit die Moleküle gegenseitig auf einander wirken; S' liegt dann in dem zuvor genannten Uebergangsraum bezüglich auf die Wirkung von A auf A'. Sind die Moleküle in jeder Hinsicht einander gleich, so ist nothwendig jede Gleichgewichtslage von A' gegen A identisch mit einer der Gleichgewichtslagen von A gegen A'; giebt es nur eine gegenseitige Gleichgewichtslage, so muss dabei A ebenso gegen A' wie A' gegen A liegen, d. h. die in A' festen Axen $S'X'$, $S'Y'$, $S'Z'$, welche den Axen SX, SY, SZ in A homolog sind, müssen denselben parallel und entgegengesetzt gerichtet sein. Wenn die Gerade SS' ihre Lage gegen die Axen ändert, so kann auch der einer Gleichgewichtslage entsprechende Werth von r ein anderer werden. Hieraus ergiebt sich die Vorstellung einer das Gleichgewicht bedingenden, nach verschiedenen Richtungen verschiedenen regelmässigen Anordnung der Moleküle, wie solche bei der Krystallisation angenommen werden muss, wobei freilich zu berücksichtigen ist, dass in einem Körper die Gleichgewichtslage jedes Moleküls A durch die Gesammtwirkung aller übrigen Moleküle A' bedingt ist, deren Massenmittelpunkte in seinem Wirkungsraume bezüglich auf dieselben liegen. Aus diesem letzteren Grunde kann auch die Anordnung der Moleküle an der Oberfläche eines Körpers eine andere sein, wie im Inneren desselben, und kann z. B., wie es die Theorie der Capillarität voraussetzt, eine gewisse positive oder negative Arbeit aufgewendet werden müssen, um eine Flüssigkeitsmasse aus demjenigen Zustande, welchen sie als unmessbar dünne, mit der Luft oder mit einer festen Wand in Berührung befindliche Oberflächenschicht besitzt, in denjenigen Zustand zu versetzen, welcher im Inneren der Flüssigkeit in messbarer Entfernung von der Oberfläche stattfindet. —

Die vorstehenden, das Wesen des Molekularzustandes nur andeutenden Betrachtungen lassen erkennen, ein wie weites Feld der Hypothese sich hier darbietet, um die mannigfachen Eigenschaften der Körper, die verschiedenen Aggregatformen, die Elasticität und Ductilität, die Cohäsion und Adhäsion, die Capillarität und Absorption, die Krystallisation, die chemischen

Verbindungen und Zersetzungen u. s. w. qualitativ und quantitativ als nothwendige Folgen gewisser Gruppirungen der mit bestimmten Kräften auf einander wirkenden Atome, jene Gruppirungen selbst als Folgen dieser Kräfte vollkommen befriedigend zu deduciren; sie lassen es begreiflich erscheinen, wenn die Naturwissenschaft von diesem ihrem letzten Ziele z. Z. noch weit entfernt ist. Dazu kommt nun aber eine weitere Complication, bedingt durch den Umstand, dass die Atome in den Molekülen, die Moleküle im Körper, auch abgesehen von der eine schwingende Bewegung der Aetheratome bedingenden Licht- und Wärmestrahlung und abgesehen von irgend einer merklichen Veränderung des inneren Körperzustandes, beständig in einer für diesen Zustand an sich charakteristischen solchen Bewegung begriffen sein können, welche im Gegensatze zu derjenigen Bewegung, wodurch der äussere Körperzustand (§. 2) charakterisirt wird, nicht mit einer messbaren Ortsänderung von Massenelementen verbunden ist.

§. 46. Innere Bewegung.

Zur mechanischen Erklärung des Wesens und der Wirkungen der Wärme wird die zu Ende des vorigen §. zunächst nur als möglich hingestellte, nicht wahrnehmbare, also auch nicht durch Beobachtung messbare beständige Bewegung der einen Körper constituirenden Atome resp. Moleküle als wirklich stattfindend und mit Rücksicht auf ihre Art und Intensität als ein wesentliches Attribut des betreffenden Wärmezustandes des Körpers betrachtet. Sie werde als innere Bewegung, eine ihr entsprechende Bahn, Geschwindigkeit oder lebendige Kraft als innere Bahn, innere Geschwindigkeit resp. innere lebendige Kraft bezeichnet. Wo es im Gegensatze dazu nöthig erscheint, soll dann die in der Mechanik [illegible] in der Folge, sofern eine Verwechselung nicht zu befürchten ist, [illegible] weg sogenannte Bewegung eines Körpers, welche §. 2 [illegible] continuirlichen Ortsänderung seiner Massenelemente besteht, [illegible] Bewegung, eine derselben entsprechende Bahn, Geschwindigkeit oder lebendige Kraft eine äussere Bahn, Geschwindigkeit resp. [illegible] Kraft genannt werden.

In Betreff der Art der inneren Bewegung [illegible] für die verschiedenen Aggregatzustände [illegible] [illegible] kann [illegible] [illegible] [illegible] nur in Beziehung auf die geometrischen Charaktere [illegible]

der Bahnen der in innerer Bewegung begriffenen materiellen Punkte (Atome oder Massenmittelpunkte von Molekülen), sondern auch schon bezüglich der Art dieser materiellen Punkte selbst. Entgegen der namentlich von Redtenbacher* vertretenen und analytisch specieller ausgeführten Ansicht, dass die mit den Wärmeerscheinungen zusammenhängende innere Bewegung nur den Aetheratomen zuzuschreiben sei, soll im Folgenden die namentlich von Clausius vertretene und z. Z. ziemlich allgemein getheilte Annahme zu Grunde gelegt werden, nach welcher jene innere Bewegung, insoweit sie den Wärmezustand (und zwar die Körperwärme durch ihre lebendige Kraft) bedingt, den Körperatomen zukommt, nämlich theils als relative Bewegung derselben in den einzelnen Molekülen, theils als Bewegung dieser Moleküle im Körper. Wenn dann auch die Aetheratome, insofern sie an die Körperatome gebunden sind, an dieser inneren Bewegung theilnehmen, so ist doch ihre entsprechende lebendige Kraft ebenso wie ihre Masse unmessbar klein im Vergleich mit derjenigen der Körperatome und deshalb zu vernachlässigen.

Die in innerer Bewegung begriffenen Körpermoleküle können infolge der beständigen Aenderung ihrer gegenseitigen Entfernungen und relativen Lagen überhaupt ihre lebendigen Kräfte vielfach theilweise austauschen durch Vorgänge, welche als elastische Stösse bezeichnet werden können, sofern nur die Vorstellung einer geometrischen Berührung dabei fern gehalten wird; die Wärmeleitung beruht auf einer solchen Uebertragung lebendiger Kraft von Molekül zu Molekül, welche vorwiegend nach einer bestimmten Richtung stattfindet. Die Wärmestrahlung dagegen ist wie die Lichtstrahlung nur durch eine schwingende Bewegung der Aetheratome mechanisch zu erklären; die Aufnahme oder Abgabe von Wärme Seitens eines Körpers durch Strahlung beruht auf einer Umsetzung von lebendiger Kraft der schwingenden Aetheratome in innere lebendige Kraft von Körpermolekülen oder umgekehrt in Folge elastischer Stösse, welche so schnell auf einander folgen, dass trotz der unmessbar kleinen Masse des hierbei betheiligten Aethers doch die von ihm in einer messbaren Zeit abgegebene oder aufgenommene lebendige Kraft eine (als Wärme) messbare Grösse hat.

Insoweit die innere Bewegung in einer relativen Bewegung der Körperatome in den Molekülen besteht, ist kein Grund vorhanden, dieselbe für die verschiedenen Aggregatformen als verschiedenartig anzunehmen; sie ist immer als eine schwingende Bewegung um die Gleichgewichtslagen der Atome in dem betreffenden Molekül zu denken, wobei die Aetheratome nur

* Dynamidensystem; Grundzüge einer mechanischen Physik. 1857.

insoweit in Betracht kommen, als sie die Kräfte wesentlich mit bestimmen, womit die von ihnen begleiteten Körperatome auf einander wirken. Die innere Bewegung der ganzen Moleküle dagegen, wobei die Atome, welche dieselben constituiren, in ihren Gleichgewichtslagen relativ ruhend zu denken sind, muss als von der Aggregatform abhängig vorausgesetzt werden. Sie kann in Translationsbewegungen der Massenmittelpunkte S der Moleküle und in Rotationen der letzteren um jene Punkte zerlegt werden; bei festen Körpern sind beiderlei Bewegungen als Schwingungen um Gleichgewichtslagen zu denken. Bei flüssigen und luftförmigen Körpern giebt es keine bestimmten Gleichgewichtslagen der Moleküle; insbesondere kann die Rotation eines Moleküls bezüglich auf irgend eine Axe bei beiden Aggregatformen stets in gleichem Sinne stattfinden, wenn dies auch mit Rücksicht auf die vielfach wechselnden gegenseitigen Einwirkungen der in den Bereich ihrer Molekularwirkung kommenden Moleküle nicht wahrscheinlich sein mag. Die Bahnen der Punkte S sind in beiden Fällen im Allgemeinen nicht geschlossen; sie sind bei flüssigen Körpern als vielfach verschlungene krumme Linien zu denken, welche, sofern keine Strömungen, d. h. messbare äussere Bewegungen in der Flüssigkeit stattfinden, der Regel nach in demselben unmessbar kleinen Theil des Körpervolumens verlaufen mögen, wogegen bei luftförmigen Körpern diese Bahnen auch abgesehen von irgend einer äusseren Bewegung in der Regel als im ganzen Körpervolumen verlaufend und sich verschlingend zu denken sind der Art, dass sie aus geradlinigen Stücken von den verschiedensten Richtungen bestehen, welche durch Curvenstücke in einander übergehen. So lange nämlich der Massenmittelpunkt S eines Moleküls sich ausserhalb des Wirkungsraumes irgend eines anderen befindet, was bei luftförmigen Körpern um so mehr die Regel ist, je mehr sein Zustand dem vollkommenen Gaszustande nahe kommt, muss es im Wesentlichen (nämlich bei Abstraction von äusseren Massenkräften wie z. B. der Schwerkraft) sich nach denselben Gesetzen bewegen wie ein frei beweglicher Körper, auf welchen keine Kräfte wirken, insbesondere also sein Massenmittelpunkt S mit constanter Geschwindigkeit in gerader Linie sich bewegen; eine Aenderung dieser Bewegung wird nur vorübergehend bei dem Durchgang des Punktes S durch den Wirkungsraum eines anderen Moleküls stattfinden.*

* Clausius berechnete das Verhältniss der mittleren Länge $= l$ des Weges, welchen der Massenmittelpunkt eines Moleküls geradlinig durchläuft bis er in den Wirkungsraum eines anderen Moleküls gelangt, zu dem mittleren Abstand $= \lambda$ nächstbenachbarter Moleküle ($= \sqrt[3]{\frac{1}{n}}$, unter n die Zahl der M—

In allen Fällen ist die innere Bewegung eines Körpers (nach der von

---

leküle in der Volumeneinheit verstanden) und zum Halbmesser $= \varrho$ ihrer Wirkungsräume. Er fand (Pogg. Ann. Bd. 105, S. 239), falls die mittlere Länge l definirt wird durch die Gleichung:

$$l = \frac{1}{N}\int_{x=0}^{x=\infty} x \, . \, dN,$$

unter dN diejenige Zahl unter unzählig vielen $= N$ Molekülen verstanden, für welche die wirkliche Länge jenes Weges zwischen den Grenzen x und $x + dx$ liegt,

$$\frac{l}{\varrho} = \frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\pi\varrho^3}; \quad \frac{l}{\lambda} = \frac{3}{4}\frac{\lambda^2}{\pi\varrho^2}.$$

Es verhält sich hiernach die mittlere Länge des geradlinigen Weges eines Moleküls zum Halbmesser einer Wirkungssphäre wie das Volumen des luftförmigen Körpers zu demjenigen Theile desselben, welcher von den Wirkungssphären erfüllt wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der geradlinige Weg x eines Moleküls $> ml$ ist, ergiebt sich:

$$W_m = e^{-m},$$

unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden, insbesondere die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $x > l$ ist,

$$W_1 = e^{-1} = 0{,}368.$$

Der Weg $l' = \mu l$ von mittlerer Wahrscheinlichkeit, d. h. welcher von dem wirklichen Wege x eines Moleküls bis zu dessen Ablenkung durch ein anderes Molekül ebenso oft überschritten, als nicht erreicht wird, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{1}{2} = e^{-\mu}, \text{ woraus } \mu = ln 2 = 0{,}693$$

folgt. Wäre z. B.

$$\frac{\lambda^3}{\frac{4}{3}\pi\varrho^3} = 1000, \text{ also } \frac{\lambda}{\varrho} = 16{,}12,$$

so dass erst durch Compression des luftförmigen Körpers auf 0,001 seines Volumens das letztere der Summe aller Wirkungsräume gleich wird, so ergäbe sich

$$l = 1000\varrho = 62\lambda,$$

$$l' = 693\varrho = 43\lambda.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Molekül eine beträchtliche Strecke x durchlaufe, ohne von einem anderen abgelenkt zu werden, nimmt mit wachsendem x sehr schnell ab; sie ist z. B. für $x = 10l$ nur

$$e^{-10} = 0{,}000045.$$

Clausius eingeführten Bezeichnung) als eine stationäre Bewegung* von materiellen Punkten (der Körperatome) vorauszusetzen, d. h. als eine solche, bei welcher die Projection A jedes materiellen Punktes P auf irgend eine Gerade OX von fester Lage in dem vom Körper bei seinem augenblicklichen und zunächst als dauernd vorausgesetzten Wärmezustande eingenommenen Raume in dieser Geraden eine schwingende Bewegung hat der Art, dass zwar die Lagen und Längen der Wege sowie die Bewegungsgesetze bei den einzelnen auf einander folgenden einfachen Schwingungen (Bewegungen gleichen Sinnes) des Punktes A verschieden sein können, dass aber seine mittlere Entfernung OA_0 von einem in OX festen Punkte O und sein mittleres Geschwindigkeitsquadrat für eine gewisse Zeit t um so mehr bestimmten Grenzwerthen sich nähern, je grösser die Zeit t im Vergleich mit der mittleren Schwingungsdauer angenommen wird, während die mittlere Geschwindigkeit (letztere algebraisch verstanden, d. h. positiv oder negativ, jenachdem sie die Richtung OA_0 oder A_0O hat) sich der Grenze Null nähert. Denkt man den Punkt P auf drei sich schneidende und nicht in einer Ebene liegende, im Körperraum fixirte Axen OX, OY, OZ projicirt, so schneiden sich die in den mittleren Lagen A_0, B_0, C_0 der betreffenden Projectionen A, B, C construirten Normalebenen jener Axen in einem Punkte P_0, welcher der mittlere Ort des Punktes P genannt werden kann, wenn er auch vielleicht niemals wirklich von diesem Punkte eingenommen wird. Gemäss den vorhin erklärten Vorstellungen von den Arten innerer Bewegung, welche den verschiedenen Aggregatformen eigenthümlich sind, fallen die mittleren Oerter der Atome eines festen Körpers mit ihren Gleichgewichtslagen zusammen; bei flüssigen und luftförmigen Körpern können die mittleren Oerter aller Atome eines Moleküls mit dem mittleren Orte S_0 seines Massenmittelpunktes S, bei luftförmigen Körpern können zugleich alle diese mittleren Oerter S_0 (im Massenmittelpunkte des ganzen Körpers) zusammenfallen. Nähere Festsetzungen hierüber sind für die folgenden Untersuchungen nicht nöthig; von wesentlicher Bedeutung für dieselben ist nur der Begriff der mittleren inneren lebendigen Kraft eines materiellen Punktes, welche erhalten wird durch Multiplication

---

Dadurch ist es erklärlich, dass die Mischung von Gasen und Dämpfen trotz der freien Beweglichkeit und (wie sich später zeigen wird) grossen Geschwindigkeit ihrer Moleküle doch eine beträchtliche Zeit erfordern kann, falls sie nur durch die innere Bewegung, durch die sogenannte Diffusion bewirkt wird ohne durch äussere, strömende Bewegungen unterstützt zu werden.

* R. Clausius: Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. Poggendorff's Annalen, Bd. 141, S. 124.

seiner Masse mit der halben Summe der mittleren Geschwindigkeitsquadrate seiner vorgenannten Projectionen A, B, C, falls die Projectionsaxen OX, OY, OZ rechte Winkel mit einander bilden.

Unter der inneren lebendigen Kraft eines Körpers für einen gewissen Wärmezustand wird die Summe der mittleren inneren lebendigen Kräfte seiner Atome für diesen Zustand verstanden. Freilich beruht diese Definition auf einer Voraussetzung (Unveränderlichkeit des Wärmezustandes während einer gewissen, im Allgemeinen nicht als unmessbar klein vorauszusetzenden Zeit t, worauf die betreffenden Mittelwerthe sich beziehen), welche sich nicht erfüllt findet, wenn der Zustand des Körpers in stetiger Aenderung begriffen ist, während doch auch für diesen Fall der Begriff derjenigen inneren lebendigen Kraft gebraucht wird, welche dem augenblicklichen Zustande entspricht. In dieser Hinsicht kann man aber bemerken, dass die Atome eines Körpers jedenfalls in Gruppen zusammengefasst werden können von je unzählig vielen Atomen gleicher Art, welche sich in gleichartigen inneren Bewegungen, in demselben Augenblicke aber in verschiedenen Bewegungsphasen befinden, so dass man annehmen darf, es seien in jeder Gruppe bis auf unmessbar kleine Differenzen gleichzeitig alle möglichen Geschwindigkeitsquadrate vertreten, welche den Atomen dieser Gruppe für den betreffenden Wärmezustand überhaupt zukommen können, und zwar zwischen verschiedenen Grenzen in einem solchen Zahlenverhältnisse, welches gleich ist dem Verhältnisse der Zeiten, während welcher das Geschwindigkeitsquadrat eines einzelnen Atoms bei constantem Wärmezustande zwischen denselben Grenzen durchschnittlich enthalten sein würde. Dann kann auch die Summe der augenblicklichen inneren lebendigen Kräfte aller Atome von der Summe ihrer Mittelwerthe bei constant bleibendem Wärmezustande nur unmessbar wenig verschieden sein; die innere lebendige Kraft eines Körpers ist also auch der Summe der augenblicklichen inneren lebendigen Kräfte seiner Atome gleich zu setzen.

Eine der vorigen analoge Betrachtungsweise lässt den Zusammenhang erkennen, welcher, falls ein Körper zugleich in äusserer Bewegung begriffen ist, zwischen seiner äusseren, inneren und gesammten lebendigen Kraft stattfindet. Unter dieser letzteren wird die auf alle Atome ausgedehnte Summe

$$\Sigma \frac{mw^2}{2}$$

verstanden, in welcher m die Masse eines Atoms, w die Resultante der augenblicklichen inneren Geschwindigkeit v desselben und der äusseren

Geschwindigkeit u des Körpers an der Stelle dieses Atoms bedeutet, so dass, wenn u und v den Winkel φ bilden,

$$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos\varphi \qquad (1)$$

ist. Sofern nun zwei gleichartige Grössen, wenn sie auch einzeln unmessbar klein sind, doch ein beliebiges Grössenverhältniss haben können, lässt sich ein unmessbar kleiner Körpertheil, für dessen sämmtliche Punkte folglich mit unmessbar kleinem Fehler die augenblicklichen äusseren Geschwindigkeiten u als gleich bezüglich auf Grösse und Richtung zu betrachten sind, so gross denken, dass er unzählig viele Atome von gleicher Art und gleichartiger innerer Bewegung enthält, deren augenblickliche innere Geschwindigkeitscomponenten $= v \cos\varphi$ im Sinne von u jedoch der Art verschiedene positive oder negative Werthe haben, dass mit unmessbar kleinem Fehler die algebraische Summe derselben = Null gesetzt werden kann. Wenn man somit die Gleichung (1) mit $\frac{m}{2}$ multiplicirt und für alle in Rede stehenden Atome summirt, ergiebt sich

$$\Sigma\frac{mw^2}{2} = \Sigma\frac{mu^2}{2} + \Sigma\frac{mv^2}{2} + mu\,\Sigma v\cos\varphi = \Sigma\frac{mu^2}{2} + \Sigma\frac{mv^2}{2}.$$

Mit Rücksicht auf die gegenseitige Unabhängigkeit der äusseren und der inneren Bewegung lässt sich annehmen, dass, wenn die vorstehende Gleichung auf die verschiedenen Gruppen gleichartiger Atome und auf den ganzen Körper ausgedehnt wird, die einzelnen unmessbar kleinen Fehler sich nicht zu einer messbaren Summe anhäufen, sondern bis auf eine abermals unmessbar kleine Grösse sich gegenseitig vernichten werden. Wird dann noch der früheren Bemerkung gemäss

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = \Sigma\frac{m\overline{v^2}}{2} \qquad (2)$$

gesetzt, unter $\overline{v^2}$ den Mittelwerth von v^2 verstanden, welcher dem betreffenden Atom bei seiner inneren Bewegung für den augenblicklichen Wärmezustand zukommt,* so ist für den ganzen Körper

$$\Sigma\frac{mw^2}{2} = \Sigma\frac{mu^2}{2} + \Sigma\frac{m\overline{v^2}}{2} \qquad (3)$$

d. h. **die ganze lebendige Kraft, welche dem augenblicklichen Zustande eines Körpers entspricht, ist die Summe seiner äusseren und inneren lebendigen Kraft für diesen Zustand.**

* Der Mittelwerth einer auf die innere Bewegung bezüglichen Function soll in der Folge immer durch einen darüber gesetzten Strich bezeichnet werden.

Wenn man annehmen dürfte, dass in einer unmessbar kleinen Zeit, in welcher also die äussere Geschwindigkeit irgend eines Atoms keine messbare Aenderung erfährt, gleichwohl die Projection desselben in jeder Geraden unzählig viele Schwingungen macht, so würde aus Gl. (1) für das einzelne Atom gefolgert werden können:

$$\overline{w^2} = u^2 + \overline{v^2} + 2u . \overline{v \cos \varphi} = u^2 + \overline{v^2}$$

und für den ganzen Körper:

$$\Sigma \frac{m\overline{w^2}}{2} = \Sigma \frac{mu^2}{2} + \Sigma \frac{m\overline{v^2}}{2}$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (3), weil in diesem Falle analog der Gl. (2) auch

$$\Sigma \frac{mw^2}{2} = \Sigma \frac{m\overline{w^2}}{2}$$

wäre; allein die fragliche Annahme ist höchstens bei festen Körpern, nämlich dann zulässig, wenn die inneren Bahnen der materiellen Punkte unmessbar klein sind. —

Bezüglich auf die innere Bewegung eines Körpers ist schliesslich noch ein allgemeiner Begriff festzustellen, welcher für die folgenden Betrachtungen wichtig ist: die mittlere Gruppirung der materiellen Punkte (Atome oder Massenmittelpunkte der Moleküle) eines Körpers für einen gewissen Wärmezustand desselben. Infolge der inneren Bewegung ändert sich die augenblickliche Gruppirung (relative Lage) dieser Punkte beständig, wenn auch der Wärmezustand unverändert bleibt; in irgend einen Theil $= \Delta V$ des vom Körper eingenommenen Raumes treten beständig Atome ein, während andere austreten. Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes A dieses Raumes bezüglich auf ein in demselben fixirtes (also eventuell mit ihm sich bewegendes) Axensystem, so werde jener Raumtheil ΔV z. B. als Parallelepipedum gedacht, dessen Kanten mit den Coordinatenaxen parallel sind, während A ein Eckpunkt desselben ist. Die materiellen Punkte des Körpers können wieder gruppenweise von verschiedener Art sein, so dass jede Gruppe unzählig viele Punkte von einerlei Art enthält; die Zahl der Punkte einer bestimmten solchen Gruppe, welche sich innerhalb des Raumtheils ΔV befinden, ändert sich beständig, aber ihr Mittelwerth für eine gewisse Zeit t nähert sich bei unverändert bleibendem Wärmezustande um so mehr einer gewissen durch diesen Zustand bestimmten Grenze n, je grösser die Zeit t genommen wird. Denkt man sich weiter jenen Raumtheil ΔV kleiner und kleiner werden, bis er im Punkte A verschwindet, so wird sich auch der Quotient $\frac{n}{\Delta V}$ einer gewissen Grenze

$$lim. \frac{n}{\Delta V} = f(x, y, z)$$

nähern, welche als eine Function der Coordinaten des Punktes A zu betrachten ist, deren Form und Coefficienten von dem Wärmezustande und von der Art des Körpers abhängen. Wären diese Functionen für die verschiedenen Gruppen von materiellen Punkten des Körpers gegeben, so würde dadurch ihre mittlere Gruppirung bestimmt sein. Zur rechnungsmässigen Verwerthung dieses Begriffes muss derselbe freilich durch speciellere Bestimmungen demnächst ergänzt und auf messbare Grössen zurückgeführt werden.

Bei festen Körpern ist durch die relative Lage der zu Anfang dieses §. erklärten mittleren Oerter, nämlich in diesem Falle durch die Gleichgewichtslagen der materiellen Punkte zugleich die mittlere Gruppirung derselben bestimmt. Im Allgemeinen dürfen aber beide Begriffe nicht verwechselt werden; bei jenem kommen die materiellen Punkte einzeln oder individuell, bei diesem nur hinsichtlich ihrer Art in Betracht. Durch Vertauschung von zwei gleichartigen materiellen Punkten können die mittleren Oerter derselben sich ändern, während die mittlere Gruppirung der materiellen Punkte unverändert bleibt; umgekehrt kann letztere mit der inneren Bewegung sich ändern, ohne dass die mittleren Oerter der materiellen Punkte andere werden.

§. 47. Bestandtheile des inneren Arbeitsvermögens und der Körperwärme.

Gemäss den Begriffen, welche den früheren, von der Molekularconstitution der Materie abstrahirenden Entwickelungen dieses Abschnittes zu Grunde liegen, ist mit der Aenderung des Wärmezustandes eines Körpers im Allgemeinen zugleich eine Aenderung seines inneren Arbeitsvermögens und eine Deformationsarbeit verbunden; letztere ist die Arbeit, welche die durch die äusseren Kräfte verursachten inneren Flächenkräfte (Spannungen) infolge der Deformationsänderung verrichten. Nach den in den beiden vorigen §§. auseinandergesetzten Anschauungen beruht die Deformation eines Körpers auf einer Aenderung der mittleren Gruppirung seiner materiellen Punkte, während die Spannung für irgend ein Flächenelement im Inneren des Körpers als die Resultante der Molekularkräfte zu betrachten ist, mit welchen die auf der einen Seite dieses Flächenelementes liegenden materiellen Punkte auf die jenseits desselben liegenden wirken; die früher so genannte Deformationsarbeit ist also eine Arbeit der Molekularkräfte

und zwar eine solche, welche mit einer messbaren, an einer Deformationsänderung des Körpers erkennbaren Aenderung der mittleren Gruppirung der materiellen Punkte verbunden ist.

Den in den vorigen §§. niedergelegten Anschauungen gemäss ist nun aber eine Aenderung jener mittleren Gruppirung auch denkbar, ohne dass damit eine Deformationsänderung verbunden zu sein braucht; infolge einer solchen unmessbaren Gruppirungsänderung der materiellen Punkte leisten ihre Molekularkräfte auch eine gewisse Arbeit, und umgekehrt muss eine derselben gleiche Arbeit entgegengesetzten Zeichens, welche eine innere Arbeit genannt werden soll, dazu aufgewendet werden, jene Gruppirungsänderung zu bewirken. Ist die innere Arbeit für eine gewisse Zustandsänderung eines Körpers positiv, so wird um den Betrag dieser Arbeit sein inneres Arbeitsvermögen vergrössert, indem er das Vermögen erhalten hat, bei der umgekehrten Zustandsänderung eine ebenso grosse Arbeit durch die Molekularkräfte verrichten, also gewinnen zu lassen. Die innere Arbeit ist folglich als Bestandtheil der Aenderung des inneren Arbeitsvermögens zu betrachten.

Der Unterschied zwischen einer solchen Gruppirungsänderung, welche ohne, und einer solchen, welche mit einer Deformationsänderung des Körpers verbunden ist, beruht darauf, dass im ersten Falle die Verschiedenheit der Entfernungen nächstbenachbarter materieller Punkte zu- oder abnimmt bei unveränderter mittlerer Grösse derselben, während im zweiten Falle gerade diese mittleren Entfernungen sich ändern und zwar in verschiedenen Punkten sowie in demselben Punkte nach verschiedenen Richtungen in gesetzmässig verschiedenem, durch die Art und Grösse der Deformationsänderung bedingtem Grade.

Ausser mit der besprochenen, theils durch die Deformation des Körpers messbaren, theils unmessbaren Aenderung der mittleren Gruppirung der materiellen Punkte eines Körpers kann eine Aenderung des Wärmezustandes desselben nur noch mit einer Aenderung seiner inneren Bewegung verbunden sein. Mit dem inneren Arbeitsvermögen hängt diese innere Bewegung nur durch ihre entsprechende innere lebendige Kraft zusammen so, dass eine Vermehrung der letzteren eine ebenso grosse Vermehrung des inneren Arbeitsvermögens bedingt. Eine Aenderung des inneren Arbeitsvermögens besteht also aus der inneren Arbeit und der Aenderung der inneren lebendigen Kraft.

Ebenso wie die innere lebendige Kraft von dem hypothetischen, thatsächlich nicht herstellbaren Zustande innerer Ruhe aus zu rechnen ist, kann man sich auch in Betreff der inneren Arbeit einen solchen Zustand mitt-

lerer Gruppirung der materiellen Punkte denken, dass jede mögliche Aenderung desselben mit einer positiven inneren Arbeit verbunden sein würde. Die Arbeit, welche aufzuwenden wäre, um diese hypothetische Gruppirung (abzüglich einer durch äussere Kräfte etwa gleichzeitig bedingten Deformationsarbeit) in diejenige mittlere Gruppirung überzuführen, welche einem gewissen Wärmezustande entspricht, heisse der **Arbeitsinhalt** des Körpers für diesen letzteren Zustand; die innere Arbeit kann dann auch als Aenderung des Arbeitsinhaltes (als Vermehrung oder Verminderung desselben, jenachdem sie positiv oder negativ ist) aufgefasst und bezeichnet werden. Wenn endlich das innere Arbeitsvermögen eines Körpers, welches im Vorhergehenden stets von irgend einem conventionell gewählten anderen Wärmezustande aus gerechnet wurde, in der Folge von dem hypothetischen Zustande aus gerechnet wird, für welchen zugleich innere Ruhe stattfindet und der Arbeitsinhalt = Null ist, so ist allgemein **das innere Arbeitsvermögen die Summe der inneren lebendigen Kraft und des Arbeitsinhaltes**; sein Ausdruck wird dann freilich stets ebenso wie der des Arbeitsinhaltes einen unbekannten constanten Summanden enthalten.

Die Deformationsarbeit soll mit Rücksicht auf die äusseren Kräfte, von welchen sie abhängt, und im Gegensatze zur inneren Arbeit hinfort auch die **äussere Arbeit** genannt werden. Gemäss den früheren, unter gewissen specielleren Voraussetzungen gebrauchten besonderen Bezeichnungen ist also die äussere Arbeit = der Expansionsarbeit, wenn alle Tangentialspannungen im Körper = Null sind, somit nur positive oder negative Pressungen (negative oder positive Normalspannungen) vorkommen; sie ist = der oberflächlichen Expansionsarbeit oder Oberflächenarbeit des Körpers (§. 13), wenn zudem die Pressung in allen seinen Punkten gleich, also = dem specif. äusseren Drucke ist.

Das **gesammte Arbeitsvermögen** eines zugleich in äusserer Bewegung befindlichen Körpers, bestehend aus seiner äusseren lebendigen Kraft und seinem inneren Arbeitsvermögen, ist nun auch die Summe seiner äusseren und inneren lebendigen Kraft und seines Arbeitsinhaltes, oder auch nach §. 16, Gl. (3) die Summe seiner gesammten lebendigen Kraft und seines Arbeitsinhaltes. Die Zustandsänderung eines Körpers ist im Allgemeinen mit einer Aenderung seiner äusseren und inneren lebendigen Kraft sowie mit äusserer und innerer Arbeit verbunden.

Ebenso wie das innere Arbeitsvermögen ist schliesslich auch ihr Wärmewerth, die Körperwärme, als aus zwei entsprechenden Theilen bestehend zu betrachten, welche die **freie Körperwärme** (Wärmewerth der inneren lebendigen Kraft) und die **gebundene Körperwärme** (Wärmewerth

Arbeitsinhaltes) genannt werden mögen. Diese Begriffe dürfen nicht verwechselt werden mit anderen, welche in der Physik vielfach noch jetzt mit denselben Namen, mit Rücksicht auf die mechanische Wärmetheorie weniger zutreffend, bezeichnet werden. Als gebundene Wärme findet man dort oft dem älteren Sprachgebrauche gemäss nur diejenige Wärme bezeichnet, welche zur Schmelzung eines festen oder zur Verdampfung eines flüssigen Körpers verbraucht wird, und welche nicht nur einen Zuwachs an Körperwärme, sondern zugleich den Wärmewerth der vom Körper bei der Aenderung seiner Aggregatform verrichteten äusseren Arbeit in sich begreift. Auch kann es bei unveränderter Aggregatform und bei unverändertem Volumen der Fall sein, dass mit einer Aenderung des inneren Zustandes durch Mittheilung von Wärme nicht nur ein Zuwachs an freier, sondern zugleich an gebundener Körperwärme verbunden ist, während in der Physik diese ganze Wärme lediglich als ein Zuwachs an freier Körperwärme bezeichnet zu werden pflegt.*

* In Betreff der Benennung der in diesem §. und in §. 11 erklärten Begriffe der mechanischen Wärmetheorie hat sich ein allgemein anerkannter wissenschaftlicher Sprachgebrauch überhaupt noch nicht ausgebildet.

Die Grösse, welche ich das innere Arbeitsvermögen genannt habe, bezeichnet Kirchhoff als „Wirkungsfunction", Thomson als „mechanische Energie", Zeuner als „innere Arbeit", während ich diese letztere Bezeichnung in demselben Sinne wie Clausius gebraucht habe. Nach den auch von Briot (Lehrbuch der mechanischen Wärmetheorie, deutsch herausgegeben von Dr. H. Weber) angenommenen, von Rankine vorgeschlagenen Bezeichnungen besteht die „totale Energie" eines Körpers = seinem gesammten Arbeitsvermögen aus der „potentiellen Energie" = dem Arbeitsinhalt und der „wirklichen Energie" = der gesammten lebendigen Kraft, letztere aus der „äusseren und inneren wirklichen Energie", der äusseren und inneren Bewegung entsprechend.

Clausius versteht unter „Energie eines Körpers" den Wärmewerth des inneren Arbeitsvermögens, welche Grösse ich die Körperwärme genannt habe als Verallgemeinerung der von Zeuner für die in §. 27 besprochenen besonderen Fälle zweckmässig gebrauchten Bezeichnungen: Flüssigkeitswärme und Dampfwärme. Clausius versteht unter der Körperwärme oder dem „Wärmeinhalt eines Körpers" nur den Theil der fraglichen Grösse, welchen ich als freie Körperwärme bezeichnet habe.

Die als Wärme gemessene Arbeit, also das Maass einer Arbeit für W (= 424) Kgmtr. als Einheit, oder den Wärmewerth einer Arbeit nennt Clausius ein „Werk"; die von ihm so genannte Energie eines Körpers ist danach die Summe seines Wärme- und Werkinhaltes. Eine Aenderung des letzteren heisst bei ihm auch ein „inneres Werk" im Gegensatz zum „äusseren Werk" = der als Wärme gemessenen äusseren Arbeit.

§. 48. Der Verwandlungsinhalt eines Körpers und seine Bestandtheile.

Für einen gewissen Wärmezustand eines Körpers sei
U das innere Arbeitsvermögen,
H die freie Körperwärme, also WH (= dem Arbeitswerth derselben) die innere lebendige Kraft,
I der Arbeitsinhalt; dem vorigen §. zufolge ist dann

$$U = WH + I$$

und für eine unendlich kleine Zustandsänderung

$$dU = W.dH + dI \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad 1$$

Für eine solche ist andererseits nach der allgemeinen Wärmegleichung (§. 11, Gl. 2)

$$dU = W.dQ + dR + dS - dE,$$

worin dQ die mitgetheilte Wärme bedeutet, dR die Arbeit der äusseren Reibung (der Reibung an der Oberfläche), dS die Arbeit der inneren Bewegugswiderstände, dE die äussere Arbeit. Aus der Verbindung dieser Gleichung mit Gl. (1) folgt

$$W.dQ + dR + dS = W.dH + d(E + I)$$

oder bei Multiplication mit $A = \frac{1}{W}$ und mit Rücksicht darauf, dass dR und dS nur positiv oder = Null sein können,

$$dQ \leqq dH + A.d(E + I) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad 2$$

wobei das Zeichen = oder < gilt, jenachdem dR und dS = Null sind oder nicht.

Die äussere und die innere Arbeit dE und dI bewirken beide eine Veränderung der mittleren Gruppirung der materiellen Punkte, nur mit dem Unterschiede, dass der dabei zu bewältigende Widerstand im ersten Falle von äusseren Kräften abhängt, im zweiten nicht, dass ferner die fragliche Gruppirungsänderung im ersten Falle sich durch eine messbare Formationsänderung zu erkennen giebt, im zweiten Falle nicht. Dabei wird man sich mit positiven Werthen der Arbeiten dE und dI, also auch mit einem positiven Werthe der Gesammtarbeit $d(E + I)$ eine Auflockerung der Körpermaterie, eine zunehmende Zertheilung des Aggregats materieller Punkte, als welches der Körper betrachtet wird, verbunden denken, [illegible]

nur dieser Begriff des Zertheilungsgrades entsprechend definirt wird, wie es von Clausius geschah, indem er diesen Begriff als den einer mathematisch ausdrückbaren Grösse unter dem Namen der Disgregation eines Körpers in die mechanische Wärmetheorie einführte.*

Um diese Grösse mathematisch zu definiren, mag von einem besonderen Fall, nämlich vom Gaszustande ausgegangen werden. Wenn man im Anschlusse an das über das Wesen dieses Grenzzustandes bereits früher Gesagte annimmt, dass in demselben die Massenmittelpunkte der Moleküle bei mittlerer Gruppirung ganz gleichförmig vertheilt, und dass auch die Moleküle aus den betreffenden Atomen mit so grossen Entfernungen der mittleren relativen Oerter dieser Atome in den einzelnen Molekülen und dabei so einfach (aus so wenig Atomen) gebildet sind wie es ohne chemischen Zerfall derselben möglich ist, so kann die mittlere Gruppirung der materiellen Punkte eines Gases nur zugleich mit dem Volumen sich ändern, so dass mit irgend einer Zustandsänderung nur eine äussere, keine innere Arbeit verbunden sein kann. Es ist dann der Gaszustand als der Grenzzustand zu bezeichnen, für welchen der Arbeitsinhalt einen constanten Maximalwerth erreicht hat und der Zertheilungsgrad, bei gegebenem Volumen so gross wie möglich, nur noch mit dem Volumen sich ändern kann, natürlich so, dass er mit zu- oder abnehmendem Volumen selbst zu- oder abnimmt, indem die mittleren Entfernungen der an und für sich unverändert bleibenden nächstbenachbarten Moleküle zu- oder abnehmen. Ist nun p die Pressung, v das specif. Volumen und T die absolute Temperatur eines Gases von gleichförmigem Wärmezustande, so ist pro 1 Kgr. desselben mit $dI = 0$

$$A.d(E+I) = A.dE = Apdv$$

oder mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung $RT = pv$ (§. 17)

$$A.d(E+I) = ART\frac{dv}{v} = T.d(AR.lnv) \quad \ldots\ldots\ldots (3),$$

und da dem Obigen zufolge für ein Gas der Ausdruck $AR.lnv$ als das Maass des Zertheilungsgrades definirt werden kann, so mag nun allgemein der Zertheilungsgrad oder die Disgregation Z eines beliebigen Körpers von gleichförmiger Temperatur mit Clausius definirt werden durch die Gleichung:

$$A.d(E+I) = T.dZ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

wonach für irgend eine unendlich kleine Zustandsänderung die Summe

* Ueber die Anwendung des Satzes von der Aequivalenz der Verwandlungen auf die innere Arbeit. Poggendorff's Annalen, Bd. 116, S. 73.

der äusseren und inneren Arbeit proportional ist der entsprechenden Disgregationsänderung und der absoluten Temperatur, bei welcher dieselbe stattfindet. Aus dieser Gleichung folgt für die Disgregation selbst der Ausdruck:

$$Z = Z_0 + \int \frac{A.d(E+I)}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5.$$

unter Z_0 den Werth der Disgregation in demjenigen Zustande verstanden welchem die untere Grenze des Integrals entspricht; insbesondere für ein Gas ist pro 1 Kgr. nach Gl. (3)

$$Z = Z_0 + AR.ln\frac{v}{v_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5.a$$

Bei einem Gase ist durch Z auch v und somit die mittlere Gruppirung der materiellen Punkte bestimmt. Im Allgemeinen kann man aber nur sagen, dass durch diese mittlere Gruppirung die Disgregation Z bestimmt sei, nicht umgekehrt; denn indem Z als abhängig zu betrachten ist von dem Verschiedenheitsgrade der Entfernungen nächstbenachbarter materieller Punkte und von den mittleren Grössen dieser Entfernungen, ist es denkbar, dass in beiden Beziehungen zugleich solche Aenderungen stattfinden, welche, indem sie einzeln entgegengesetzte Aenderungen von Z bewirken würden, zusammen diese Grösse unverändert lassen.*

* In einem späteren Aufsatze (über die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien, Sitzungsberichte der niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1870, S. 167 und Pogg. Ann. Bd. 142, S. 433) hat Clausius für die Disgregation eines Körpers von gleichförmiger Temperatur unter gewissen Voraussetzungen den folgenden allgemeinen Ausdruck entwickelt:

$$Z = A\Sigma mc.ln(Ti^2) + Const.$$

Darin haben A und T die obigen Bedeutungen; i bedeutet die mittlere Schwingungsdauer bei der stationären Bewegung eines materiellen Punktes (Atomes) von der Masse m, vorausgesetzt, dass dieselbe, auch wenn die inneren Bewegungen nicht in geschlossenen Bahnen stattfinden, für die Projectionen des Punktes auf drei Coordinatenaxen gleich zu setzen ist. Es ist also T eine für alle Punkte gleiche, i eine für die verschiedenartigen materiellen Punkte im Allgemeinen verschiedene veränderliche Grösse. Die Bedeutung von c ist dadurch bestimmt, dass bei der Entwickelung jenes Ausdrucks von Z die mittlere innere lebendige Kraft eines materiellen Punktes

$$\frac{1}{2} mu^2 = mcT$$

gesetzt und c als eine für die verschiedenartigen materiellen Punkte verschiedene

Aus der Verbindung von Gl. (4) mit Gl. (2) folgt

$$dQ \leqq dH + T \,.\, dZ \text{ oder } \frac{dQ}{T} \leqq \frac{dH}{T} + dZ$$

und für eine Zustandsänderung von endlicher Grösse

$$\int \frac{dQ}{T} \leqq \int \frac{dH}{T} + Z - Z_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Insbesondere für einen Kreisprocess ist $Z = Z_0$ und, wenn derselbe umkehrbar ist (u. A. also für jedes Element desselben dR und dS = Null sind), nach §. 14 auch $\int \frac{dQ}{T} = 0$. Aus der Beziehung (6), in welcher für diesen Fall das Zeichen = gilt, folgt also für einen umkehrbaren Kreisprocess auch

$$\int \frac{dH}{T} = 0,$$

so dass $\frac{dH}{T}$ das vollständige Differential einer Function von Veränderlichen sein muss, welche den Wärmezustand bestimmen. Angenommen, der letztere sei bestimmt durch T und eine andere, von T unabhängige Grösse X, so ist auch die durch den Wärmezustand bestimmte freie Körperwärme H im Allgemeinen als eine Function von T und X zu betrachten, also

$$dH = M \,.\, dT + N \,.\, dX; \quad \frac{dH}{T} = \frac{M}{T} dT + \frac{N}{T} dX \ldots\ldots (7),$$

unter $M = \frac{\partial H}{\partial T}$ und $N = \frac{\partial H}{\partial X}$ Functionen von T und X verstanden, welche der Bedingung genügen:

$$\frac{\partial M}{\partial X} = \frac{\partial N}{\partial T} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Wenn aber $\frac{dH}{T}$ ein vollständiges Differential sein soll, so muss ebenso nach Gl. (7) auch

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{M}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{N}{T}\right)$$

---

dene Constante betrachtet wurde, was also voraussetzt, dass diese mittleren lebendigen Kräfte aller Punkte ein constantes Verhältniss zu einander haben.

Bei der noch zweifelhaft erscheinenden Fruchtbarkeit jenes Ausdruckes von Z mag seine Anführung hier genügen.

oder (mit Rücksicht auf die gegenseitige Unabhängigkeit von T und X)

$$\frac{1}{T}\frac{\partial M}{\partial X}=\frac{1}{T}\frac{\partial N}{\partial T}-\frac{N}{T^2},$$

also wegen Gl. (8)

$$N=\frac{\partial H}{\partial X}=0,$$

d. h. H eine Function von T allein sein. Es hat sich somit die bemerkenswerthe Folgerung ergeben, dass die freie Wärme eines Körpers durch seine Temperatur, also auch letztere durch die freie Körperwärme oder durch die innere lebendige Kraft vollkommen bestimmt ist.*

Setzt man $\frac{dH}{T}=dY$, so ist, unter Y_0 den der unteren Grenze des Integrals entsprechenden Werth von Y verstanden,

$$Y=Y_0+\int\frac{dH}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

eine Function von T, welche im Anschluss an die Begriffsbestimmungen von §. 14 der Verwandlungswerth der freien Körperwärme genannt werden mag. Bei Einführung dieser Grösse Y ist die Beziehung (6) zu schreiben:

$$\int\frac{dQ}{T}<Y+Z-(Y_0+Z_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

wobei Y_0 und Z_0 die Werthe von Y und Z für denselben, nämlich für denjenigen Anfangszustand bedeuten, welchem die untere Grenze des Integrals auf der linken Seite entspricht. Uebrigens ist der Ausdruck (5) für $Z-Z_0$ von derselben Art wie der Ausdruck (9) für $Y-Y_0$, indem $A.d(E+I)$ ebenso wie dH eine unendlich kleine Wärmemenge bedeutet, so dass im Sinne von §. 14 auch die Disgregation Z als ein gewisser Verwandlungswerth, nämlich als Verwandlungswerth der mittleren

* Es könnte dieser Satz auch als Annahme hingestellt werden, und würde sich dann der zu seiner Ableitung hier benutzte Satz als Folgerung ergeben: nämlich der Satz, dass bei jedem umkehrbaren Kreisprocesse eines Körpers $\int\frac{dQ}{T}=0$, der Verwandlungswerth der dem Körper (algebraisch verstanden) mitgetheilten Wärme = Null ist, dessen Herleitung in §. 14 auf der vorausgesetzten Unmöglichkeit eines ohne Compensation, d. h. ohne sonstige Veränderung stattfindenden Wärmeüberganges von niederer zu höherer Temperatur beruht.

Gruppirung der materiellen Punkte eines Körpers bezeichnet werden kann.

Die Summe dieser beiden Grössen Y und Z nennt Clausius den Verwandlungsinhalt oder die Entropie (ἡ τροπή, die Verwandlung) des Körpers.* Sie ist bestimmt durch die Temperatur und durch die Disgregation, also auch durch die Temperatur und durch die mittlere Gruppirung der materiellen Punkte, um so mehr durch den Wärmezustand des Körpers; umgekehrt kann aber bei gegebener Temperatur und verschiedenen mittleren Gruppirungen, um so mehr bei verschiedenen Wärmezuständen die Entropie denselben Werth haben.** Wird dieselbe mit S bezeichnet, so hat man nach (10)

$$\int \frac{dQ}{T} \leqq S - S_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Bisher wurde vorausgesetzt, die Temperatur sei in demselben Augenblicke in allen Punkten des Körpers gleich. Ist dies nicht der Fall, so muss der letztere in Elemente zerlegt werden der Art, dass die bisherige Voraussetzung für jedes einzelne Element zutrifft, und sind dann unter der Disgregation, dem Verwandlungswerth der freien Wärme und der Entropie des Körpers für einen gewissen Zustand desselben die Summen der betreffenden Grössen für alle jene, im Allgemeinen als unendlich klein vorauszusetzenden Elemente zusammengenommen zu verstehen. Das Integral auf der linken Seite der Beziehung (11) ist dann ebenso durch die Summe der entsprechenden Integrale für die einzelnen Körperelemente zu ersetzen, also durch ein zweifaches Integral, bei welchem die eine Integration sich wie

---

* Ueber verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. Poggendorff's Annalen, Bd. 125, S. 353.

** Entsprechend der in der obigen Anmerkung (S. 248) erwähnten Substitution

$$\frac{1}{2} m\overline{u^2} = mc\,T,$$

welche zu dem dort angeführten Clausius'schen Ausdrucke der Disgregation

$$Z = A\Sigma mc . ln(Ti^2) + Const.$$

geführt hat, ist die freie Körperwärme

$$H = A\Sigma \frac{m\overline{u^2}}{2} = A\Sigma mc\,T,$$

also

$$Y = \int \frac{dH}{T} + Const. = A\Sigma mc . ln\,T + Const.$$

und die Entropie

$$S = Y + Z = A\Sigma 2mc . ln(Ti) + Const.$$

bisher auf die Zeit, die andere aber auf den Ort (auf den Uebergang von einem zum anderen Körperelement) bezieht. Indem aber dieses zweifache Integral in zwei Theile zerlegt werden kann, entsprechend dem Wärmeaustausch an der Oberfläche des Körpers und demjenigen, welcher zwischen den Körperelementen gegenseitig stattfindet, hat man in (11) zu setzen:

$$\int \frac{dQ}{T} = \iint \frac{d^2Q}{T} + \iint \frac{d^2Q'}{T},$$

worin für eine unendlich kleine Zustandsänderung des Körpers d^2Q die Wärme bedeutet, welche ihm durch ein Element seiner Oberfläche, wo selbst seine augenblickliche Temperatur $= T$ ist, von aussen mitgetheilt wird. d^2Q' dagegen die Wärme, welche ein unendlich kleines Körperelement, dessen augenblickliche Temperatur $= T$ ist, von den angrenzenden Körperelementen empfängt, deren augenblickliche Temperaturen unendlich wenig von T verschieden sind. Das Doppelintegral $\iint \frac{d^2Q'}{T}$ ist dann jedenfalls positiv, weil seine Elementarbestandtheile sich paarweise so gruppiren lassen, dass jedes solche Paar einen positiven Werth hat; ist nämlich d^2q die positive Wärme, welche ein Körperelement, dessen Temperatur $= T$ ist, von einem angrenzenden empfängt, dessen Temperatur $= T + dT$ nothwendig $> T$ ist, so ist $-d^2q$ die negative Wärme, welche dieses zweite wärmere Körperelement von dem ersten empfängt, und

$$\iint \frac{d^2Q'}{T} = \iint d^2q\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T + dT}\right) > 0.$$

Somit ist in der Beziehung (11)

$$\int \frac{dQ}{T} > \iint \frac{d^2Q}{T}$$

und um so mehr für alle Fälle

$$\iint \frac{d^2Q}{T} < S - S_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

d. h. bei jeder Zustandsänderung eines Körpers ist der Verwandlungswerth der ihm von aussen mitgetheilten Wärme höchstens $=$ der Aenderung seiner Entropie. Bei einem Kreisprocess ist $S = S_0$, also jener Verwandlungswerth (in §. 14 mit N bezeichnet) $\leqq 0$, nämlich $= 0$ oder < 0, jenachdem der Kreisprocess umkehrbar ist oder nicht, wie schon in §. 14 nachgewiesen wurde.

Denkt man sich die Beziehungen (12) demselben Zeitintervall entsprechend für alle Körper des Weltalls zusammen addirt, so ergiebt sich

$$\Sigma S - \Sigma S_0 \gtrapprox \Sigma \iint \frac{d^2 Q}{T} \gtrapprox 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (13),$$

weil die den einzelnen Weltkörpern mitgetheilten Wärmemengen nur von anderen Weltkörpern herrühren können, deren Oberflächentemperaturen mindestens ebenso hoch sind, und somit

$$\Sigma \iint \frac{d^2 Q}{T} \geqq 0 \text{ ist, ebenso wie oben } \iint \frac{d^2 Q'}{T} \geqq 0$$

war bezüglich auf die Elemente eines einzelnen Körpers, denen hier die sämmtlichen Körper des Weltalls entsprechen. Daraus würde sich ergeben (abgesehen von einer Specialuntersuchung, welche hierbei die Rolle der strahlenden Wärme erfordern mag), dass die Entropie der Welt nie abnehmen kann, oder (nach dem Ausdrucke von Clausius) dass die Entropie der Welt einem Maximum zustrebt. Dieses Maximum wäre erreicht, wenn kein unmittelbarer Uebergang der Wärme (durch Leitung oder Strahlung) von höherer zu niederer Temperatur und weder Reibung noch ein sonstiger mit Verwandlung von Arbeit in Wärme verbundener Bewegungswiderstand, also vielleicht überhaupt keine äussere Bewegung mehr stattfände, sofern auch die Bewegung der Weltkörper im Aether nicht ganz ohne Widerstand geschehen mag; das zeitliche Ende der Welt wäre ein Zustand allgemeiner äusserer Ruhe, wenigstens nur widerstandsloser äusserer Bewegung, und gleichförmiger Temperatur.*

* Auf diese Folgerung wurde zuerst von W. Thomson hingewiesen (Phil. Mag. 4th. Ser. Vol. IV, p. 304). Rankine nahm davon Veranlassung (ebendaselbst p. 358), die Vermuthung auszusprechen, dass die Welt in sich selbst die Gegenmittel zur beständigen Erhaltung ihres Lebens besitzen werde, welches in ihrem Grenzzustande erloschen wäre; er denkt sich den Weltäther begrenzt, jenseits dieser Begrenzung einen leeren Raum, und nimmt es als möglich an, dass die von den Weltkörpern ausgestrahlte Wärme nach ihrer Reflexion von jener Aethergrenze an gewissen Stellen des Weltraums so concentrirt werden könne, dass die an diese Stellen gelangenden Körper zu einer höheren Temperatur erhitzt werden, als mit welcher sie die Wärme ausgestrahlt hatten, so dass also mit Hülfe der Strahlung gegen die Aethergrenze eine gewisse Menge freier Körperwärme von mittlerer Temperatur in einen Theil von höherer und einen Theil von niederer Temperatur zerfallen könnte. Diese Annahme würde der Voraussetzung, dass ein unmittelbarer (ohne Vermittelung von Zustandsänderungen eines dritten Körpers stattfindender) Uebergang der Wärme stets nur von höherer zu niederer Temperatur erfolgen kann, widersprechen, und es

Im Anschluss an den so eben ausgesprochenen, das Weltganze betreffenden Satz, welcher, obschon der Tendenz dieses Buches fern liegend, doch zu unmittelbar an dieser Stelle sich darbot, als dass er bei seinem Charakter allgemeinsten Interesses nicht hätte ausgesprochen werden sollen, mag zur Ergänzung hier noch das andere Grundgesetz des Weltalls erwähnt werden, welches Clausius in dem Satze ausspricht: „Die Energie der Welt ist constant", und zu welchem, abgesehen von der Ausdrucksweise, die allgemeine Gleichung des Arbeitsvermögens — §. 11, Gl. (1) —

$$d(L + U) = dM + dP + W \cdot dQ$$

führt, indem sie auf die Gesammtheit aller Weltkörper ausgedehnt wird. In dieser Gleichung ist L die äussere lebendige Kraft, U das innere Arbeitsvermögen eines Körpers, und für eine unendlich kleine Zustandsänderung desselben dM die Arbeit der äusseren Massenkräfte (zu welchen im Gegensatze zu den Molekularkräften auch die Gravitationskräfte der Körperelemente, insoweit sie auf messbare Entfernung wirken, gerechnet wurden), dP die Arbeit des äusseren Druckes auf die Oberfläche, $W \cdot dQ$ der Arbeitswerth der dem Körper von aussen mitgetheilten Wärme. Bei der Addition der entsprechenden, für alle Weltkörper bezüglich auf dasselbe Zeitelement aufgestellten Gleichungen hat man

$$\Sigma d(L - M + U) = d\Sigma(L - M + U) = 0$$

oder

$$\Sigma(L - M + U) = Const. \qquad (14)$$

Die Bewegung des Weltalls kann nur auf ein Coordinatensystem bezogen werden, welches in ihm selbst auf irgend eine Weise fixirt ist und absolut ruhend gedacht wird; ΣL ist seine entsprechende äussere lebendige Kraft. Analog dem in §. 47 erklärten Arbeitsinhalt eines Körpers kann $\Sigma(-M)$ der äussere Arbeitsinhalt des Weltalls genannt werden, indem darunter die Arbeit verstanden wird, welche aufgewendet werden müsste, um die Weltkörper und ihre messbaren Theile mit Rücksicht auf die zwischen ihnen wirkenden gegenseitigen äusseren Massenkräfte (Gravitationskräfte) aus einem gewissen hypothetischen Zustande dichtester Massengruppirung in ihre augenblickliche relative Lage zu versetzen. Die auf das Weltall bezogene Summe $\Sigma(L - M)$ ist also eine Grösse analog derjenigen,

———

würde dadurch auch die sogenannte zweite Hauptgleichung (§. 15) nebst allen daraus gezogenen Folgerungen in Frage gestellt. Clausius discutirte und bestritt jene Annahme in der Abhandlung über die Wärmestrahlung, deren Gedankengang und Resultate früher in §. 10 der Hauptsache nach wiedergegeben wurden.

welche für einen einzigen Körper sein inneres Arbeitsvermögen genannt wurde, sofern nämlich das Weltall mit einem einzelnen Körper in der Weise verglichen wird, dass die mit messbaren Ortsänderungen verbundenen Bewegungen im Weltall an die Stelle der inneren Molekularbewegungen des Körpers, und die auf messbare Entfernungen wirkenden gegenseitigen Gravitationskräfte aller Massenelemente des Weltalls an die Stelle der auf unmessbar kleine Entfernungen wirkenden Molekularkräfte des einzelnen Körpers gesetzt werden. Diese Summe, welche somit das äussere Arbeitsvermögen der Welt genannt werden könnte, vermehrt um $\Sigma U =$ der Summe der inneren Arbeitsvermögen aller einzelnen Weltkörper für sich betrachtet, ist das gesammte Arbeitsvermögen der Welt, und es kann Gl. (14) so ausgesprochen werden: das gesammte Arbeitsvermögen der Welt ist constant.*

§. 49. Wahre specifische Wärme.

Unter der specifischen Wärme eines Körpers von gleichförmigem Wärmezustande für ein gewisses Gesetz einer umkehrbaren Aenderung dieses Zustandes wird das Verhältniss $\frac{dQ}{dT}$ verstanden, wenn dQ die Wärmemenge bedeutet, welche dabei einem Kgr. des Körpers behufs der unendlich kleinen Temperaturänderung dT mitzutheilen ist; dem vorigen §. zufolge ist sie allgemein

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{dH}{dT} + T\frac{dZ}{dT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Sie heisse nach Rankine die wahre specifische Wärme und sei mit c bezeichnet, wenn die Zustandsänderung ohne Disgregationsänderung stattfindet, d. h. $dZ = 0$ ist und folglich die mitgetheilte Wärme nur zur Vermehrung der freien Körperwärme dient; es ist also

---

* Wenn Clausius den fraglichen Satz in der Weise ausspricht, dass er die Energie der Welt als constant bezeichnet, so ist zu bemerken, dass er sowohl diesen, als den anderen Satz in Betreff des Aenderungssinnes der Entropie der Welt nur gelegentlich am Schlusse seiner oben citirten Abhandlung „über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie“ ohne Mittheilung ihrer näheren Begründung ausspricht. Es ist aber wohl nicht zu bezweifeln, dass er im Anschlusse an die sonst von ihm gebrauchte Terminologie hier unter der Energie der Welt den Wärmewerth derselben Grösse versteht, welche ich oben als das gesammte Arbeitsvermögen der Welt bezeichnet habe.

$$c = \frac{dH}{dT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.$$

Da H dem vorigen §. zufolge für einen gegebenen Stoff nur von seiner Temperatur abhängt, unabhängig von der mittleren Gruppirung seiner materiellen Punkte und folglich auch von der Aggregatform, so gilt dasselbe von der wahren specif. Wärme. Nun ist aber nach Gl. (5,a) im vorigen §. für den Gaszustand $dZ = 0$, wenn $dv = 0$ ist, also $c = c_v =$ der specif. Wärme bei constantem Volumen, und da letztere für Gase als constant zu betrachten ist (§. 19), so gilt dasselbe von c für jede Aggregatform. Die **wahre specifische Wärme c ist also eine von der Art des betreffenden Stoffes abhängige Constante.** Sie ist der Grenzwerth, welchem sich die specif. Wärme c_v des betreffenden Dampfes mit zunehmendem Grade der Ueberhitzung nähert. Ausser diesem Grenzzustande ist im Allgemeinen c_v von c verschieden, nämlich nach Gl. (1), worin für $dv = 0$, also $dE = 0$ (vorausgesetzt dass auch im Falle eines festen Körpers keine Tangentialspannungen vorkommen), nach Gl. (4) des vorigen §. zu setzen ist: $T.dZ = A.dI$,

$$c_v = c + \frac{A.dI}{dT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3.$$

Wenn also die Erfahrung lehrt, dass die specif. Wärme c_v abgesehen von ihrer meist geringen Veränderlichkeit für eine bestimmte Aggregatform für die verschiedenen Aggregatformen oft erheblich verschieden ist, z. B. für Wasser ungefähr doppelt so gross, als für Eis, und mehr wie doppelt so gross, als für Wasserdampf, so ist daraus zu schliessen, dass gleiche Temperaturänderungen desselben Stoffes bei verschiedenen Aggregatformen mit sehr verschiedenen inneren Arbeiten verbunden sein können.

Aus der Gleichung

$$dH = c.dT \text{ mit } c = Const.$$

ergiebt sich die **freie Wärme pro 1 Kgr. eines Körpers von gleichförmiger Temperatur** T

$$H = cT + Const. = cT \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4.$$

wenn ausserdem angenommen wird, dass dem absoluten Nullpunkte $T = 0$ die freie Wärme $=$ Null, also innere Ruhe entspricht;* und beim Ueber-

---

* Nach einer Anmerkung zum vorigen §, in welcher die **Clausius**'schen Ausdrücke für den Verwandlungswerth Y der freien Wärme H, die Disgregation Z und die Entropie S eines Körpers von gleichförmiger Temperatur T angeführt wurden, war

gange von der Temperatur T_0 zur Temperatur T ändert sich der Verwandlungswerth der freien Körperwärme nach §. 48, Gl. (9) um

$$Y - Y_0 = c\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T} = c.ln\frac{T}{T_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Findet dieser Uebergang ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme ($dQ = 0$) in umkehrbarer Weise statt, also auch ohne Aenderung der Entropie, so ist damit nach §. 48, Gl. (10) die Disgregationsänderung

$$Z - Z_0 = Y_0 - Y = c.ln\frac{T_0}{T}$$

verbunden; insbesondere zur Abkühlung des Körpers bis zum absoluten Nullpunkte wäre eine unendlich grosse positive Disgregationsänderung und ein unendlich grosser negativer Verwandlungswerth der freien Körperwärme nöthig, woraus zu schliessen, dass dieser absolute Nullpunkt thatsächlich unerreichbar ist.

§. 50. Allgemeine Form der Zustandsgleichung eines Körpers von gleichförmigem Wärmezustande.

Nachdem sich ergeben hat, dass gemäss Gl. (4) in vorigem §. die freie Wärme, also auch die innere lebendige Kraft eines Körpers seiner abso-

---

$$H = A\Sigma mcT = T\Sigma Amc = T\Sigma mg\frac{Ac}{g},$$

unter c eine den verschiedenartigen Atomen oder materiellen Punkten von den Massen m eigenthümliche Constante verstanden. Die Bedeutung dieser Constanten würde also mit Rücksicht auf obige Gl. (4) darin bestehen, dass $\frac{Ac}{g}$ die wahre specif. Wärme eines nur aus materiellen Punkten der betreffenden Art bestehenden Körpers ist. Wird dieselbe mit c' und das Gewicht mg eines materiellen Punktes mit m' bezeichnet, so gehen die früher angeführten Ausdrücke von Y und Z über in:

$$Y = \Sigma m'c'lnT + Const.,\quad Z = \Sigma m'c'ln(Ti^2) + Const.$$

oder mit Rücksicht darauf, dass T für alle Punkte denselben Werth hat, für einen Körper von 1 Kgr. Gewicht, dessen wahre specif. Wärme

$$c = \Sigma m'c'$$

ist:

$$Y = c\,lnT + Const.,\quad Z = c.lnT + 2\Sigma m'c'lni + Const.$$

$$S = Y + Z = 2c.lnT + 2\Sigma m'c'lni + Const.$$

luten Temperatur T proportional ist, fragt es sich, wie damit die für verschiedene Fälle empirisch bekannte Beziehung zwischen T, dem specif. Volumen v und der Pressung p zusammenhängt, nach welcher im Allgemeinen, wenn T wächst, auch v bei constantem p oder p bei constantem v zunimmt, während bei constanter Temperatur sich p und v in entgegengesetztem Sinne gleichzeitig ändern. Zur Erörterung dieser Frage mag ein von Clausius vor Kurzem (1870) aufgestellter mechanischer Satz* vorausgeschickt werden.

Ein materieller Punkt von der Masse m befinde sich bezüglich auf ein rechtwinkeliges System von Coordinatenaxen in einer stationären d. h. solchen Bewegung (§. 46), dass seine Coordinaten x, y, z und Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ zwischen gewissen endlichen Grenzen variiren, indem erstere abwechselungsweise zu- und abnehmen, letztere also bald positiv, bald negativ sind. Ist dann $u=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ die resultirende Geschwindigkeit des materiellen Punktes, und sind X, Y, Z die nach den Coordinatenaxen genommenen Componenten der auf ihn wirkenden Kraft (der relativen bewegenden Kraft, sofern die Coordinatenaxen im Allgemeinen selbst in Bewegung sein können), so ist, wenn durch einen übergesetzten Strich wie in §. 46 der Mittelwerth der betreffenden Grösse für ein Zeitintervall bezeichnet wird, welches im Vergleich mit dem Zeitintervall zwischen zwei auf einander folgenden Maximal- oder Minimalwerthen von x, y, z sehr gross ist,

$$\frac{1}{2}m\overline{u^2}=-\frac{1}{2}\overline{(Xx+Yy+Zz)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1.$$

Für ein System von materiellen Punkten, welche einzeln in stationärer Bewegung bezüglich auf die zu Grunde liegenden Coordinatenaxen begriffen sind, hat man dann

$$\Sigma\frac{m\overline{u^2}}{2}=-\frac{1}{2}\Sigma\overline{(Xx+Yy+Zz)} \quad \ldots\ldots\ldots 2.$$

Den auf der rechten Seite von Gl. (1) oder (2) stehenden Kräftefunctions-Mittelwerth nennt Clausius das Virial des materiellen Punktes resp. Punktesystems (von vis, Kraft). Der fragliche Satz kann dann so ausgesprochen werden: die mittlere lebendige Kraft eines in stationärer

* Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. Pogg. Ann. Bd. 141, S. 124.

Bewegung befindlichen materiellen Punktes oder Punktesystems ist = seinem Virial.*

Zum Beweise des Satzes (1), aus welchem der Satz (2) ohne Weiteres hervorgeht, kann man ausgehen von der identischen Gleichung

---

* Ein besonderer Fall stationärer Bewegung eines Punktes ist die periodische Schwingung desselben, wobei er in auf einander folgenden gleichen Zeitintervallen (Perioden) dieselbe geschlossene Bahn wiederholt der Art durchläuft, dass einem bestimmten Punkte der Bahn eine bestimmte Geschwindigkeit des beweglichen Punktes entspricht; auch eine begrenzte Linie, welche abwechselungsweise im einen und im umgekehrten Sinne durchlaufen wird, ist als eine geschlossene Bahn zu betrachten, deren zwei gleiche Theile zusammenfallen. Um den durch obige Gl. (1) ausgedrückten Satz an einem einfachen Beispiele zu prüfen, werde die geradlinig schwingende Bewegung eines Punktes P betrachtet, auf welchen eine Kraft wirkt, die gegen einen anderen Punkt O von fester Lage gegen die Coordinatenaxen hin gerichtet und dem Abstande OP proportional ist. Wird dieser Punkt O als Ursprung der Coordinatenaxen und die positive x-Axe in der Richtung OA angenommen, wenn A eine der beiden Ruhelagen des Punktes P bei grösster Entfernung $OA = a$ vom Punkte O ist, so hat man

$$X = -mk^2x; \quad Y = Z = 0$$

und bekanntlich, wenn die Zeit t von einem solchen Augenblicke an gerechnet wird, in welchem der Punkt P den Punkt O im Sinne der positiven x-Axe passirt,

$$x = a \sin kt; \quad u = \frac{dx}{dt} = ka \cos kt.$$

Daraus folgt:

$$-Xx = mk^2x^2 = mk^2a^2\,\frac{1-\cos 2kt}{2},$$

also das Virial

$$= -\frac{1}{2}\,\overline{Xx} = \frac{1}{4}\,mk^2a^2,$$

weil

$$\overline{\cos 2kt} = \frac{1}{t}\int_0^t \cos 2kt\,.\,dt = \frac{\sin 2kt}{2kt}$$

sich dauernd der Grenze Null nähert, wenn t ohne Ende wächst. Andererseits ist

$$\frac{1}{2}\,mu^2 = \frac{1}{2}\,mk^2a^2\,\frac{1+\cos 2kt}{2},$$

also die mittlere lebendige Kraft

$$\frac{1}{2}\,m\overline{u^2} = \frac{1}{4}\,mk^2a^2 = -\frac{1}{2}\,\overline{Xx}$$

= dem Virial, wie es der Satz verlangt. Im vorliegenden Specialfalle ist die mittlere lebendige Kraft halb so gross wie der Maximalwerth derselben = dem arithmetischen Mittel der kleinsten und grössten lebendigen Kraft.

$$d\left(x\frac{dx}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt+x\frac{d^2x}{dt^2}dt.$$

Aus derselben folgt durch Multiplication mit $\frac{1}{2}m$ und mit Rücksicht darauf, dass $m\frac{d^2x}{dt^2}=X$ ist,

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt=-\frac{1}{2}Xx.dt+\frac{1}{2}m.d\left(x\frac{dx}{dt}\right)$$

und bei Integration von 0 bis t und Division durch t

$$\frac{m}{2t}\int_0^t\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt=-\frac{1}{2t}\int_0^t Xx.dt+\frac{m}{2t}\left[x\frac{dx}{dt}-x_0\left(\frac{dx}{dt}\right)_0\right].$$

Dabei sind x_0 und $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ die Werthe von x und $\frac{dx}{dt}$ für $t=0$, und da diese letzteren Grössen dem Begriffe der stationären Bewegung gemäss zwischen bestimmten Grenzen variiren, so kann immer der Divisor t hinlänglich gross genommen werden, um das zweite Glied auf der rechten Seite dauernd beliebig klein zu machen; man erhält dann

$$\frac{1}{2}m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=-\frac{1}{2}\overline{Xx}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$\frac{1}{2}m\overline{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=-\frac{1}{2}\overline{Yy}\text{ und }\frac{1}{2}m\overline{\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=-\frac{1}{2}\overline{Zz},$$

also durch Addition

$$\frac{1}{2}m\overline{u^2}=-\frac{1}{2}\overline{(Xx+Yy+Zz)}.$$

Aus dieser Beweisführung ist zugleich ersichtlich, dass der Satz nicht nur im Ganzen für die resultirenden Geschwindigkeiten und Kräfte, sondern auch einzeln für die nach einer beliebigen Richtung genommenen Geschwindigkeits- und Kraftcomponenten gültig ist. —

Bei der Anwendung von Gl. (2) auf die innere Bewegung eines Körpers von gleichförmigem Wärmezustande (unter Ausschluss von Tangentialspannungen im Falle eines festen Körpers) bedeutet die linke Seite jener Gleichung die innere lebendige Kraft = dem Arbeitswerth der freien Körperwärme H, und ist also mit Rücksicht auf §. 49, Gl. (4) bezogen auf 1 Kgr. des Körpers

$$\Sigma \frac{m\overline{u^2}}{2} = WH = WcT.$$

Entsprechend der Voraussetzung eines gleichförmigen Wärmezustandes, ausser der gleichförmigen Temperatur T also auch einer in allen Punkten gleichen Pressung = dem specif. äusseren Druck p, kommen als Kräfte zur Bildung des Virials nur dieser gleichförmig auf der Oberfläche vertheilte äussere Druck und die Molekularkräfte in Betracht, welche zwischen den materiellen Punkten des Körpers bei unmessbar kleinen Entfernungen derselben stattfinden. Andere Kräfte bedingen den Wärmezustand nur insofern, als sie eine ungleichförmige Pressung verursachen, in welchem Falle der Körper in Elemente von gleichförmigen Pressungen zerlegt werden müsste, und die zu entwickelnde Gleichung nur auf je ein solches Element, d. h. auf 1 Kgr. eines Körpers zu beziehen wäre, dessen gleichförmiger Wärmezustand dem des betreffenden Elementes gleich ist. Sind nun V_p und V_r die beiden Bestandtheile des Virials, welche dem äusseren Druck und den Molekularkräften entsprechen, so hat man nach Gl. (2)

$$WcT = V_p + V_r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Zur Bestimmung der Viriale V_p und V_r werde ein rechtwinkeliges Axensystem der x, y, z angenommen von fester Lage in dem Raume, welchen der Körper bei seinem augenblicklichen Wärmezustande einnimmt. Sind dann a, b, c die Richtungscosinus der Normalen zur Körperoberfläche F in einem Punkte A derselben, dessen Coordinaten x, y, z sind, diese Normale im Sinne von innen nach aussen genommen, so sind die Componenten des äusseren Drucks auf ein bei A gelegenes Oberflächenelement dF

$$dX = -ap \,.\, dF, \quad dY = -bp \,.\, dF, \quad dZ = -cp \,.\, dF.$$

Damit ergiebt sich das Virial V_p, welches hier nicht als Mittelwerth einer veränderlichen Grösse, sondern als eine durch den Wärmezustand unveränderlich bestimmte, von den einzelnen Phasen der inneren Bewegung unabhängige Grösse zu verstehen ist,

$$V_p = -\frac{1}{2}\int(x\,.\,dX + y\,.\,dY + z\,.\,dZ) = \frac{p}{2}\int(ax\,.\,dF + by\,.\,dF + cz\,.\,dF)$$

$$= \frac{p}{2}\int(x\,.\,dF_x + y\,.\,dF_y + z\,.\,dF_z),$$

wobei die Integrationen sich über die ganze Oberfläche zu erstrecken haben und dF_x, dF_y, dF_z die Projectionen von dF auf die Coordinatenebenen yz, zx, xy bedeuten, positiv oder negativ genommen, jenachdem a, b, c positiv oder negativ sind, jenachdem also die von innen nach aussen gerichtete

Normale an der betreffenden Stelle einen spitzen oder stumpfen Winkel mit der positiven Axe der x, y, z bildet. Dann ist aber offenbar

$$\int x \,.\, dF_x = \int y \,.\, dF_y = \int z \,.\, dF_z$$

= dem Volumen des Körpers, insbesondere pro 1 Kgr. desselben = dem specif. Volumen v, also

$$V_p = \frac{3}{2} pv \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 4.$$

Was ferner das Virial V_r betrifft, so seien A und A' zwei materielle Punkte des Körpers, welche bei unmessbar kleiner Entfernung $AA' = r$ in der Geraden AA' mit einer Kraft R gegenseitig auf einander wirken, die positiv oder negativ gesetzt werden soll, jenachdem diese in A und A' angreifenden gleichen und entgegengesetzten Kräfte, einer Anziehung oder Abstossung entsprechend, die Entfernung r zu verkleinern oder zu vergrössern streben. Sind dann x, y, z die Coordinaten von A und x', y', z' die Coordinaten von A', so ist der Bestandtheil des Virials V_r, welcher von den fraglichen zwei Kräften R herrührt, der Mittelwerth von

$$-\frac{1}{2}R\left(\frac{x'-x}{r}x + \frac{y'-y}{r}y + \frac{z'-z}{r}z\right) - \frac{1}{2}R\left(\frac{x-x'}{r}x' + \frac{y-y'}{r}y'\right.$$
$$\left. + \frac{z-z'}{r}z'\right) = \frac{1}{2}R\frac{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}{r} = \frac{1}{2}Rr$$

und somit

$$V_r = \frac{1}{2}\Sigma \overline{Rr},$$

falls die Summation auf je zwei materielle Punkte ausgedehnt wird, zwischen welchen Molekularkräfte stattfinden. Weil übrigens die materiellen Punkte eines Körpers so in Gruppen getheilt werden können, dass die unzählig vielen Punkte je einer solchen Gruppe von einerlei Art sind und gleichartige innere Bewegungen haben, in demselben Augenblicke aber sich in den verschiedensten Phasen dieser Bewegung und in den verschiedensten relativen Lagen gegen einander und gegen Punkte der anderen Gruppe befinden, so ist es schliesslich auch nicht nöthig, von den Producten Rr die Mittelwerthe zu nehmen, indem sich annehmen lässt, dass, wie sie auch einzeln mit der inneren Bewegung sich ändern, doch der Werth ihrer Summe für den ganzen Körper keine merkliche Aenderung erfährt. Es ist also auch

$$V_r = \frac{1}{2}\Sigma Rr \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; 5.$$

wenn R und r auf die Gruppirung der materiellen Punkte in irgend einem Augenblicke bezogen werden.

Die Substitution der Ausdrücke von V_p und V_r in Gl. (3) giebt:

$$WcT = \frac{3}{2}pv + \frac{1}{2}\Sigma Rr \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Diese Gleichung ist zwar, was die Glieder WcT und $\frac{3}{2}pv$ betrifft, in Einklang mit dem Sinne, in welchem sich im Allgemeinen p, v, T bei irgend einem Körper erfahrungsmässig zusammen ändern; weil aber bei festen und flüssigen Körpern sich v für $T = Const.$ in viel geringerem Verhältnisse, als $\frac{1}{p}$, und für $p = Const.$ in viel geringerem Verhältnisse, als T ändert, das Glied $\frac{3}{2}pv$ folglich nur klein im Vergleich mit den anderen Gliedern der Gleichung sein kann, so ist auf jenen Einklang in diesen Fällen nur ein untergeordneter Werth zu legen, so lange nicht das Virial $V_r = \frac{1}{2}\Sigma Rr$ in rationeller Weise als Function der den Wärmezustand charakterisirenden Grössen p, v, T bestimmt werden kann, was nur auf Grund speciellerer Annahmen in Betreff der Gruppirung und inneren Bewegung der materiellen Punkte und der zwischen ihnen wirksamen Einzelkräfte zu erwarten, bisher aber nicht genügend gelungen ist.

Anders verhält es sich mit Gasen und Dämpfen, für welche durch einfache und den Umständen wohl entsprechend scheinende Annahmen immerhin schon jetzt eine bemerkenswerthe Uebereinstimmung der empirisch gefundenen Thatsachen mit der theoretischen Gleichung (6) herbeigeführt werden kann, falls dieselbe zuvor auf eine etwas andere Form gebracht wird durch Zerlegung der inneren lebendigen Kraft und des Virials V_r in je zwei Theile entsprechend der in §. 45 erörterten Vorstellung, nach welcher irgend ein Körper zunächst als ein Aggregat von Molekülen, jedes Molekül als ein Aggregat von Atomen oder materiellen Punkten betrachtet wird, welche (unabhängig von der inneren Bewegung des Moleküls im Körper) beständig in engerer Gruppirung beisammen bleiben, so lange die Aggregatform und der chemische Charakter des Körpers sich nicht ändern. Wenn man dann die innere Bewegung eines Moleküls zerlegt denkt in die Bewegung seines Massenmittelpunktes S bezüglich auf die vorausgesetzten Coordinatenaxen der x, y, z und in die relative Bewegung der Atome des Moleküls gegen drei Axen, welche von S aus mit jenen parallel gezogen werden, so ist die innere lebendige Kraft des Moleküls nach einem bekannten Satze der Mechanik stets die Summe derjenigen lebendigen Kräfte, welche jenen Partialbewegungen entsprechen, falls bei der ersteren die

Molekülmasse im Punkte S vereinigt gedacht wird. Somit kann auch die innere lebendige Kraft $= WcT$ pro 1 Kgr. des ganzen Körpers in zwei Theile zerlegt werden:

$\lambda WcT =$ der lebendigen Kraft der inneren Translationsbewegung der Moleküle, d. h. der in ihren Massenmittelpunkten vereinigt gedachten Molekülmassen, und

$(1 - \lambda) WcT =$ der relativen lebendigen Kraft der Atome in den Molekülen, d. h. in Beziehung auf Axen, welche von den Massenmittelpunkten der Moleküle aus mit gewissen im augenblicklichen Körpervolumen festen Axen parallel gezogen werden.

Diese letztere Bewegung, nämlich die relative Bewegung der Atome in den Molekülen bezüglich auf feste Axrichtungen, könnte weiter zerlegt werden in die relative Bewegung bezüglich auf ihre mittleren oder Gleichgewichtsörter in den Molekülen und in die Rotationen der Systeme dieser mittleren Oerter um die Massenmittelpunkte S der Moleküle; doch würde diese weitere Zerlegung nur in Verbindung mit specielleren, als den hier beabsichtigten, Annahmen und Erörterungen von Werth sein können. Mit Rücksicht auf den inneren Zustand luftförmiger Körper ist aber vor Allem die innere Translationsbewegung der Moleküle von Interesse; sie hängt ausser vom äusseren Drucke nur von den in §. 45 mit P bezeichneten gleichen und parallelen Kräften entgegengesetzten Sinnes ab, mit welchen, in ihren Massenmittelpunkten S und S' angreifend, irgend zwei Moleküle A und A' auf einander wirken. Zerlegt man diese Kräfte, wie dort, in je zwei Componenten R nach der Richtung SS' resp. $S'S$ und N senkrecht darauf, so ist der Theil des Virials des ganzen Körpers, welcher von den Componenten R herrührt, analog der obigen Gl. (5)

$$= \frac{1}{2} \Sigma Rr = \frac{1}{2} \Sigma Rr,$$

unter r hier die Entfernungen SS' verstanden. Das den Componenten N entsprechende Virial ist dagegen $=$ Null; denn wenn x, y, z die Coordinaten von S sind, x', y', z' dieselben von S', ferner a, b, c die Richtungscosinus der in S, also $-a, -b, -c$ dieselben der in S' angreifenden Kraft N, so ist der von diesen zwei Kräften N herrührende Elementarbestandtheil des fraglichen Virials der Mittelwerth von

$$-\frac{1}{2}(aNx + bNy + cNz) - \frac{1}{2}(-aNx' - bNy' - cNz')$$
$$= \frac{1}{2} N[a(x' - x) + b(y' - y) + c(z' - z)] = 0.$$

weil $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ den Richtungscosinus der zur Richtung (a, b, c) senkrechten Richtung SS' proportional sind.

Somit kann statt Gl. (6) auch geschrieben werden:

$$\lambda WcT = \frac{3}{2}pv + \frac{1}{2}\Sigma Rr \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7),$$

unter R die positive oder negative (Anziehungs- oder Abstossungs-) Kraft verstanden, welche irgend zwei Moleküle innerhalb des Bereichs ihrer gegenseitigen Molekularwirkung bei der Entfernung $SS' = r$ ihrer Massenmittelpunkte in der Geraden SS' auf einander ausüben.

§. 51. Molekulartheorie und Zustandsgleichung von Gasen und Dämpfen.

Für irgend einen Augenblick sei

L_s die lebendige Kraft der inneren Bewegung eines Moleküls A, falls seine Masse im Massenmittelpunkte S vereinigt gedacht wird, und

L_r die relative lebendige Kraft der Atome dieses Moleküls bezüglich auf Axen, welche mit S als Ursprung sich parallel mit gewissen im Körper festen Axen bewegen.

Von einer relativen Bewegung der Atome gegen einander werde zunächst abgesehen, das Molekül folglich als ein starres System von Atomen oder materiellen Punkten betrachtet; L_r ist dann die lebendige Kraft, welche der Rotation dieses starren Moleküls um seinen Massenmittelpunkt S entspricht.

Wenn man nun annimmt, die Moleküle eines luftförmigen Körpers seien im Mittel so weit von einander entfernt, dass sie keine Molekularwirkung auf einander ausüben, so muss, wie schon in §. 46 bemerkt wurde, der Massenmittelpunkt S eines Moleküls A, so lange er nicht in den Wirkungsraum eines anderen Moleküls gelangt, sich geradlinig mit constanter Geschwindigkeit, also auch mit constanter lebendiger Kraft L_s bewegen; die Rotation um S kann sich dabei bezüglich auf die Richtung der Rotationsaxe und die Winkelgeschwindigkeit um dieselbe nach bekannten Gesetzen ändern, doch so, dass auch die lebendige Kraft L_r constant bleibt. Dasselbe gilt von irgend einem anderen Molekül A' mit dem Massenmittelpunkte S' bezüglich der betreffenden lebendigen Kräfte L'_s und L'_r. Kommen aber A und A' einander so nahe, dass S und S' durch die Wirkungsräume von A' resp. A hindurchgehen, so werden unter der Einwirkung der im §. 45 erklärten Kräfte P, aus den Componenten R und N bestehend,

sowie der Kräftepaare M und M' nicht nur die Punkte S und S' von ihren Bewegungsrichtungen abgelenkt, sondern es können auch die lebendigen Kräfte L_s und L_r, L'_s und L'_r einzeln geändert werden; nur ihre Summe $L_s + L_r + L'_s + L'_r$ ist, sobald die Moleküle aus dem Bereiche ihrer gegenseitigen Molekularwirkung wieder heraus sind, also S und S' nach veränderten Richtungen sich wieder geradlinig fortbewegen, ebenso gross wie sie vorher war, weil die genannten Kräfte und Kräftepaare aus Einzelkräften zwischen den Atomen von A und denen von A' zusammengesetzt sind, welche bei der Annäherung und Wiederentfernung dieser Atome entgegengesetzt gleiche Arbeiten verrichten. Ein ähnlicher Vorgang findet statt, wenn ein Molekül A an der Oberfläche in den Wirkungsraum eines Moleküls der Gefässwand gelangt, wodurch der luftförmige Körper begrenzt wird; nachdem es von der Wand reflectirt worden ist, indem die gegen die Wand hin gerichtete geradlinige Bahn seines Massenmittelpunktes S durch eine Curve in eine von der Wand weg gerichtete geradlinige Bahn überging, können nicht nur seine partiellen lebendigen Kräfte L_s und L_r, sondern auch seine ganze innere lebendige Kraft $= L_s + L_r$ sich geändert haben, einer Wärmeleitung von der Wand zum Molekül A oder umgekehrt entsprechend, jenachdem die Aenderung von $(L_s + L_r)$ positiv oder negativ ist. Im Durchschnitt für alle Moleküle des luftförmigen Körpers aber, welche in irgend einer messbaren Zeit mit der Gefässwand in Berührung kommen, d. h. mit ihren Massenmittelpunkten in die Wirkungsräume von Wandmolekülen gelangen, ist die Aenderung ihrer inneren lebendigen Kraft $(L_s + L_r) =$ Null, wenn dem luftförmigen Körper Wärme von aussen weder mitgetheilt noch entzogen wird, wenn er überhaupt, wie hier vorausgesetzt wird, in einem unverändert bleibenden gleichförmigen Wärmezustande sich befindet.

Während die beschriebenen Vorgänge in irgend einer beliebig kleinen messbaren Zeit an unzählig vielen Stellen des vom luftförmigen Körper eingenommenen Raumes unter den verschiedensten Umständen sich wiederholen und somit die Massenmittelpunkte der Moleküle genöthigt werden in vielfach verschlungenen Bahnen sich zu bewegen so, dass jede solche Bahn aus geradlinigen Strecken von den verschiedensten Richtungen besteht, die durch verhältnissmässig kurze Curvenstücke stetig in einander übergehen, können zwar die lebendigen Kräfte L_s und L_r ebenso wie ihre Summen für die einzelnen Moleküle in demselben Augenblicke sehr verschieden sein; ebenso aber, wie die Summe $\Sigma(L_s + L_r)$ für alle Moleküle zusammen eine durch den Wärmezustand bestimmte constante Grösse, nämlich pro 1 Kgr. des Körpers $= W c T$ ist, so ist dasselbe auch vom de

Partialsummen ΣL_s und ΣL_r anzunehmen, also auch von dem in §. 50 mit λ bezeichneten Verhältnisse

$$\lambda = \frac{\Sigma L_s}{\Sigma(L_s + L_r)},$$

welches von der Art abhängt, wie im Durchschnitt zwei Moleküle, während sie innerhalb des Bereichs ihrer gegenseitigen Molekularwirkung an einander vorbeigehen, auf einander wirken und somit ihre partiellen lebendigen Kräfte L_s und L_r gegenseitig beeinflussen. Diese durchschnittliche Art der gegenseitigen Einwirkung kann aber mit dem Wärmezustande sich ändern, insbesondere von der durchschnittlichen Translationsgeschwindigkeit der Moleküle abhängig sein, weil, je grösser diese Geschwindigkeit ist, desto tiefer unter übrigens gleichen Umständen die Massenmittelpunkte S und S' zweier solcher Moleküle in ihre Wirkungsräume gegenseitig eindringen werden, wodurch insofern eine verschiedene durchschnittliche Wirkung bedingt werden kann, als die vorgenannten Kräfte R und N nach anderen Gesetzen mit $SS' = r$ sich ändern können wie die Kräftepaare M und M'.

Wenn schliesslich noch darauf Rücksicht genommen wird, dass die Atome in den Molekülen beständig in relativer Bewegung gegen einander befindlich sein können, wodurch die partielle lebendige Kraft L_r eine zusammengesetzte Bedeutung erhält und auch diejenigen Kräfte mit in Betracht kommen, womit die Atome eines Moleküls gegenseitig auf einander wirken, so wird dadurch zwar eine weitere Complication der oben besprochenen Vorgänge bedingt, doch bleiben die Folgerungen dieselben; es kommt nur eine weitere Ursache hinzu, weshalb das Verhältniss λ vom Wärmezustande abhängig sein kann, indem es denkbar ist, dass mit letzterem auch die mittlere Gruppirung der Atome in den Molekülen sich ändert. Im Allgemeinen ist somit λ als eine Function der den Wärmezustand bestimmenden Grössen zu betrachten, und zwar offenbar nicht nur bei luftförmigen Körpern, sondern allgemein für jede Aggregatform; dass ausserdem λ von der Körperart abhängen wird, also von der Art und Zahl der Atome, welche ein Molekül constituiren, ist selbstverständlich.

So lange nun zwei Moleküle sich ausserhalb des Bereichs ihrer Molekularwirkung befinden, ist für dieselben die in Gl. (7) des vorigen §. mit R bezeichnete Kraft = Null, und wenn es als charakteristisch für den Grenzzustand eines vollkommenen Gases angenommen wird, dass die Zeiten zum Durchlaufen der Curvenstücke, durch welche die geradlinigen Bahnstrecken der Massenmittelpunkte S zusammenhängen, im Ver-

gleich mit den Zeiten zum Durchlaufen der letzteren verschwindend klein sind, so ist in jener Gleichung auch ΣRr verschwindend klein, also

$$\frac{2}{3}\lambda WcT = pv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

Soll diese Gleichung* mit der empirisch bekannten Zustandsgleichung

$$RT = pv$$

der Form nach übereinstimmen, so ist nur nöthig anzunehmen, dass λ constant ist, dass also bei Gasen die lebendige Kraft der inneren Translationsbewegung der Moleküle zur ganzen inneren lebendigen Kraft ein constantes, vom Wärmezustande unabhängiges Verhältniss hat, welches übrigens für verschiedene Gase verschieden sein kann. Dasselbe ergiebt sich

$$\lambda = \frac{3}{2}\frac{R}{Wc} = \frac{3}{2}\frac{AR}{c} = \frac{3}{2}\frac{AR_0}{c\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

unter R_0 den Werth von R für atmosphärische Luft und unter δ die Dichtigkeit des Gases bezüglich auf Luft von gleicher Temperatur und Pressung verstanden. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von $c\delta$ folgt aus Gl. (2), dass das Verhältniss der lebendigen Kraft der inneren Translationsbewegung der Moleküle zur ganzen inneren lebendigen Kraft eines Gases umgekehrt proportional ist der auf die Volumeneinheit (bei gleichen Werthen von p und T) bezogenen wahren specifischen Wärme, oder auch, sofern in gleichen Räumen unter gleichen Umständen gleich viel Moleküle verschiedener Gase enthalten sind (§. 19), dass jenes Verhältniss λ umgekehrt proportional ist der wahren specifischen Wärme eines Moleküls. Letztere ist $= mc$, wenn m das Molekülgewicht bedeutet, und es ist also

$$\lambda mc = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.$$

unter C eine für alle Gase gleiche Constante verstanden. Bei der Temperatur T ist die lebendige Kraft der inneren Translationsbewegung eines Moleküls $= \lambda WmcT = WCT$; die Moleküle je zweier Gase von gleicher Temperatur haben also dieselbe lebendige Kraft ihrer inneren Translationsbewegung.

---

* Dieselbe Gleichung ergiebt sich, wenn nach Krönig (Pogg. Ann. Bd. [illegible] S. 315) und nach Clausius (Pogg. Ann. Bd. 100, S. 353) die Pressung eines Gases erklärt wird als das Resultat von Stössen, welche die Moleküle vermöge ihrer Translationsbewegung auf die Gefässwand ausüben, und welche einzeln schwach sind, dabei in so grosser Zahl an so nahe beisammen liegenden Punkten und nach so kurzen Zeitintervallen sich wiederholen, dass sie im Ganzen wie ein stetiger Druck sich zu erkennen geben.

Nach Gl. (3) würde das Gesetz von Dulong und Petit in Betreff des Zusammenhanges zwischen der specif. Wärme und dem Aequivalentgewichte, wenn es auf die wahre specifische Wärme und das Molekülgewicht bezogen wird, darin bestehen, dass das Product aus der wahren specifischen Wärme und dem Molekülgewicht eines Stoffes umgekehrt proportional ist dem Verhältnisse λ, welches im Gaszustande zwischen der lebendigen Kraft der inneren Translationsbewegung und der ganzen inneren lebendigen Kraft der Moleküle stattfindet.

Dieses Verhältniss λ steht in Beziehung zu dem Verhältnisse n der specifischen Wärmen eines Gases bei constanter Pressung und bei constantem Volumen. Indem nämlich letztere bei Gasen mit der wahren specif. Wärme identisch ist (§. 49) und deshalb in Gl. (2) auch gesetzt werden kann:

$$AR = c(n - 1) \text{ nach §. 19, Gl. (1),}$$

so folgt

$$\lambda = \frac{3}{2}(n - 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Mit $n = 1{,}41$ für atmosphärische Luft und überhaupt für chemisch einfache Gase oder Gemenge von solchen ergiebt sich $\lambda = 0{,}615$. Setzt man allgemein nach der in §. 19 erwähnten A. Naumann'schen Formel*

* Diese Formel ergiebt sich durch die folgende Betrachtung. Wenn durch Wärmemittheilung die Temperatur eines Gases bei constantem Volumen um 1° erhöht wird, so wird durch die mitgetheilte Wärme theils die relative lebendige Kraft der Atome, theils die lebendige Kraft der Translationsbewegung der Moleküle, und zwar letztere pro 1 Kgr. des Gases um λWc gesteigert. Geschieht aber die Temperaturerhöhung um 1° bei constanter Pressung, so ist durch die mitgetheilte Wärme ausserdem eine äussere Arbeit, nämlich nach Gl. (1) die Arbeit

$$p \,.\, \Delta v = \frac{2}{3}\lambda Wc$$

zu verrichten, welche sich also zur entsprechenden Vermehrung der lebendigen Kraft der Molekular-Translationsbewegung verhält $= 2:3$. Nimmt man nun an, dass die entsprechende Vermehrung der relativen lebendigen Kraft der Atome deren Anzahl $= a$ in den Molekülen proportional sei, so kann man setzen:

$$n = \frac{c_1}{c} = \frac{xa + 3 + 2}{xa + 3} = \frac{xa + 5}{xa + 3}$$

und erhält daraus

$$x = 1, \text{ also } n = \frac{a + 5}{a + 3},$$

wenn (in nahem Anschlusse an die vorhandenen Bestimmungen von n besonders für atmosphärische Luft) für alle einfachen, d. h. aus zweiatomigen Molekülen bestehenden Gase oder Gasgemenge $n = \frac{7}{5} = 1{,}4$ gesetzt wird, indem die Dif

$$n = \frac{a+5}{a+3},$$

unter a die Atomzahl des Moleküls verstanden, so folgt

---

ferenz von etwa 0,01 theils den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern, theils den Abweichungen der bei den Versuchen benutzten Gase von dem eigentlich vollkommenen Gaszustande zugeschrieben wird. Eine Prüfung der Formel auch in Betreff solcher Gase, für welche n nicht experimentell bestimmt ist, kann dadurch geschehen, dass aus der Gleichung

$$\frac{c_1}{c} = \frac{a+5}{a+3}$$

gefolgert wird:

$$\frac{c_1 - c}{c_1} = \frac{2}{a+5}$$

oder wegen

$$\frac{c_1 - c}{c_1} = \frac{AR}{c_1} = \frac{AR_0}{c_1 \delta}$$

$$\frac{c_1 \delta}{a+5} = \frac{AR_0}{2} = Const.$$

Dieser Gleichung entsprechen in der That die für verschiedene chemisch einfache und zusammengesetzte Gase oder Dämpfe bekannten Werthe von a, δ und c_1 insoweit, dass die Abweichungen durch Beobachtungsfehler und namentlich durch den unvollkommenen Gaszustand erklärt werden können, wie die folgenden Beispiele erkennen lassen.

Gasart.	Zusammensetzung.	a	δ	c_1	$\frac{c_1\delta}{a+5}$
Sauerstoff	O_2	2	1,1056	0,2175	0,03435
Stickstoff	N_2	"	0,9713	0,2438	0,03383
Wasserstoff	H_2	"	0,0692	3,4090	0,03370
Chlor	Cl_2	"	2,4502	0,1210	0,04235
Stickoxyd	NO	"	1,0384	0,2317	0,03437
Kohlenoxyd	CO	"	0,9673	0,2450	0,03386
Chlorwasserstoff	HCl	"	1,2596	0,1852	0,03333
Kohlensäure	CO_2	3	1,5201	0,2169	0,04121
Stickoxydul	N_2O	"	1,5201	0,2262	0,04298
Wasser	H_2O	"	0,6219	0,4805	0,03735
Schwefelwasserstoff	H_2S	"	1,1747	0,2432	0,03571
Schwefelkohlenstoff	CS_2	"	2,6258	0,1569	0,05150
Ammoniak	NH_3	4	0,5894	0,5084	0,03330
Sumpfgas	CH_4	5	0,5527	0,5929	0,03277
Chloroform	$CHCl_3$	"	4,1244	0,1567	0,06463
Holzgeist	CH_4O	6	1,1055	0,4580	0,04603
Aethylen	C_2H_4	"	0,9672	0,4040	0,03552
Aethylchlorid	C_2H_5Cl	8	2,223	0,2738	0,04682
Alkohol	C_2H_6O	9	1,5890	0,4534	0,05146
Aether	$C_4H_{10}O$	15	2,5573	0,4797	[illegible]

$$\lambda = \frac{3}{a + 3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

insbesondere z. B. $\lambda = 0{,}6$ für $a = 2$ (einfache Gase), $\lambda = 0{,}5$ für $a = 3$ (u. A. für Wassergas) u. s. f. Je grösser die Atomzahl der Moleküle, desto kleiner ist λ.

Die mittlere innere Translationsgeschwindigkeit u der Moleküle eines Gases oder Gasgemenges, von gegebener Temperatur T, verstanden als diejenige Geschwindigkeit, deren Quadrat = dem Mittelwerthe des Geschwindigkeitsquadrats der Punkte S ist, ergiebt sich daraus, dass die lebendige Kraft, welche dieser inneren Translationsbewegung pro 1 Kgr. des Gases entspricht,

---

Die Werthe von δ und c_1 sind der von A. Naumann mitgetheilten vollständigeren Tabelle (Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. 142, S. 265) entnommen, und zwar sind die Werthe von δ zum Theil nicht die beobachteten, sondern die theoretischen Dichtigkeiten, aus dem Molekulargewicht m vermittels der Formel

$$\delta = \frac{m}{28{,}9} = 0{,}0346\, m \ (\S.\ 19,\ \text{Gl. } 3)$$

berechnet. Die Werthe von $\frac{c_1 \delta}{a + 5}$ sind besonders für Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff, Stickoxyd und Kohlenoxyd, welche Körper aus anderen Gründen als dem vollkommenen Gaszustande vorzugsweise nahe kommend zu betrachten sind, wenig verschieden, im Mittel = 0,03402, woraus sich mit $R_0 = 29{,}27$ ergeben würde:

$$\frac{1}{A} = W = \frac{29{,}27}{2\,.\,0{,}03402} = 430.$$

Für die übrigen luftförmigen Körper ergiebt sich $\frac{c_1 \delta}{a + 5}$ im Allgemeinen grösser, und zwar um so mehr, je grösser δ, also m ist; je grösser in der That das Molekülgewicht ist, desto mehr muss sich die gegenseitige Anziehung der Moleküle geltend machen und die specif. Wärme c_1 ausser den drei oben genannten noch einen vierten Bestandtheil in sich schliessen entsprechend der inneren Arbeit, welche aufgewendet werden muss, um die Moleküle entgegen ihrer gegenseitigen Anziehung weiter von einander zu entfernen. Setzt man z. B. die specif. Wärme c_1 des Wasserdampfes = dem in §. 39 unter 2) näherungsweise bestimmten, von jenem Bestandtheile befreiten Grenzwerthe

$$c_1 = lim.\ c_p = 0{,}4632,$$

so ergiebt sich

$$\frac{c_1 \delta}{a + 5} = \frac{0{,}4632\,.\,0{,}6219}{8} = 0{,}03601$$

in schon besserer Uebereinstimmung mit dem Mittelwerthe für die permanenten Gase.

$$\frac{u^2}{2g} = \lambda WcT$$

ist, woraus mit Rücksicht auf Gl. (1) folgt:

$$u = \sqrt{2g \cdot \frac{3}{2} pv} = \sqrt{3gRT} = \sqrt{3gR_0 \frac{T}{\delta}} \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

und mit $g = 9{,}81$ und $R_0 = 29{,}27$ (§. 17)

$$u = 29{,}35 \sqrt{\frac{T}{\delta}} = 485 \sqrt{\frac{T}{273\delta}} \text{ Mtr. pro Sec.} \quad \ldots \ldots (7)$$

Mit $\delta = 1$ und $T = 273$ ergiebt sich $u = 485$ Mtr. pro Sec. als mittlere Translationsgeschwindigkeit der atmosphärischen Luftmoleküle bei der Temperatur des schmelzenden Eises; dabei ist die mittlere Geschwindigkeit der Sauerstoffmoleküle etwas kleiner, die der Stickstoffmoleküle etwas grösser, als jene Zahl, weil δ für Sauerstoff etwas > 1, für Stickstoff etwas < 1 ist. —

Was nun die Zustandsgleichung der Dämpfe und selbst schon der wirklichen, mehr oder weniger unvollkommenen Gase betrifft, so kann die Ursache ihres Abweichens von dem Mariotte'schen und dem Gay-Lussac'schen Gesetze, also von der einfachen Gleichung

$$pv = RT = Const.\, T$$

theils darin begründet sein, dass in Gl. (7), §. 50 oder in der Gleichung

$$\frac{2}{3} \lambda WcT = pv + \frac{1}{3} \Sigma Rr \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

das Verhältniss λ nicht constant, theils darin, dass für sie nicht $\Sigma Rr =$ Null ist. Indem aber λ nicht sowohl von der grösseren oder geringeren Häufigkeit der ihre partiellen inneren lebendigen Kräfte L_s und L_r gegenseitig modificirenden Begegnung der Moleküle, als vielmehr von der relativen Lage abhängt, in welcher sich bei solcher Begegnung im Durchschnitt die Atome des einen Moleküls gegen die des anderen befinden, so wäre, nachdem sich für Gase λ als unabhängig vom Wärmezustande und nur als abhängig von der Gasart, nämlich von der Constitution der Moleküle ergeben hat, ein abweichendes Verhalten bei Dämpfen und unvollkommenen Gasen kaum anders zu erklären, als durch eine Abhängigkeit der Gruppirung der Atome in den einzelnen Molekülen vom Wärmezustande des Dampfes resp. unvollkommenen Gases. Die hauptsächlichste Ursache der Abweichung ist wahrscheinlich in dem Gliede ΣRr zu suchen, welches um so mehr in Betracht kommen muss, je dichter ein Dampf ist, je häufiger also der Massenmittelpunkt S eines Moleküls A in den Wirkungsraum eines

Moleküls A' eindringt. Wenn hierbei der kürzeste Abstand der geradlinigen Bahnstrecken, welche die Massenmittelpunkte S und S' der Moleküle unmittelbar vor ihrer Begegnung durchlaufen, nur wenig kleiner ist, als der Halbmesser der betreffenden Wirkungsräume, so kann es der Fall sein, dass S und S' nur durch die äusseren Theile dieser Wirkungsräume, die in §. 45 so genannten Anziehungsräume hindurchgehen, so dass einer solchen Begegnung nur positive Werthe der Kraft R entsprechen. Ist jener kürzeste Abstand kleiner, so können zwar S und S' auch in die Abstossungsräume eindringen, müssen aber vorher und nachher durch die betreffenden Anziehungsräume hindurchgehen. Die Begegnung der Moleküle veranlasst also entweder nur positive oder positive und negative Glieder der Summe ΣRr und lässt es sich erwarten, dass diese Summe einen positiven Werth haben werde. Jedenfalls wird dieser Werth absolut genommen um so grösser sein, je häufiger die ihn veranlassenden Begegnungen der Moleküle sich wiederholen, je kleiner also die mittlere Entfernung nächstbenachbarter Moleküle ist, welche als Cubikwurzel des Volumens definirt werden kann. Setzt man hiernach in Gl. (8)

$$\frac{1}{3}\Sigma Rr = \frac{s}{v^{\frac{1}{3}}},$$

wobei s ausser von der Art des Dampfes auch noch von seinem Wärmezustande abhängen kann, so folgt

$$\frac{2}{3}\lambda W c T = pv + \frac{s}{v^{\frac{1}{3}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

In §. 39, Gl. (13) wurde unter der Voraussetzung, dass c_v eine Function nur von v sei, in welchem Falle sich dann $c_v = Const.$ ergab, also, wie jetzt hinzugefügt werden kann, $=$ der wahren specif. Wärme c, als Zustandsgleichung der Dämpfe gefunden:

$$RT = pv + \frac{S}{v^{n-1}},$$

unter R und S Constante verstanden, welche aber ebenso wie die Constante n für verschiedene Dämpfe verschiedene Werthe haben konnten dabei standen R und n in der Beziehung

$$R = (n-1)\frac{c_v}{A} = (n-1)\,Wc,$$

so dass die Zustandsgleichung auch in der Form geschrieben werden kann:

$$(n-1)\,WcT = pv + \frac{S}{v^{n-1}}.$$

Diese empirisch gefundene Gleichung stimmt mit Gl (9) überein, wenn in letzterer gesetzt wird:

$$s = S r^{\frac{4}{3} - n},$$

insbesondere z. B. für Wasserdampf $s = S = Const.$, indem für denselben in §. 39 aus den Versuchen von Hirn und Cazin $n = \frac{4}{3}$ gefolgert wurde in Uebereinstimmung mit der Naumann'schen Formel

$$n = \frac{a+5}{a+3} = \frac{3+5}{3+3} = \frac{4}{3},$$

und wenn ferner gesetzt wird:

$$\lambda = \frac{3}{2}(n-1)$$

= dem constanten Werth dieses Verhältnisses für den Grenzzustand eines vollkommenen Gases. Gemäss dem empirisch bekannten Verhalten der Dämpfe und unvollkommenen Gase ergab sich S in §. 39 als eine positive Constante, so dass auch s oder ΣRr positiv ist, wie zu erwarten war. Uebrigens wurde schon in §. 39 hervorgehoben, dass in Ermangelung vollkommen ausreichenden Versuchsmaterials die dort abgeleiteten verschiedenen Formen von Zustandsgleichungen der Dämpfe zunächst nur als Näherungen zu betrachten sind. —

Es ist hier der Ort zu einigen Bemerkungen über das Wesen der Verdampfung, wie es in der Hauptsache auf Grund der im Vorhergehenden besprochenen Vorstellungen von der Molekularconstitution und der inneren Bewegung von Körpern überhaupt und der luftförmigen Körper insbesondere zuerst von Clausius erklärt wurde.*

Die innere Bewegung der Moleküle einer Flüssigkeit besteht zum Theil auch in einer Translationsbewegung, und es können die entsprechenden Translationsgeschwindigkeiten der einzelnen Moleküle sehr verschiedene Werthe haben, indem nur die Summe der entsprechenden lebendigen Kräfte für alle Moleküle irgend eines beliebig kleinen messbaren Theils der Flüssigkeit eine durch den Wärmezustand dieses Theiles bestimmte Grösse ist. Wenn im Inneren der Flüssigkeit ein Molekül vermöge seiner Translationsgeschwindigkeit die Wirkungsräume benachbarter Moleküle verlässt, so gelangt es im Allgemeinen sofort in die Wirkungsräume anderer Moleküle; der continuirliche Zusammenhang der Wirkungsräume wird nicht unterbrochen und, da die Moleküle nicht individuell unterschieden werden können, giebt sich der fragliche Umstand nicht durch irgend eine Er-

* Poggendorff's Annalen, Bd. 100, S. 353.

mung zu erkennen.* An der freien Oberfläche der Flüssigkeit kann es aber der Fall sein, dass der Massenmittelpunkt S eines Moleküls sich bis über die Grenzen der Wirkungsräume aller Nachbarmoleküle hinaus bewegt, d. h. die Oberfläche der Flüssigkeit, wie sie in §. 45 definirt wurde, durchdringt; mit der Geschwindigkeit, welche der Punkt S in diesem Augenblicke besitzt, bewegt er sich dann geradlinig in den oberhalb der Flüssigkeit befindlichen Raum. Ist dieser Raum durch Wände eingeschlossen und anfänglich leer, so wird er durch die Moleküle, welche ebenso wie das zuvor erwähnte nach und nach die Oberfläche der Flüssigkeit durchdringen, mit immer dichter werdendem Dampfe erfüllt. Während die zuerst von der Flüssigkeit ausgestossenen Moleküle sich bis zur Berührung mit der Gefässwand geradlinig fortbewegen und dabei von dieser Wand je nach Umständen theils abprallen, theils (als eine successive sich ansammelnde condensirte Flüssigkeitsschicht) zurückgehalten werden, können nachfolgende Moleküle in zunehmendem Grade schon eher von ihrer anfänglich geraden Bahn abgelenkt werden, indem sie in die Wirkungsräume von Dampfmolekülen gelangen, welche sich bereits in dem Gefässraume über der Flüssigkeit befinden. Indem nun die auf die eine oder die andere Weise von ihren Richtungen abgelenkten Dampfmoleküle auch in umgekehrtem Sinne die Oberfläche der Flüssigkeit wieder durchdringen und von ihr zurückgehalten, der Flüssigkeit als solcher wieder einverleibt werden können, dieser Vorgang aber um so häufiger sich wiederholen muss, je mehr Dampf im oberen Gefässraume sich angesammelt hat, ist klar, dass die Dichte dieses Dampfes sich mit abnehmender Schnelligkeit einer Grenze nähert, welche dann erreicht ist, wenn in derselben Zeit gleich viel Moleküle im einen wie im anderen Sinne die Oberfläche der Flüssigkeit durchdringen, d. h. ebenso viel Moleküle von ihr entsendet wie zurückempfangen werden. In diesem Grenzzustande ist der obere Gefässraum mit Dampf gesättigt; letzterer selbst ist, wie man sich auszudrücken pflegt, gesättigter Dampf. Seine Dichtigkeit ist um so grösser, je mehr Moleküle in der Zeiteinheit von der Flüssigkeit entsendet werden, je grösser also die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmoleküle, d. h. je grösser die innere lebendige Kraft oder

* Mittelbar sind übrigens hierdurch vielleicht die eigenthümlichen unregelmässig zitternden Bewegungen zu erklären, welche kleine in Flüssigkeiten suspendirte Theilchen fester Körper unter dem Mikroskope erkennen lassen, und welche von R. Brown im Jahre 1827 zuerst beobachtet wurden. Die wahrgenommene messbare Bewegung eines solchen Theilchens kann dabei das Resultat der einzeln unmessbaren inneren Bewegungen (Stösse) von vielen Flüssigkeitsmolekülen in seiner Umgebung sein.

die Temperatur der Flüssigkeit ist. Die Beziehung, welche zwischen der Dichtigkeit und Temperatur sowie auch (mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung) der Pressung gesättigten Dampfes stattfindet, würde durch solche Erwägungen sich rationell bestimmen lassen, wenn der Molekularzustand, die innere Bewegung und die Wirkungsgesetze der Molekularkräfte vollständiger und sicherer bekannt wären, als es thatsächlich bis jetzt der Fall ist.

Gesättigter Dampf in Berührung mit gleichartiger Flüssigkeit ist nach vorstehender Auffassung nicht eine individuell bestimmte Materie, sondern es findet ein beständiger Austausch zwischen seinen Massentheilchen und denen der Flüssigkeit statt. Indem beide Theile, Flüssigkeit und gesättigter Dampf, dieselbe Temperatur haben, hat auch ein Molekül beider Theile im Durchschnitt dieselbe innere lebendige Kraft $= WmcT$, unter m das Molekülgewicht verstanden, und ebenso muss des Beharrungszustandes wegen die mittlere lebendige Kraft der von der Flüssigkeit entsendeten Flüssigkeitsmoleküle und der von ihr zurückempfangenen Dampfmoleküle gleich gross sein. Diese mittlere lebendige Kraft der gegen einander ausgetauschten Flüssigkeits- und Dampfmoleküle ist aber grösser, als die mittlere lebendige Kraft eines Moleküls der ganzen Masse, weil es vorzugsweise die mit den grössten augenblicklichen Translationsgeschwindigkeiten bewegten Moleküle sein werden, welche, indem sie der Oberfläche der Flüssigkeit von unten oder oben her nahe kommen, dieselbe im ersten Falle überhaupt durchdringen, also vorläufig ungehindert im Dampfraume sich weiter bewegen, im anderen Falle so weit durchdringen, dass sie von der Flüssigkeit zurückgehalten werden. So lange aber das Gleichgewicht zwischen Verdampfung und Condensation nicht erreicht ist, insbesondere also auch wenn die Verdampfung gegen einen unbegrenzten oder wenigstens sehr grossen Raum hin stattfindet, verliert die verdampfende Flüssigkeit verhältnissmässig mehr freie Wärme, als materielle Theilchen, wodurch die Verdunstungskälte ihre Erklärung findet.

Wenn in dem Raume über der Flüssigkeit ein luftförmiger Körper von anderer Art sich schon befindet, so wird dadurch nur die Verdampfung und (bei geschlossenem Raume) der Eintritt des Gleichgewichtes zwischen Verdampfung von Flüssigkeit und Condensation von Dampf verzögert, indem dann sowohl die von der Flüssigkeit entsendeten Moleküle schon durch diejenigen des fremden luftförmigen Körpers von ihren Richtungen abgelenkt und zur Flüssigkeit zurückgetrieben, als auch umgekehrt Moleküle des bereits gebildeten Dampfes bei ihrer Annäherung an die Flüssigkeitsoberfläche gestört und in den Dampfraum reflectirt werden können.

einen wie im anderen Sinne findet die hemmende Wirkung des fremden luftförmigen Körpers in gleichem Grade statt, und wird also schliesslich das Gleichgewicht zwischen Verdampfung und Condensation bei derselben Dampfdichte, nur langsamer, eintreten wie wenn der fremde Körper nicht vorhanden wäre.

Die vorstehenden Bemerkungen betreffen nur die Verdampfung an der freien (von einem leeren Raume oder einem luftförmigen Mittel begrenzten) Oberfläche, die sogen. Verdunstung, welche zwar mit der Temperatur wächst, nicht aber, wenigstens bei Flüssigkeiten nicht an eine bestimmte Minimaltemperatur zu ihrer Ermöglichung an sich gebunden ist. Die Möglichkeit einer solchen Verdunstung ist nämlich auch bei festen Körpern nicht ausgeschlossen, wenn es hier auch seltener der Fall ist, dass die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes eines oberflächlichen Moleküls gross genug wird, um es ihm bei günstigster Richtung zu ermöglichen, bis über die Grenzen der Wirkungsräume der benachbarten Moleküle hinaus sich zu bewegen, sei es in Folge grösserer Halbmesser, welche die Wirkungsräume der zusammengesetzteren Moleküle eines festen Körpers haben, oder sei es in Folge des Umstandes, dass die lebendige Kraft der inneren Translationsbewegung dieser Moleküle einen kleineren Theil ihrer ganzen inneren lebendigen Kraft ausmacht, sei es endlich, dass die inneren lebendigen Kräfte der einzelnen Moleküle weniger von einander verschieden sind, den Mittelwerth nur in geringerem Grade übertreffen können, wie es namentlich von den regelmässig gruppirten Molekülen eines krystallisirten Körpers anzunehmen sein mag.

Bei einer Flüssigkeit können übrigens auch im Inneren oder an der von der Gefässwand begrenzten Oberfläche die Moleküle sich unter Umständen mit so grosser Geschwindigkeit aus einander bewegen, dass der continuirliche Zusammenhang der Masse momentan unterbrochen wird, d. h. dass die Massenmittelpunkte einer gewissen Gruppe von Molekülen sich augenblicklich ausserhalb der Wirkungsräume der übrigen Moleküle befinden. Diese Gruppe isolirter Moleküle bildet eine zunächst unmessbare kleine Dampfblase, welche auch durch Compression und Condensation alsbald wieder verschwindet, wenn die aus ihrer inneren Bewegung resultirende Pressung nicht dauernd im Stande ist, dem Druck der umgebenden Flüssigkeit Gleichgewicht zu halten, wenn nämlich die Moleküle, welche die kleine Dampfblase an die umgebende Flüssigkeit abgiebt, eine durchschnittlich grössere lebendige Kraft der Translationsbewegung haben, als diejenigen Moleküle, welche sie von der umgebenden Flüssigkeit durch Verdunstung empfängt; in diesem Falle ist auch die Zahl der in derselben Zeit

von der Dampfblase verlorenen Moleküle grösser, als die der Moleküle, welche von der Flüssigkeit aus in den Raum der Dampfblase hinein verdunsten. Wenn aber zwischen Temperatur T und Pressung p der Flüssigkeit an der betreffenden Stelle eine gewisse Beziehung stattfindet, wenn nämlich durch Wärmemittheilung an die Flüssigkeit oder durch Verminderung des äusseren Drucks auf ihre Oberfläche die Temperatur verhältnissmässig bis zu demjenigen Werth gesteigert wird, welcher gesättigtem Dampfe von der Pressung p entspricht, so kann sich die Dampfblase erhalten und so lange vergrössern, bis der ihrem Volumen proportional wachsende Auftrieb den ihrem Querschnitte proportional wachsenden Bewegungswiderstand (event. auch die Adhäsion der Gefässwand) überwindet und die Dampfblase in der Flüssigkeit aufsteigt. Auf solche Weise entsteht das Kochen, nämlich die Verdampfung im Inneren einer Flüssigkeit, bei welcher der Dampf als gesättigter Dampf gebildet wird und welche deshalb im Gegensatze zur oberflächlichen Verdampfung oder Verdunstung an die betreffende, gesättigtem Dampfe zukommende Beziehung zwischen Temperatur und Pressung als Bedingung gebunden ist.

ZWEITER ABSCHNITT.

Hydraulik.

§. 52. Charakterisirung der Flüssigkeiten; Erfahrungscoefficienten.

Die Hydraulik ist die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Flüssigkeiten, indem bei dieser Bezeichnung das Wasser (ὕδωρ) als Repräsentant irgend einer Flüssigkeit im weiteren Sinne betrachtet wird, wie solche in §. 3 als ein Körper definirt wurde, dessen Massenelemente einer unbeschränkten Gestaltsänderung und relativen Bewegung, insbesondere auch benachbarte Elemente einer relativ gleitenden Bewegung längs ihrer Berührungsfläche fähig sind, im Gegensatze zu festen Körpern, bei welchen nicht nur diese Gestaltsänderung und relative Bewegung beschränkt sind, sondern auch benachbarte Elemente überhaupt keine relativ gleitende Bewegung längs ihrer Berührungsfläche haben können.

Wenn man übrigens auch bei Flüssigkeiten von dem Stattfinden solcher Mischungsbewegungen absieht, welche mit dem Eindringen der einzelnen Moleküle in die Zwischenräume zwischen anderen Molekülen, mit beliebigen Bahnverschlingungen der Massenmittelpunkte einzelner Moleküle verbunden zu denken sind, wie es in der Hydraulik thatsächlich geschieht und wegen mangelhafter Kenntniss der solche Bewegungen bedingenden Ursachen und ihrer Gesetze geschehen muss, wenn man ferner auch von solchen Strömungen und Mischungen absieht, wie sie durch Temperaturausgleichungen in ungleich warmen Flüssigkeiten verursacht werden und welche sich ebenso wenig im Einzelnen rechnungsmässig verfolgen lassen, desgl. auch von den durch Stösse verursachten wirbelförmigen Mischungen eingeschlossener und Zerreissungen freier Flüssigkeitsstrahlen u. s. w., so ist es nicht nöthig, die Möglichkeit oder Unmöglichkeit relativ gleitender Bewegung benachbarter Massenelemente längs ihren Berührungsflächen als unterscheidendes Merkmal der flüssigen und der festen Aggregatform aufzustellen. Der Voraussetzung continuirlicher Geschwindigkeitsänderung von Punkt zu Punkt,

welche den Differentialgleichungen zur Untersuchung der Zustandsänderung irgend eines Körpers zu Grunde liegt, entspricht vielmehr in allen Fällen, bei flüssigen wie bei festen Körpern, die Vorstellung, dass jede relative Bewegung im Inneren nur durch entsprechende Deformationen der Massenelemente vermittelt wird, eine eigentlich gleitende Bewegung längs ihrer Berührungsfläche also auch bei benachbarten Elementen flüssiger Körper nicht stattfindet. Die feste und flüssige Aggregatform unterscheiden sich dann im Wesentlichen nur dadurch, dass die Deformationen der Massenelemente, welche überhaupt in Volumen- und Gestaltsänderungen bestehen können, bei festen Körpern in beiden Beziehungen begrenzt, bei flüssigen aber in Beziehung auf Gestaltsänderung unbegrenzt sind.

Die Flüssigkeiten werden unterschieden in Flüssigkeiten im engeren Sinne* (tropfbare oder wässerige Flüssigkeiten) und luftförmige Flüssigkeiten; bei letzteren ist auch die Veränderlichkeit des Volumens der Massenelemente wenigstens in Beziehung auf Vergrösserung unbegrenzt, wogegen sie bei ersteren nicht nur begrenzt, sondern auch bei constanter Temperatur, also bei nur veränderlicher Pressung, sehr eng begrenzt ist. Die luftförmigen Flüssigkeiten heissen Gase oder Dämpfe, jenachdem für sie das Mariotte'sche und Gay-Lussac'sche Gesetz, also die Zustandsgleichung $RT = pv$ (§. 17) gilt resp. als gültig vorausgesetzt wird oder nicht.

Ausser in Beziehung auf die Deformationsfähigkeit der Massenelemente unterscheiden sich die verschiedenen Aggregatformen und verschiedene Aggregatzustände bei gleicher Aggregatform auch in Beziehung auf die Widerstände, welche mit jenen Deformationen verbunden sind. Dieselben, welche von den Molekularkräften herrühren, jedoch als innere Flächenkräfte (§. 3) in die mathematische Untersuchung eingeführt werden, sind theils als Spannungen durch die Grössen der Deformationen, theils als innere Reibungen durch die Geschwindigkeiten bedingt, mit welchen die Deformationsänderungen stattfinden.

Ein Körper ist mehr oder weniger elastisch je nach den Beziehungen zwischen seinen Spannungs- und Deformationszuständen. Bei einem vollkommen elastischen Körper entspricht bei gegebener Temperatur einem bestimmten Deformationszustande, wie lange er auch dauern und mit welcher Geschwindigkeit er auch in der Aenderung begriffen sein mag, stets derselbe Spannungszustand und umgekehrt. Werden die Spannungen für jede

* Der deutschen Sprache fehlt es an kurzen besonderen Bezeichnungen für Flüssigkeiten im weiteren und engeren Sinne, entsprechend z. B. den französischen Bezeichnungen fluides und liquides.

Körperelement verstanden im Sinne von Kräften, welche dieses Element an seiner Oberfläche auf die benachbarten Elemente ausübt, so verrichten diese Spannungen bei irgend einer Deformation des Körpers die positive oder negative Arbeit, welche in §. 6 allgemein als Deformationsarbeit bezeichnet wurde. Die Arbeit der inneren Reibungen ist dagegen stets negativ, indem durch dieselben Arbeit oder lebendige Kraft verbraucht und in Wärme umgesetzt wird.*

Unter einer vollkommenen Flüssigkeit wurde in §. 5 eine solche verstanden, bei welcher die Deformation der Massenelemente, insoweit sie nur eine Gestaltsänderung derselben betrifft (und abgesehen von der Geschwindigkeit, womit sie stattfindet), keinen Widerstand verursacht, so dass die Spannungen nur als Normalspannungen vorkommen, welche in demselben Punkt für alle Ebenen gleich sind. Sie werden, da sie im Allgemeinen negativ sind, entgegengesetzt genommen als Pressungen in die

* In dieser Beziehung ist hier eine Uncorrectheit der Entwickelung in §. 6 zu berichtigen. Die daselbst mit dO bezeichnete Arbeit der Oberflächenkräfte eines Massenelementes enthält nicht nur insofern, als dieselben Spannungen sind (S. 29, Zeile 7 v. U.), sondern auch insofern, als sie innere Reibungen sind, ausser dO_1 (Gl. 2) noch einen anderen Bestandtheil dO_2, welcher von der Deformation des Massenelementes abhängt, und es hat deshalb der letzte Absatz auf S. 30 folgendermassen zu lauten:

„Diese Arbeit dO_2 kann selbst als aus zwei Theilen bestehend betrachtet werden, entsprechend den Bestandtheilen der Grössen σ und τ, welche theils Spannungen, theils innere Reibungen sein können. Der erste Theil von dO_2, den Spannungen entsprechend, wird zur Deformation des Massenelementes verbraucht; er ist entgegengesetzt gleich der Arbeit, welche das Massenelement selbst durch seine Deformation verrichtet und welche die Deformationsarbeit desselben bei der fraglichen unendlich kleinen Zustandsänderung genannt und mit dE bezeichnet werden soll. Der andere Theil von dO_2, der inneren Reibung entsprechend, sei $= dS$; er wird durch die innere Reibung verbraucht und ist jedenfalls positiv, nämlich nach §. 5, Gl. (2) und (5):

$$dS = \delta V . \frac{1}{R}\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{2} + \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2\right) dt.$$

Hiermit ist

$$dO_2 = -dE + dS; \quad dO_1 = dO + dE - dS.“$$

Die Gl. (6) auf S. 31 wird also

$$dL = dM + dO + dE - dS$$

und in Gl. (7) auf S. 32 sowie im Folgenden ist unter der mit dS bezeichneten positiven Arbeit, welche bei der unendlich kleinen Zustandsänderung eines Körpers durch die inneren Bewegungswiderstände verbraucht (in Wärme umgesetzt) wird, die entgegengesetzte Arbeit der inneren Reibung, d. h. die durch sie verbrauchte Arbeit oder lebendige Kraft mit zu verstehen.

Rechnung eingeführt. Ist p diese Pressung oder der Druck, γ das specifische Gewicht der Flüssigkeit in einem gewissen Punkte, so pflegt $\frac{p}{\gamma}$ die Druckhöhe für diesen Punkt genannt zu werden; sie ist die Höhe einer Flüssigkeitssäule vom specifischen Gewicht γ und der Grundfläche $= 1$, deren Gewicht $= p$ ist.

Eine vollkommene Flüssigkeit braucht nicht vollkommen elastisch, insbesondere aber nicht von innerer Reibung frei zu sein. Auch bei Gasen, welche im höchsten Grade vollkommene Flüssigkeiten sind, findet innere Reibung in kaum geringerem Grade statt, als bei Wasser. Wenn man bei tropfbaren Flüssigkeiten von der sehr geringen Zusammendrückbarkeit ganz absieht, so fällt damit auch die Unterscheidung zwischen vollkommener und unvollkommener Elasticität, die sich bei vollkommenen Flüssigkeiten überhaupt nur auf die Veränderlichkeit des Volumens beziehen kann, für sie hinweg. —

Die Gestalt, das Gleichgewicht und die Bewegung der Flüssigkeiten pflegen durch Gefässe oder Canäle (Röhren oder Rinnen), in denen sie enthalten sind, überhaupt durch feste Wände bedingt und begrenzt zu sein. Im Gleichgewicht (in relativer Ruhe) kann sich eine luftförmige Flüssigkeit nur in einem ganz geschlossenen Gefässe befinden, so dass ihre Oberfläche mit der inneren Oberfläche des Gefässes zusammenfällt. Eine tropfbare Flüssigkeit kann (abgesehen von der Verdunstung) auch in einem theilweise offenen Gefässe im Gleichgewicht sein; derjenige Theil ihrer Oberfläche, an welchem sie von der Gefässwand nicht berührt wird, soll dann ihre freie Oberfläche heissen, während der andere Theil im Gegensatz dazu ihre unfreie, gezwungene oder Wand-Oberfläche genannt werden kann. An der freien Oberfläche pflegt die tropfbare Flüssigkeit von einer luftförmigen, insbesondere von der atmosphärischen Luft berührt zu werden.

Die Voraussetzung vollkommener Flüssigkeit, welche den allgemeinen Gleichungen in §. 5 und §. 12 sowie auch den folgenden Entwickelungen im Allgemeinen zu Grunde liegt, ist gewöhnlich nur hinsichtlich des besonderen Zustandes merklich fehlerhaft, in welchem sich die Flüssigkeit an der Oberfläche befindet, so dass der Fehler wenigstens in solchen Fällen, in welchen sich die Flüssigkeit nicht zwischen sehr nahen Wänden befindet, durch die auch aus anderen Gründen nöthige Einführung erfahrungsmässig zu bestimmender Coefficienten in die betreffenden Formeln genügend corrigirt werden kann.

Die innere Reibung ist zwar oft von wesentlicher Bedeutung nicht nur in Betreff der Arbeitsverluste, sondern auch insofern, als sie das [illegible]

setz bedingt, nach welchem sich die Geschwindigkeit von Punkt zu Punkt in der Flüssigkeit stetig ändert; zur Vereinfachung der betreffenden Untersuchungen ist man indessen meist genöthigt, auch sie zu eliminiren durch gewisse Voraussetzungen, welche in Betreff jenes Aenderungsgesetzes a priori zu Grunde gelegt werden, wobei man sich dann wiederum vorbehalten muss, den etwaigen Fehlern dieser Annahmen nebst den betreffenden Arbeitsverlusten durch entsprechende Bestimmung von Erfahrungscoefficienten Rechnung zu tragen.

Die äussere Reibung oder Reibung an der Oberfläche, insbesondere an der Wand-Oberfläche, kann von anderer Art sein, als die innere Reibung, sowohl wegen discontinuirlicher Geschwindigkeitsänderung, welche hier stattfindet, d. h. wegen endlicher Grösse der relativen Geschwindigkeit, mit der sich die oberflächlichen Flüssigkeitselemente längs den Wänden bewegen, als auch wegen abweichenden Zustandes unvollkommener Flüssigkeit dieser Oberflächenschichten. Die dadurch verursachten Verluste an lebendiger Kraft oder entsprechender Arbeit müssen durch weitere Coefficienten berücksichtigt werden, die nur erfahrungsmässig zu bestimmen sind, ebenso wie endlich noch die Arbeitsverluste durch solche Bewegungswiderstände, insbesondere Stosswiderstände an Wänden und im Inneren der Flüssigkeit, welche auf discontinuirliche Geschwindigkeitsänderungen zurückgeführt zu werden pflegen, wenn sie auch zum Theil als örtlich verstärkte innere Reibungen in sehr schnell stattfindenden Deformationsänderungen der Flüssigkeitselemente, zum Theil in wirbelförmigen Mischungsbewegungen ihren Grund haben mögen, deren lebendige Kraft für die rechnungsmässig allein zu verfolgende und technisch allein in Betracht kommende lebendige Kraft der regelmässig strömenden oder schwingenden Bewegung verloren ist.

Dergleichen empirische Coefficienten spielen somit nothgedrungen eine bedeutende Rolle in der Hydraulik zum Nachtheil ihres wissenschaftlichen Charakters; sie heissen insbesondere Widerstandscoefficienten, wenn sie den erwähnten im engeren Sinne so genannten Bewegungswiderständen Rechnung tragen sollen. Indem diese Widerstandscoefficienten für verschiedene Arten von Flüssigkeiten und event. für verschiedene Zustände derselben besonders bestimmt werden, begreifen sie zugleich die empirische Correction des Fehlers in sich, welcher durch die Voraussetzung vollkommener Flüssigkeit in verschiedenem Grade je nach der Art und dem Zustande der betreffenden Flüssigkeit etwa begangen wurde und dessen Einfluss nicht getrennt von jenen Widerständen constatirt werden kann. Die Fehler der a priori gemachten Voraussetzungen in Betreff des Aenderungs-

gesetzes der Geschwindigkeit von einem zum anderen Punkte sind jedoch im Allgemeinen durch besondere Coefficienten zu corrigiren, welche z. B. dadurch gesondert von den Widerstandscoefficienten gefunden werden können, dass zugleich die Gewichte und die lebendigen Kräfte der unter gewissen Umständen durch gewisse Querschnitte strömenden Flüssigkeitsmengen durch Beobachtung ermittelt und mit den theoretischen Werthen dieser Grössen verglichen werden. —

Die innere und äussere Reibung einer vollkommenen Flüssigkeit sind von der Reibung zwischen zwei festen Körpern dadurch wesentlich verschieden, dass sie von der Pressung unabhängig, vielmehr ausser von der Art der Flüssigkeit sowie (bei der äusseren Reibung) von der Art und Oberflächenbeschaffenheit einer festen Wand nur von der relativen Geschwindigkeit der Elemente abhängig sind, zwischen denen die Reibung stattfindet (§. 5). Eine Unterscheidung zwischen Reibung der Ruhe und der Bewegung, wie sie bei festen Körpern gemacht zu werden pflegt, ist also hier ohne Bedeutung. Im Zustande des Gleichgewichtes (der relativen Ruhe) finden bei vollkommenen Flüssigkeiten keine Reibungen statt; überhaupt können, was die oben erwähnten Umstände betrifft, welche im Allgemeinen zur Einführung von Erfahrungscoefficienten Veranlassung geben, die Gesetze des besonderen Theils der Hydraulik, welcher vom Gleichgewichte der Flüssigkeiten handelt (Hydrostatik), höchstens der unvollkommenen Flüssigkeit wegen und mit Rücksicht auf den abweichenden Zustand der Oberflächenschicht zuweilen einer Correction bedürfen.

Die Gesetze der Hydraulik gelten ihrer allgemeinen Form nach, d. h. abgesehen von verschiedenen Formen und Werthen gewisser darin vorkommender einzelner Functionen und Coefficienten, theils allgemein für alle Arten von Flüssigkeiten, theils ist es nöthig oder zweckmässig, schon bei ihrer Entwickelung zwischen tropfbaren und luftförmigen Flüssigkeiten, in Betreff der letzteren zwischen Gasen und Dämpfen zu unterscheiden. Wenn dabei im Folgenden des einfacheren Ausdruckes wegen vom allgemeinen Verhalten des Wassers oder der Luft die Rede sein wird, so gilt ersteres als Repräsentant irgend einer homogenen tropfbaren Flüssigkeit oder eines gleichförmigen Gemisches von solchen, die Luft als Repräsentant irgend eines Gases oder gleichförmigen Gasgemisches. Nur den für Wasser oder für atmosphärische Luft anzuführenden Zahlenwerthen der betreffenden Erfahrungscoefficienten ist nicht ohne Weiteres eine allgemeinere Bedeutung beizulegen.

A. Gleichgewicht der Flüssigkeiten.

(Hydrostatik.)

§. 53. Allgemeine Gesetze; Niveauflächen.

Für ein rechtwinkeliges Axensystem, gegen welches die Flüssigkeit in relativer Ruhe ist, seien x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes der Flüssigkeit, und in demselben

X, Y, Z die Componenten der beschleunigenden (auf die Masseneinheit bezogenen) Massenkraft,

p die Pressung,

μ die specifische Masse.

Diese Grössen, welche in §. 5 Functionen von x, y, z und der Zeit t waren, sind hier nur von den Coordinaten abhängig, sofern sie überhaupt veränderlich sind. In den allgemeinen Gleichungen (6) jenes §. 5 sind ferner die Geschwindigkeitscomponenten u, v, w hier = Null, und ergiebt sich somit

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu Z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

und das vollständige Differential von p:

$$dp = \mu(X dx + Y dy + Z dz) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2),$$

woraus folgt, dass die rechte Seite dieser Gleichung das vollständige Differential einer gewissen Function $F(x, y, z)$ der Coordinaten ist, dass also μ eine solche Function von x, y, z sein muss, welche den Bedingungen entspricht:

$$\frac{\partial(\mu Y)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu Z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial(\mu Z)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu X)}{\partial z}, \quad \frac{\partial(\mu X)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Y)}{\partial x} \quad \ldots (3).$$

Ist je nach den Umständen des betreffenden Falles das Integral von Gl. (2)

$$p = F(x, y, z) + B \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

gefunden, wobei die Constante B durch die in einem gewissen Punkte gegebene Pressung bestimmt ist, so ist dadurch auch p für jeden anderen Punkt bestimmt sowie mit

$$\mu = \frac{1}{X}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{Y}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{Z}\frac{\partial F}{\partial z}$$

auch die Druckhöhe $\frac{p}{\gamma} = \frac{p}{\mu g}$. Insbesondere ergiebt sich aus Gl. (4 der an verschiedenen Stellen auf eine Gefässwand ausgeübte Druck, während umgekehrt, wenn z. B. für die freie Oberfläche einer tropfbaren Flüssigkeit $p =$ dem äusseren Druck gegeben ist, Gl. (4) die Gestalt dieser Oberfläche bestimmt.

Niveaufläche heisst bei einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit jede so beschaffene Fläche, dass die resultirende Kraft $P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ in jedem ihrer Punkte normal zu derselben gerichtet ist. Werden also unter den in den Ausdrücken von X, Y, Z im Allgemeinen vorkommenden Coordinaten die laufenden Coordinaten einer solchen Fläche, unter dx, dy, dz ihre Differentiale verstanden, so ist

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

die gemeinschaftliche Differentialgleichung aller Niveauflächen, indem diese Gleichung ausdrückt, dass die Kraft P, deren Richtungscosinus proportional X, Y, Z sind, mit irgend einer Tangente im betreffenden Punkt der Fläche, deren Richtungscosinus proportional dx, dy, dz sind, einen rechten Winkel, nämlich einen Winkel bildet, dessen Cosinus $=$ Null ist. Mit Rücksicht auf Gl. (5) folgt aus Gl. (2), dass für alle Punkte einer Niveaufläche

$$dp = 0, \text{ also } p = Const.$$

ist, dass also die Niveauflächen auch als Flächen gleicher Pressung bezeichnet werden können (einerlei mit den am Schlusse von §. 4 besprochenen Flächen gleicher Spannung); diese Eigenschaft hätte auch zur Definition der Niveauflächen dienen können, indem damit aus Gl. (2) umgekehrt die Gl. (5), also die oben durch Definition festgestellte charakteristische Eigenschaft sich als Folgerung ergeben hätte.

Im Allgemeinen ist der Ausdruck auf der linken Seite von Gl. (5) kein vollständiges Differential, nach Gl. (2) aber ist μ ein Factor, welcher ihn dazu macht (integrirender Factor); das Integral von Gl. (5) oder die endliche Gleichung der Niveauflächen ist also

$$F(x, y, z) = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6,$$

unter $F(x, y, z)$ dieselbe Function verstanden wie in Gl. (4), deren Differential $= \mu(Xdx + Ydy + Zdz)$ ist, während C eine Constante bedeutet, deren Werth $= p - B$ sich von einer zur anderen Niveaufläche ändert.

Ist P die resultirende Kraft für einen Punkt A der Niveaufläche N, in welcher die Pressung $= p$ ist, $AA_1 = dn$ das Stück der Normalen im Punkte A dieser Fläche N, welches sich bis zur folgenden Niveaufläche

erstreckt, in welcher die Pressung $= p + dp$ ist, so ist nach Gl. (2), wenn der x-Axe die Richtung AA_1 gegeben wird, also

$$dx = dn,\ X = \pm P,\ Y = Z = 0$$

gesetzt wird,

$$dp = \pm \mu P . dn = \mu P . dn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

falls dp positiv ist. Es hat also P die Richtung AA_1, nach welcher p wächst. Für die verschiedenen Punkte A einer Niveaufläche N ist im Allgemeinen dn verschieden gross, nämlich umgekehrt proportional μP; sofern μP einen endlichen Werth hat, kann nicht $dn =$ Null sein, können also die Niveauflächen sich nicht schneiden.

Denkt man die Flüssigkeit von Linien durchzogen, welche die Niveauflächen rechtwinkelig durchschneiden und welche die Linien grösster Pressungsänderung genannt werden können, so ist die resultirende Kraft P in jedem Punkte der Flüssigkeit tangential an die betreffende Linie grösster Pressungsänderung gerichtet in dem Sinne, in welchem die Pressung wächst, und das Product aus dieser Kraft P und der specif. Masse μ ist umgekehrt proportional dem Bogenelement fraglicher Linie zwischen zwei Niveauflächen von constanter Pressungsdifferenz dp.

Ist bei einer im Gleichgewicht befindlichen tropfbaren Flüssigkeit der äussere Druck in allen Punkten der freien Oberfläche gleich, so ist diese selbst eine Niveaufläche; daher der Name dieser Flächen, indem jene freie Oberfläche im engeren Sinne das Niveau der Flüssigkeit genannt zu werden pflegt. —

Ist der Ausdruck auf der linken Seite von Gl. (5) ein vollständiges Differential, was voraussetzt, dass

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y},\ \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z},\ \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

ist, also etwa

$$X dx + Y dy + Z dz = d U,$$

unter U eine Function von x, y, z verstanden, welche in diesem Falle die Kraftfunction genannt wird, so geht Gl. (2) über in:

$$dp = \mu . d U \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und die endliche Gleichung der Niveauflächen wird:

$$U = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

unter c eine Constante verstanden, deren Werth sich von einer zur anderen Niveaufläche ändert. Aus Gl. (7) und (9) ergiebt sich

$$P = \frac{dU}{dn} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11$$

und ein entsprechender Ausdruck gilt allgemein für die Componente S der Kraft P nach einer beliebigen Richtung s; sind nämlich dx, dy, dz die Projectionen des Längenelementes ds dieser Richtung auf die Coordinatenaxen, so ist

$$S = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{dU}{ds} \quad . \quad 12.$$

wenn dU die Aenderung bedeutet, welche die Kraftfunction dadurch erfährt, dass statt der Coordinaten des betreffenden Punktes diejenigen eines anderen Punktes gesetzt werden, welcher von jenem nach der Richtung s um ds entfernt ist.

Weil $\mu . dU$ nach Gl. (9) ein vollständiges Differential ist, so muss μ eine Function der Function U, also auch mit U zugleich constant sein; in allen Punkten einer Niveaufläche ist somit im vorliegenden Falle nicht nur die Pressung, sondern auch die specif. Masse gleich gross. Wäre die Flüssigkeit ein continuirliches Gemisch (§. 3) von Flüssigkeiten verschiedener, durch ihre Pressung bestimmter Dichtigkeit, insbesondere von Flüssigkeiten gleicher Art, aber verschiedener Aggregatform, so müsste in allen Punkten einer Niveaufläche dasselbe Mischungsverhältniss y stattfinden. Der Wärmezustand eines solchen Gemisches an irgend einer Stelle ist durch p und y, der einer homogenen Flüssigkeit durch p und μ bestimmt; die Niveauflächen sind also in beiden Fällen auch Flächen gleichen Wärmezustandes. —

Ist μ constant, so kann die rechte Seite von Gl. (2) nur dadurch ein vollständiges Differential sein, dass schon der Factor $Xdx + Ydy + Zdz$ für sich ein solches ist. Eine gleichförmig dichte Flüssigkeit kann also überhaupt nur unter der Einwirkung solcher Massenkräfte im Gleichgewicht sein, für welche es eine Kraftfunction giebt. Dasselbe gilt von einem discontinuirlichen Gemisch von Flüssigkeiten verschiedener Art oder Aggregatform, für welche einzeln μ constant ist, und zwar sind dieselben im Gleichgewichtszustande nothwendig so geschichtet, dass je zwei benachbarte Schichten sich in einer Niveaufläche berühren. In diesen besonderen Niveauflächen ist zwar, wie immer, p constant, die specifische Masse μ aber unbestimmt, nämlich um Endliches verschieden, jenachdem man eine solche Fläche als Grenze der einen oder anderen von beiden angrenzenden Schichten betrachtet. Auch ist in solchem Falle zwischen stabilem und labilem Gleichgewichte zu unterscheiden, jenachdem eine unendlich kleine Störung desselben durch

die wirksamen Kräfte rückgängig gemacht oder vergrössert wird; die **Stabilität des Gleichgewichtes erfordert, dass im Sinne der Kraft P die Dichtigkeit der Schichten wächst.** Ist nämlich df ein Element der Grenzfläche N zweier Schichten, μ_1 die specif. Masse der einen, μ_2 die der anderen, und hat P die Richtung von der ersten zur zweiten dieser beiden Schichten, so werde in der ersten Schicht über df als Grundfläche ein unendlich kleines prismatisches Volumenelement $dV = df.dn$ von der Höhe dn abgegrenzt gedacht, für welches die Pressung, wenn sie in der Grundfläche df, d. h. in der Fläche $N = p$ ist, in der gegenüber liegenden Grundfläche $= p - dp$ zu setzen ist. Dann ist die resultirende Kraft dR, durch welche im Gleichgewichtszustande die das Volumenelement dV erfüllende Flüssigkeit gegen die Grundfläche N hin getrieben wird,

$$dR = df(\mu_1 P dn + p - dp - p) = df(\mu_1 P dn - dp) = 0.$$

Würde aber in Folge einer Störung des Gleichgewichtes das fragliche Volumenelement mit Flüssigkeit von der specif. Masse μ_2 erfüllt, so änderte sich dR um in

$$dR = df(\mu_2 P dn - dp)$$

oder mit dem aus obiger Gleichung folgenden Werth von $dp = \mu_1 P dn$ in

$$dR = df(\mu_2 - \mu_1) P dn.$$

Das Gleichgewicht ist stabil, wenn diese Kraft dR positiv, also $\mu_2 > \mu_1$ ist.

Uebrigens ist ersichtlich, dass diese Deduction nicht nothwendig an einen endlichen Werth der Differenz $(\mu_2 - \mu_1)$ gebunden ist, dass also **allgemein das Gleichgewicht einer Flüssigkeit nur dann stabil ist, wenn mit der Pressung zugleich auch die Dichtigkeit überall im Sinne von P zunimmt.** —

Schliesslich ist in Betreff der vorstehenden Gesetze ausdrücklich hervorzuheben, dass im Falle der Bewegung des Coordinatensystems, gegen welches die Flüssigkeit sich in relativer Ruhe befindet, die resultirende Kraft P pro Masseneinheit mit den Componenten X, Y, Z zugleich die erste **Ergänzungskraft der relativen Bewegung** (§. 2) in sich begreift; dieselbe ist entgegengesetzt der Beschleunigung des betreffenden Punktes, wenn er mit den Coordinataxen fest verbunden gedacht wird. Die zweite Ergänzungskraft der relativen Bewegung kommt hier nicht in Betracht, weil sie zugleich mit der relativen Geschwindigkeit verschwindet.

Die im Vorhergehenden vorausgesetzte relative Ruhe der Flüssigkeit gegen ein System von Coordinatenaxen erfordert auch relative Ruhe ihrer Massenelemente gegen einander, welche nur bei unveränderter Gestalt der

Flüssigkeitsoberfläche möglich ist. Ist also die Flüssigkeit in einem Gefässe enthalten, so kann sie gegen ein Coordinatensystem nur dann in Ruhe sein, wenn das Gefäss sich entweder selbst in relativer Ruhe gegen dasselbe befindet oder wenn trotz seiner Bewegung die Wand-Oberfläche der Flüssigkeit unverändert bleiben kann, wenn nämlich dieselbe eine Umdrehungsfläche ist, um deren gegen das Coordinatensystem relativ ruhende Axe das Gefäss rotirt; im Falle einer tropfbaren Flüssigkeit mit theilweise freier Oberfläche müsste diese ausserdem die Wand-Oberfläche in einem Parallelkreise schneiden. Indessen selbst bei diesen ganz speciellen Voraussetzungen in Betreff der Gestalt des Gefässes ist wegen des Einflusses, welchen bei relativer Bewegung an der Wandoberfläche die Reibung daselbst ausüben würde, ein vollkommenes Gleichgewicht der Flüssigkeit nur bei relativer Ruhe derselben gegen das Gefäss möglich, mit welchem deshalb im Folgenden, sofern es sich überhaupt um das Gleichgewicht einer in einem Gefässe befindlichen Flüssigkeit handelt, die Coordinatenaxen fest verbunden sein sollen. Wenn ausnahmsweise auch vom Gleichgewicht einer Flüssigkeit in einem Gefässe die Rede sein wird, welches gegen die Coordinatenaxen in Bewegung ist (z. B. des Wassers in einer Wasserradzelle), so ist darunter der Gleichgewichtszustand zu verstehen, welcher eintreten würde, wenn das Gefäss in seiner augenblicklichen relativen Lage festgehalten würde, gleichwohl aber die Kräfte, wie sie zum Theil von der Bewegung des Gefässes herrühren, unverändert fortwirkten, ein Zustand, welchem der wirkliche augenblickliche Zustand der Flüssigkeit nur mehr oder weniger nahe und zwar um so näher kommt, je langsamer das Gefäss sich bewegt und je geringer die durch seine Bewegung bedingte Gestaltsveränderung der Flüssigkeit ist.

Zur Möglichkeit eines vollkommenen Gleichgewichtes ist vor Allem erforderlich, dass die Kraftcomponenten X, Y, Z unabhängig von der Zeit sind. Ist dies, wie vorausgesetzt werden soll, hinsichtlich derjenigen Bestandtheile dieser Kraftcomponenten der Fall, welche von der Bewegung des mit den Axen fest verbundenen Gefässes unabhängig sind, so muss es auch in Betreff der übrigen der Fall sein, welche den Beschleunigungscomponenten des Gefässpunktes (x, y, z) entgegengesetzt gleich sind. Letztere sind ausser durch die Coordinaten x, y, z bestimmt durch die Componenten der Translationsbeschleunigung des Gefässes im Sinne der Axen, sowie durch die Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen um diese Axen. Diese Grössen müssen also constant, die Winkelbeschleunigungen insbesondere = Null sein; das Gefäss kann im Allgemeinen eine Translationsbewegung haben, deren Beschleunigung von

constanter Grösse und Richtung gegen das Gefäss ist, nebst einer Rotationsbewegung mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine im Gefässe feste Axe.

I. Gleichgewicht des Wassers.

§. 54. Voraussetzungen.

Die homogene tropfbare Flüssigkeit (resp. gleichförmige Mischung solcher Flüssigkeiten), als deren Repräsentant hier das Wasser betrachtet wird, befinde sich in einem Gefässe, dessen Dimensionen im Vergleich mit denen der Erde klein genug sind, um die beschleunigende Schwerkraft g in allen Punkten als gleich gross und gleich gerichtet voraussetzen zu dürfen. Die Schwerkraft g, wie sie nach Grösse und Richtung beobachtet wird, schliesst den Einfluss der Erdbewegung, an welcher das Gefäss als irdischer Körper Theil nimmt, schon in sich; einer Ergänzung wegen eigener Bewegung des Gefässes bedürfen also die Kraftcomponenten X, Y, Z nur insofern als diese Bewegung eine relative Bewegung gegen die Erde ist, welche deshalb schlechtweg als Bewegung des Gefässes bezeichnet wird entsprechend der schon in §. 2 getroffenen Bestimmung hinsichtlich der Bewegung irgend eines irdischen Körpers.

Der äussere Druck pro Flächeneinheit der freien Oberfläche des Wassers sei in allen Punkten derselben gleich gross $= p_0$; in der Regel besteht er im Druck der atmosphärischen Luft. Die freie Oberfläche ist hiernach stets eine Niveaufläche.

Die Stabilität des Gleichgewichtes ist an die Bedingung wachsender Dichtigkeit im Sinne der Pressungszunahme, also im Sinne der resultirenden Kraft $P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ gebunden. Die Dichtigkeit einer homogenen tropfbaren Flüssigkeit ist aber von ihrer Pressung in so geringem Grade abhängig, dass die Erfüllung jener Bedingung fast nur von der Temperaturvertheilung abhängt, welche z. B. speciell bei Wasser so beschaffen sein muss, dass im Sinne von P die Temperatur zu- oder abnimmt, jenachdem sie kleiner oder grösser ist, als 4°. Im Folgenden wird die Temperatur als so wenig veränderlich vorausgesetzt, dass die Dichtigkeit, also die specifische Masse μ ohne in Betracht kommenden Fehler als constant anzunehmen ist, wenigstens in allen Punkten, deren Entfernung von der Oberfläche nicht unmessbar klein ist. Durch den Einfluss der Molekularkräfte, welche zwischen den Molekülen des Wassers gegenseitig oder zwischen ihnen und denen einer festen Wand stattfinden, kann

nämlich die unmessbar dünne Oberflächenschicht des Wassers allerdings eine wesentlich kleinere oder grössere Dichtigkeit, wie die übrige Wassermasse besitzen, und es können dadurch sowie durch andere Abweichungen des inneren Zustandes jener Oberflächenschicht von dem der übrigen Masse die Erscheinungen des Gleichgewichtes besonders dann wesentlich modificirt werden, wenn das Gefäss sehr enge ist, wenn nämlich das Wasser zwischen sehr nahen festen Wänden, in einer engen Röhre u. s. f. sich befindet, für welchen Fall die durch die Molekularkräfte bedingten Gleichgewichtserscheinungen unter dem Namen der Capillarität (Haarröhrchen-Wirkungen von capillus, Haar) zusammengefasst werden.

Im Folgenden sind deshalb die beiden Fälle unterschieden, ob das Gleichgewicht ohne oder mit Rücksicht auf die Molekularkräfte an der Oberfläche untersucht werden soll; ausser denselben und event. einer Ergänzungskraft relativer Bewegung wird in allen Fällen nur die Schwerkraft als Massenkraft vorausgesetzt.

Was die Art der etwaigen Bewegung des Gefässes betrifft, welche nach der Bemerkung zu Ende des vorigen §. im Allgemeinen in einer Translationsbewegung mit constanter Beschleunigung nach einer im Gefässe festen Richtung und in einer Rotation mit constanter Winkelgeschwindigkeit um eine im Gefässe feste Axe bestehen könnte, so muss hier diese Axe beständig vertical bleiben, damit die Componenten einer beschleunigenden Schwerkraft g nach den im Gefässe festen Coordinatenaxen unabhängig von der Zeit seien.

a. Gleichgewicht des Wassers ohne Rücksicht auf Molekularkräfte.

§. 55. Niveauflächen und Druckhöhe in verschiedenen Fällen.

Die Coordinatenaxen seien zunächst fest verbunden mit dem Gefässe, die verticale z-Axe sei positiv in der Richtung nach oben, und es sei

1) das Gefäss in Ruhe, oder es habe eine geradlinige und gleichförmige Translationsbewegung. Die Ergänzungskraft der relativen Bewegung ist in diesem Falle = Null, also

$$X = Y = 0, \quad Z = -g$$

und die Differentialgleichung der Niveauflächen:

$$Xdx + Ydy + Zdz = -gdz = dV = 0,$$

ihre endliche Gleichung: $z = Const.$

Die Niveauflächen, insbesondere also die freie Oberfläche, sind horizontale Ebenen.

Für die Pressung p an irgend einer Stelle hat man nach §. 53, Gl. (2) oder Gl. (9)

$$dp = \mu(-g\,dz), \text{ also } p = -\mu g z + B.$$

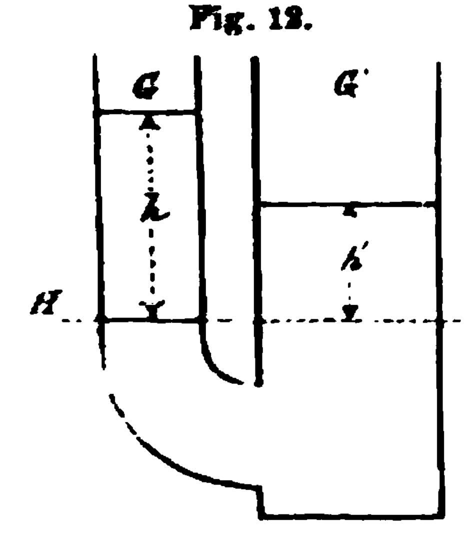
Ist h die Höhe der freien Oberfläche über dem Ursprung der Coordinaten, so ist $p_0 = -\mu g h + B$, also

$$p - p_0 = \mu g(h - z) \text{ oder } \frac{p - p_0}{\gamma} = h - z \;\; \ldots\ldots\ldots (1).$$

Die Grösse $\frac{p - p_0}{\gamma}$, d. i. der Ueberschuss der Druckhöhe in einem gewissen Punkte über dieselbe an der freien Oberfläche heisse die Ueberdruckhöhe in jenem Punkte; nach Gl. (1) ist sie = der Tiefe dieses Punktes unter der freien Oberfläche.

Das Gesetz der Gleichheit des Druckes in allen Punkten einer horizontalen Ebene, welches unter der zu Grunde liegenden Voraussetzung gleichförmigen äusseren Druckes auf die freie Oberfläche auch unmittelbar diese als eine horizontale Ebene kennzeichnet, ist von der Gestalt des Gefässes unabhängig und gilt insbesondere auch für communicirende Gefässe, d. h. für Gefässe, welche in Folge ihrer Verbindung zusammen auch als ein Gefäss betrachtet werden können, dessen Theile (Schenkel) von denselben Horizontalebenen in getrennten Flächen geschnitten werden; in communicirenden Gefässen steht das Wasser gleich hoch, falls der Druck auf die freie Oberfläche in ihnen gleich gross ist. Gemäss der Art und Weise, wie das Gesetz durch Integration einer Differentialgleichung hervorgegangen ist, entsprechend dem stetigen Uebergange von einem zum anderen Elemente derselben Flüssigkeit, ist es aber wesentlich an die Bedingung geknüpft, dass man von irgend einem Punkte der Flüssigkeit zu jedem anderen in derselben Horizontalebene gelegenen Punkte derselben durch eine stetige Folge von Flüssigkeitselementen gleicher specifischer Masse μ hindurch gelangen könne, und es erfährt deshalb das Gesetz eine Einschränkung, wenn verschieden dichte Flüssigkeiten F und F' (specif. Massen $= \mu$ und μ'), welche sich nicht mischen, in communicirenden Gefässen G und G' im Gleichgewichte sind. Sie berühren sich in einer horizontalen Grenzfläche H, welche im Gefässe G oberhalb der Stelle liegen mag, wo beide in Verbindung sind (Fig. 12), und zwar befinde sich die Flüssigkeit F im Gefässe G oberhalb der Grenzfläche, so dass die andere Flüssigkeit F' sich im unteren Theile von G und zugleich in G' befindet; für den Fall des stabilen

Fig. 12.



Gleichgewichtes setzt diese Annahme voraus, dass F' die dichtere Flüssigkeit, also $\mu' > \mu$ ist. Oberhalb der Horizontalebene H findet sich nun die fragliche Bedingung für die Gleichheit des Drucks in gleich hoch gelegenen Punkten beider Gefässe nicht mehr erfüllt; insbesondere haben somit auch die freien Oberflächen der Flüssigkeiten F und F' verschiedene Höhen h und h' über der Ebene H, welche, da in dieser Ebene selbst das Gesetz der Gleichheit des Druckes eben noch stattfindet, nach Gl. (1) in der Beziehung stehen:

$$p_0 + \mu g h = p_0 + \mu' g h', \text{ also } \mu h = \mu' h';$$

d. h. die Höhen verschieden dichter Flüssigkeiten in communicirenden Gefässen, von ihrer horizontalen Berührungsfläche aus gerechnet, sind ihren Dichtigkeiten umgekehrt proportional.

2) Ist das Gefäss in Bewegung, so kann es im Allgemeinen mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um die verticale z-Axe rotiren und zugleich eine Translationsbewegung haben, deren Beschleunigung von constanter Grösse und Richtung im Gefässe ist. Die Axen der x und der y können dabei so angenommen werden, dass die Componenten dieser Beschleunigung nach den Axen der x, y, z beziehungsweise $= ag$, 0 und $-cg$ sind, unter a und c positive Constante verstanden, und da der Rotation die Beschleunigungscomponenten $-\omega^2 x$ und $-\omega^2 y$ im Punkte x, y, z nach den Axen der x und der y entsprechen, so hat man

$$X = -ag + \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g + cg$$

und die Differentialgleichung der Niveauflächen:

$$(-ag + \omega^2 x) dx + \omega^2 y dy - (1 + c) g dz = 0 \quad \ldots\ldots\ (2)$$

oder mit $x = \frac{ag}{\omega^2} + x_1$

$$\omega^2 (x_1 dx_1 + y dy) - (1 + c) g dz = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$x_1^2 + y^2 = \left(x - \frac{ag}{\omega^2}\right)^2 + y^2 = 2\frac{(1+c)g}{\omega^2}(z - C) \quad \ldots\ldots\ (3)$$

Die Niveauflächen sind also congruente Umdrehungsparaboloide mit dem Parameter $2\frac{(1+c)g}{\omega^2}$, deren gemeinschaftliche Axe in der xz-Ebene mit der z-Axe im Abstande $\frac{ag}{\omega^2}$ parallel ist

während ihre Scheitel in verschiedenen Höhen C über der xy-Ebene liegen. Insbesondere ist Gl. (3) die Gleichung der freien Oberfläche, wenn C so bestimmt wird, dass das Volumen, welches das betreffende Paraboloid vom Gefässraume abschneidet, dem gegebenen Wasservolumen gleich ist.

Was die Pressung betrifft, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu Z = -\mu g(1 + c)$$

$$p = -\mu g(1 \pm c)z + f(x, y)$$

und wenn h die z-Coordinate des Punktes der freien Oberfläche ist, welcher vertical über dem Punkte x, y, z liegt,

$$p_0 = -\mu g(1 \pm c)\,h + f(x, y).$$

Somit ist

$$\frac{p - p_0}{\mu g} = \frac{p - p_0}{\gamma} = (1 \pm c)\,(h - z) \;\ldots\ldots\ldots \;(4).$$

Die Ueberdruckhöhe in irgend einem Punkte ist also seinem Verticalabstande von der freien Oberfläche proportional, und zwar derselben gleich, wenn das Gefäss ohne Verticalbeschleunigung ist. Die Bestimmung der Pressung in allen Punkten ist hierdurch auf die Bestimmung der freien Oberfläche zurückgeführt, was bei gegebener Gestalt und bei gegebenem Wasserinhalte des Gefässes eine rein geometrische Aufgabe ist.

Hat das Gefäss nur Translationsbewegung, so wird mit $\omega = 0$ die Gleichung (3) unbrauchbar; das Integral von Gl. (2) ist aber jetzt

$$z = -\frac{a}{1 \pm c}\,x + C \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(5).$$

Die Niveauflächen sind parallele Ebenen, welche die xz-Ebene rechtwinkelig schneiden in Geraden, die mit der x-Axe den Winkel

$$\varphi = arctg.\left(\frac{-a}{1 \pm c}\right)$$

bilden; diese Ebenen sind horizontal wie im Falle unter 1), wenn $a = 0$ ist, also das Gefäss nur Verticalbeschleunigung hat. Wäre aber letztere $= -g$, dem freien Fall des Gefässes vermöge seiner eigenen Schwere entsprechend, so wäre

$$z = \frac{0}{0}\,x + C$$

unbestimmt; in der That wäre dann die resultirende Kraft $P = Z = 0$ und die Flüssigkeit bei jeder Lage im Gefässe in relativer Ruhe gegen dasselbe.

Von grösserem Interesse ist der Specialfall, dass das Gefäss nur um die z-Axe rotirt. Die Gleichung der Niveauflächen ist dann

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - C).$$

Die innere Wandfläche des Gefässes sei ein Kreis-Cylinder mit der Rotationsaxe als geometrischer Axe und dem Halbmesser r. Ist dann (Fig. 13)

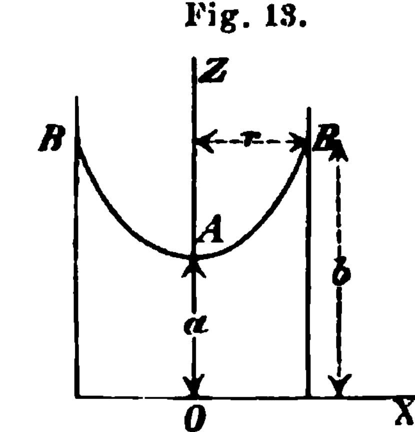


Fig. 13.

a die Höhe des Scheitelpunktes A, b die Höhe des Randes BB der freien Oberfläche über der xy-Ebene, so ist ihre Gleichung:

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{\omega^2}(z - a) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6.$$

Zur Bestimmung von a und b kann man bemerken, dass das Volumen, welches von dem Umdrehungsparaboloid Gl. (6) und der Ebene $z = b$ begrenzt wird,* $= \frac{1}{2}\pi r^2(b - a) =$ der Hälfte des Cylinders zwischen den Ebenen $z = a$ und $z = b$, also auch $=$ dem Wasserinhalt des Gefässes oberhalb der Ebene $z = a$ ist; der letztere ist aber $= \pi r^2(h - a)$, wenn h die Wasserstandshöhe über O bei ruhendem Gefässe ist. Aus der Gleichung

$$\frac{1}{2}\pi r^2(b - a) = \pi r^2(h - a) \text{ folgt } b + a = 2h,$$

und da nach Gl. (6) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $b - a = \dfrac{r^2\omega^2}{2g}$

ist, so folgt, wenn die Peripheriegeschwindigkeit $r\omega = u$ gesetzt wird,

$$a = h - \frac{u^2}{4g}, \quad b = h + \frac{u^2}{4g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7.$$

Durch die Rotation des Anfangs ruhenden Gefässes wird die Wasseroberfläche am Rande ebenso viel gehoben wie sie in der Mitte niedergedrückt wird.

* Ist für ein Umdrehungsparaboloid y der Halbmesser des Parallelkreises im Abstande x vom Scheitel, r der Halbmesser der Grundfläche, h die Höhe, also $y = r$ für $x = h$, so ist das Volumen

$$= \int_0^h \pi y^2 dx = \frac{\pi r^2}{h}\int_0^h x dx = \frac{1}{2}\pi r^2 h.$$

Wäre aber das cylindrische Gefäss oben durch einen horizontalen ebenen Deckel in der Höhe H ($h < H < b$) über der xy-Ebene geschlossen, oder auch nur mit einem nach innen so weit vortretenden ebenen Rande versehen, dass dadurch die Erhebung des Wassers über die Höhe $z = H$ verhindert wird, so hat man für das Volumen, welches von der freien Oberfläche Gl. (6) und der Deckelebene $z = H$ begrenzt wird, falls ϱ den Halbmesser des Durchschnittskreises zwischen diesen beiden Flächen bedeutet, die Gleichung

$$\frac{1}{2}\pi\varrho^2(H-a) = \pi r^2(H-h).$$

Wenn darin nach Gl. (6)

$$\varrho^2 = \frac{2g}{\omega^2}(H-a)$$

gesetzt wird, ergiebt sich:

$$\frac{g}{\omega^2}(H-a)^2 = r^2(H-h); \quad a = H - u\sqrt{\frac{H-h}{g}} \quad \ldots\ldots (8).$$

Die Ueberdruckhöhe in der (positiven oder negativen) Tiefe α unter dem Scheitelpunkte A der Oberfläche und in der Entfernung β von der Rotationsaxe des Gefässes ist mit Rücksicht auf Gl. (6) und das allgemeine Gesetz Gl. (4)

$$= \alpha + \frac{\omega^2}{2g}\beta^2$$

und die Pressung
$$p = p_0 + \gamma\left(\alpha + \frac{\beta^2\omega^2}{2g}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

unabhängig von der Gestalt des Gefässes und von dem Umstande, ob die Erhebung des Wassers am Rande durch einen Gefässdeckel beschränkt wird oder nicht; was bei solcher Beschränkung an Wasserstandshöhe fehlt, wird durch den Druck des Deckels ersetzt.

3) Das Gefäss rotire um eine horizontale Axe, etwa um die y-Axe von fester Lage gegen das Gefäss und im Raume (gegen die Erde); die z-Axe sei nach wie vor vertical und positiv in der Richtung nach oben, also ebenso wie die x-Axe fest im Raume, aber nicht gegen das Gefäss. Hiermit liegt ein Fall vor, in welchem es sich nach der zu Ende von §. 53 gemachten Bemerkung nicht sowohl um einen wirklich stattfindenden, als vielmehr um den gedachten Gleichgewichtszustand handelt, welcher eintreten würde, wenn das Gefäss in seiner augenblicklichen Lage gegen die Axen verharrte, gleichwohl aber die von der Bewegung des Gefässes her-

rührende Ergänzungskraft fortwirkte. Der wirkliche Zustand kann indessen jenem gedachten Gleichgewichtszustande ziemlich nahe kommen, indem im Wesentlichen nur die relativen Bewegungen der Wassertheilchen zunächst der freien Oberfläche sind, welche die stetige Aenderung der relativen Lage dieser Oberfläche gegen das Gefäss bei dessen Bewegung vermitteln; die Aufgabe ist von technischem Interesse z. B. zur angenäherten Bestimmung des Ortes, wo das Wasser aus den Zellen eines um eine horizontale Axe rotirenden Wasserrades auszufliessen anfängt. Es ist hier

$$X = \omega^2 x, \quad Y = 0, \quad Z = \omega^2 z - g,$$

also die Differentialgleichung der Niveauflächen:

$$\omega^2 x dx + (\omega^2 z - g) dz = 0$$

und ihre endliche Gleichung:

$$\omega^2 \frac{x^2 + z^2}{2} - gz = Const. \text{ oder } x^2 + z^2 - 2\frac{g}{\omega^2} z = Const.$$

oder auch $$x^2 + \left(z - \frac{g}{\omega^2}\right)^2 = Const. = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Die Niveauflächen sind also concentrische Kreiscylinder, deren Axe parallel der Rotationsaxe des Gefässes in der Höhe $\frac{g}{\omega^2}$ vertical darüber liegt. Insbesondere für die freie Oberfläche ist a = dem Halbmesser desjenigen dieser Kreiscylinder, welcher von dem Gefässe ein Volumen = seinem Wasserinhalte abschneidet; wenn dieser Kreiscylinder im Falle der Wasserradzelle nur eben noch dessen vordere und das Wasser tragende Schaufel in seiner äusseren Kante trifft, beginnt der Ausfluss des Wassers aus der Zelle.

§. 56. Hydrostatischer Druck auf ausgedehnte Flächen.

Der Druck, welchen das im Gleichgewicht befindliche Wasser auf irgend eine Fläche ausübt, der sogenannte hydrostatische Druck auf dieselbe, ist bestimmt durch die nach dem vorigen §. bekannten Pressungen, welche in den verschiedenen Punkten der Fläche stattfinden. Von grösserem Interesse ist hierbei nur der im vorigen §. unter 1) betrachtete Fall, dass das Gefäss in Ruhe ist oder eine geradlinige und gleichförmige Translationsbewegung hat, dass also die freie Wasseroberfläche eine horizontale Ebene und die Ueberdruckhöhe für irgend einen Punkt = dessen Tiefe unter dieser Ebene, die Druckhöhe für denselben = seiner Tiefe unter einer um $\frac{p_0}{\gamma}$ höher

gelegenen horizontalen Ebene ist. Beiderlei Tiefen sollen im Folgenden mit z bezeichnet und Druckhöhen genannt werden; der kurzweg so genannte Druck bedeutet dann den Ueberdruck oder den Gesammtdruck, jenachdem z von der wirklichen freien Wasseroberfläche oder von jener um $\frac{p_0}{\gamma}$ höher gelegenen Ebene aus gerechnet wird. Gewöhnlich kommt nur der Ueberdruck in Betracht, weil die gedrückte Fläche dem gleichförmig vertheilten Druck p_0 (meistens dem Atmosphärendruck) von beiden Seiten ausgesetzt zu sein pflegt. Unter diesen Voraussetzungen sei

a) die gedrückte Fläche F eben, so dass die Pressungen auf die verschiedenen Flächenelemente dF gleich gerichtet sind und sich zu einer Resultanten = ihrer Summe zusammensetzen lassen. Gemäss der Bedeutung der Druckhöhe z für das Flächenelement dF ist der Druck auf dasselbe $=\gamma z dF$, also der Druck P auf die ganze Fläche F, wenn z_0 die Tiefe des Schwerpunktes S_0 von F unter der freien Wasseroberfläche (der wirklichen oder der um $\frac{p_0}{\gamma}$ erhöht gedachten) ist,

$$P = \int \gamma z dF = \gamma F z_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

= dem Gewicht einer Wassersäule von der Basis F und der Höhe z_0.

Zur Bestimmung des Punktes S_1, in welchem die Richtungslinie von P die Fläche F trifft, des sogenannten Mittelpunktes des Drucks, werde diese Fläche, welche unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt sei, auf ein rechtwinkeliges Axensystem der x und y in ihr bezogen so, dass die y-Axe in ihrem Schnitt mit der freien Wasseroberfläche, d. h. mit der Ebene liegt, von welcher aus die Tiefe z gerechnet wird, die x-Axe folglich (positiv abwärts) eine Neigungslinie von F ist. Sind dann x und y, x_0 und y_0, x_1 und y_1 beziehungsweise die Coordinaten des Flächenelementes dF, des Schwerpunktes S_0 und des Punktes S_1, so ist

$$x_1 = \frac{1}{P}\int \gamma z dF . x = \frac{\int xz dF}{F z_0}; \quad y_1 = \frac{1}{P}\int \gamma z dF . y = \frac{\int yz dF}{F z_0}$$

oder wegen $\frac{z}{x} = \frac{z_0}{x_0} = \sin\alpha$, also $\frac{z}{z_0} = \frac{x}{x_0}$

$$x_1 = \frac{\int x^2 dF}{F x_0}; \quad y_1 = \frac{\int xy dF}{F x_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ist Fk^2 das Trägheitsmoment von F für die mit der y-Axe parallele Gerade durch S_0, d. h. die Summe der Producte der Flächenelemente dF und der Quadrate ihrer Abstände ξ von jener Geraden, so ist

$$\int x^2 dF = \int (x_0 + \xi)^2 dF = F(x_0^2 + k^2),$$

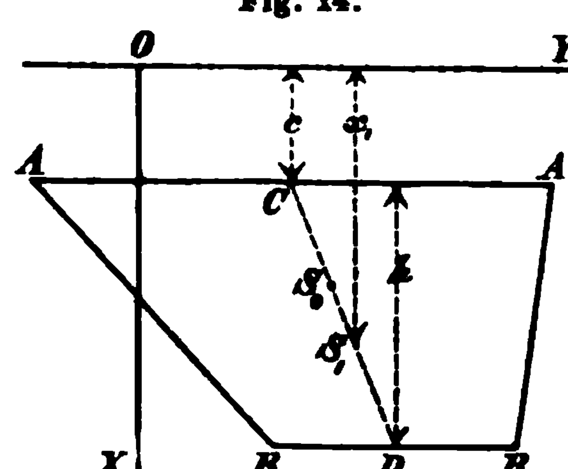
also auch

$$x_1 = \frac{x_0^2 + k^2}{x_0} = x_0 + \frac{k^2}{x_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.$$

Ist die x-Axe Symmetrieaxe von F, so ist $\int xy\,dF = 0$, also $y_1 = 0$; sie enthält dann die Punkte S_0 und S_1. Von besonderen Fällen sind folgende bemerkenswerth.

1) Die gedrückte Fläche ist ein Trapez (Fig. 14), dessen parallele Seiten $AA = a$ und $BB = b$ in den Abständen $= c$ und $c + h$ mit der y-Axe parallel sind. Die Grösse des Drucks ergiebt sich aus

Fig. 14.



$$\left.\begin{aligned} P &= \gamma F z_0 = \gamma F x_0 \sin \alpha \ \ldots\ldots\ldots \\ \text{mit } F &= \frac{h}{2}(a + b) \text{ und } x_0 = c + \frac{h}{3}\frac{a + 2b}{a + b} \end{aligned}\right\} \ 4.$$

Der Druckmittelpunkt S_1 liegt mit dem Schwerpunkte S_0 in der Mittellinie CD, ist also durch seinen Abstand x_1 von der y-Axe bestimmt. Setzt man

$$x_1 = c + \xi_1,$$

so ist, wenn dF einen mit den Seiten AA und BB parallelen unendlich schmalen Flächenstreifen des Trapezes im Abstande ξ von AA bedeutet,

$$\xi_1 = \frac{\int \gamma z\,dF.\,\xi}{\gamma F z_0} = \frac{\int x \xi\,dF}{F x_0} = \frac{\int_0^h (c + \xi)\,\xi \left[a - \frac{\xi}{h}(a - b)\right] d\xi}{\frac{h}{2}(a + b)\left(c + \frac{h}{3}\frac{a + 2b}{a + b}\right)}.$$

Durch Ausführung der Integration und durch eine leichte Umformung des Ausdrucks findet man:

$$x_1 = c + \frac{h}{2}\,\frac{2c(a + 2b) + h(a + 3b)}{3c(a + b) + h(a + 2b)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5.$$

Liegt die Seite AA in der y-Axe, so ist $c = 0$, also

$$x_1 = \frac{h}{2}\,\frac{a + 3b}{a + 2b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6,$$

insbesondere mit $b = 0$, also für den Fall eines Dreiecks von der Höhe h, dessen Grundlinie in der y-Axe liegt, wäre $x_1 = \frac{h}{2}$.

Für den Fall eines **Parallelogramms** mit zwei horizontalen Seiten in den Abständen c und $c+h=d$ von der y-Axe ergiebt sich aus Gl. (5) mit $s=b$:

$$x_1 = c + \frac{h}{3}\frac{3c+2h}{2c+h} = c + \frac{h}{3}\frac{c+2d}{c+d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

oder auch mit $h = d - c$:

$$x_1 = \frac{2}{3}\frac{c^2+cd+d^2}{c+d} = \frac{2}{3}\frac{d^3-c^3}{d^2-c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Ist die gedrückte Fläche ein **Rechteck** von der Breite $AA = BB = b$ und der Höhe $AB = h$, dessen Seite AA in der (wirklichen) freien Wasseroberfläche liegt, so bietet sich bei gewissen technischen Problemen die Aufgabe dar, dieses Rechteck durch horizontale Gerade A_1A_1, A_2A_2 ... in den Abständen a_1, a_2 ... von AA so in n Theile zu zerlegen, dass jeder Theil AAA_1A_1, $A_1A_1A_2A_2$ .. denselben Ueberdruck

$$\frac{1}{n}P = \frac{1}{n}\gamma\, bh \,.\, \frac{h}{2}\sin\alpha = \frac{1}{n}\gamma\frac{bh^2}{2}\sin\alpha$$

auszuhalten hat, und die Mittelpunkte S_1, S_2 ... dieser Pressungen durch ihre Abstände $= x_1$, x_2 ... von AA zu bestimmen; wenn z. B. die rechteckige Fläche durch n horizontale Träger so unterstützt werden soll, dass dieselben bei gleichen Dimensionen alle gleich angestrengt werden, so sind sie in gleichen Höhen mit diesen Punkten S_1, S_2 ... anzuordnen. Aus der Bedingung, dass der Ueberdruck auf die Fläche

$$AAA_1A_1 \qquad AAA_2A_2 \ldots$$

$$\text{beziehungsweise} = \frac{1}{n}P \qquad \frac{2}{n}P \ldots$$

sein soll, ergiebt sich $a_1^2 = \frac{1}{n}h^2 \qquad a_2^2 = \frac{2}{n}h^2 \ldots$

$$\text{also } a_1 = \sqrt{h \,.\, \frac{1}{n}h} \qquad a_2 = \sqrt{h \,.\, \frac{2}{n}h} \quad \ldots\ldots\ldots (9),$$

wonach diese Längen a_1, a_2 ... leicht durch Construction gefunden werden können in den von A aus gezogenen Sehnen eines über $AB = h$ als Durchmesser beschriebenen Halbkreises, deren Projectionen auf AB beziehungsweise $= \frac{1}{n}h$, $\frac{2}{n}h$ ... sind. Nach Gl. (8) und mit Rücksicht auf Gl. (9) liegt dann der Mittelpunkt des Ueberdrucks für den i^{ten} Flächentheil in der Entfernung

$$x_i = \frac{2}{3} h \frac{i^{\frac{3}{2}} - (i-1)^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

von der Seite AA des Rechtecks.

2) Die gedrückte Fläche ist eine **Ellipse**, deren eine Hauptaxe $= 2a$ in der x-Axe liegt, während die andere $= 2b$ im Abstande c mit der y-Axe parallel ist. In diesem Falle ist

$$F = \pi ab; \quad x_0 = c; \quad Fk^2 = \frac{\pi a^3 b}{4}, \text{ also } k^2 = \frac{a^2}{4}$$

und somit nach Gl. (1) und (3)

$$P = \gamma \pi abc \sin \alpha; \quad x_1 = c + \frac{1}{4} \frac{a^2}{c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

b) Bei einer **beliebigen, im Allgemeinen krummen Fläche** lassen sich die Elementardrucke auf die Flächenelemente im Allgemeinen nicht zu einer Resultanten zusammensetzen, und es ist deshalb hier nur von dem **Druck nach einer gewissen Richtung** AB = der Resultanten der nach dieser Richtung genommenen Elementardrucke die Rede. Wenn dann die gedrückte Fläche, wie es im Allgemeinen der Fall sein kann, von gewissen mit AB parallelen Geraden in mehr als je einem Punkte geschnitten wird, so werde sie zunächst in solche Theile zerlegt, welche von jeder mit AB parallelen Geraden nur einmal geschnitten werden, für welche also die Richtungen der Elementardrucke nur spitze Winkel mit der Richtung AB oder BA bilden, und der Druck $= P$ nach der Richtung AB oder BA auf jeden solchen Flächentheil $= F$ berechnet, wonach für die ganze Fläche der resultirende Druck nach AB in der algebraischen Summe dieser Werthe P erhalten wird. Ist nun z die Tiefe des Flächenelementes dF unter der freien Wasseroberfläche (d. h. der wirklichen oder der um $\frac{p_0}{\gamma}$ erhöht gedachten freien Wasseroberfläche, je nachdem der Druck als Ueberdruck oder als Gesammtdruck verstanden wird), α der spitze Winkel, welchen die Normale von F an der Stelle des Elementes dF mit der Geraden AB oder BA bildet, und pdF der Normaldruck auf dF, so ist

$$P = \int pdF . \cos \alpha = \int pdF' = \gamma \int z dF' \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

wobei dF' die Projection von dF in einer zu AB senkrechten Ebene bedeutet und die Integration über das ganze Flächenstück F auszudehnen ist, welches der oben genannten Voraussetzung entspricht. Ist

1) **die Druckrichtung** AB **horizontal**, so ist $\gamma z dF'$ = dem Druck

auf das Element dF' der verticalen Projectionsebene, wo sie auch normal zu AB angenommen werden mag; es stimmt also P bezüglich auf Grösse und Richtungslinie mit dem Druck auf die Projection F' der Fläche F in einer beliebigen zu AB senkrechten Ebene überein.

2) Ist die Druckrichtung AB vertical, so ist $\gamma z dF'$ = dem Gewicht eines verticalen Wasserfadens zwischen dF und der freien Wasseroberfläche; es stimmt also P bezüglich auf Grösse und Richtungslinie mit der Schwerkraft der Wassermasse überein, welche durch die Fläche F, durch eine verticale Cylinderfläche und durch die Ebene der freien Wasseroberfläche begrenzt wird.

3) Sind die Verticalprojectionen aller Dimensionen von F sehr klein im Vergleich mit der Druckhöhe, so dass ohne wesentlichen Fehler der specifische Druck p constant gesetzt werden kann, so ist

$$P = \int p\, dF' = pF'$$

= dem Druck auf die Projection F' von F in einer zur Druckrichtung senkrechten Projectionsebene; wegen gleichförmiger Vertheilung dieses Drucks in der Projection F' geht die Richtungslinie von P durch den Schwerpunkt derselben. —

Wenn ein fester Körper in Wasser ganz oder theilweise eingetaucht ist, so ergiebt sich leicht aus den vorstehend unter 1) und 2) angeführten Gesetzen, dass der resultirende Ueberdruck des Wassers auf diesen Körper nach jeder horizontalen Richtung = Null, nach verticaler Richtung aber gleich und entgegengesetzt der Schwerkraft des verdrängten Wassers, d. h. desjenigen Wassers ist, welches sich an der Stelle des festen Körpers resp. seines eingetauchten Theiles mit dem übrigen Wasser im Gleichgewicht befinden würde. Dieser verticale Ueberdruck pflegt der Auftrieb des Wassers, und das Gesetz, nach welchem derselbe mit der Schwerkraft des verdrängten Wassers einerlei Grösse und Richtungslinie, aber entgegengesetzte Richtung hat, das Archimedische Princip genannt zu werden. Dasselbe ergiebt sich auch aus der einfachen Erwägung, dass der Druck auf die eingetauchte Oberfläche des festen Körpers dem Druck auf das an derselben Stelle im Gleichgewicht befindliche Wasser in jeder Hinsicht gleich sein muss, weil die Erstarrung dieses Wassers keine Aenderung des Gleichgewichtes des übrigen Wassers, also auch nicht des von ihm ausgeübten Drucks verursachen kann. Dieselbe Erwägung lässt erkennen, dass das Archimedische Princip auch dann noch gültig bleibt, wenn die Flüssigkeit aus ungleich dichten Schichten besteht, falls nur die verdrängte Flüssigkeit, deren Schwerkraft der Auftrieb entgegengesetzt

gleich ist, in derselben Weise ungleichförmig dicht gedacht wird, wie sie es sein würde, wenn sie an der Stelle des eingetauchten Körpers oder Körpertheiles mit der übrigen Flüssigkeit im Gleichgewicht wäre.

§. 57. Gleichgewicht schwimmender Körper.

Man sagt von einem festen Körper, er schwimme in oder auf dem Wasser, wenn er, ganz oder theilweise in dasselbe eingetaucht, dauernd frei beweglich ist, insoweit nicht das Wasser selbst seine Beweglichkeit beschränkt. Dieses befinde sich in einem ruhenden oder geradlinig und gleichförmig bewegten Gefässe, also mit horizontaler freier Oberfläche, im Gleichgewicht; γ sei sein specif. Gewicht und V das vom Körper verdrängte Wasservolumen. Dem vorigen §. zufolge erfährt dann der Körper durch das Wasser einen vertical aufwärts gerichteten Druck $P = \gamma V$, den sogenannten Auftrieb, dessen Richtungslinie durch den Schwerpunkt A des Volumens V geht, mit welchem nämlich der Schwerpunkt des verdrängten Wassers wegen dessen gleichförmiger Dichtigkeit zusammenfällt. Der Auftrieb P ist nur das Resultat des sogenannten Ueberdrucks des Wassers auf den festen Körper; erfährt das Wasser an seiner freien Oberfläche von einem angrenzenden Medium, z. B. von der atmosphärischen Luft, den specifischen Druck p_0, so wird derselbe auch auf den vom Wasser berührten Theil der Körperoberfläche mit gleicher Grösse übertragen, während bei nur theilweiser Eintauchung des Körpers der nicht vom Wasser berührte Theil seiner Oberfläche jenem Druck des fraglichen Mediums direct ausgesetzt ist. Ist aber derselbe auch hier gleichförmig und $= p_0$ pro Flächeneinheit, so ist der entsprechende Gesammtdruck auf den Körper (gemäss dem Gesetz unter 3) zu Ende des vorigen §.) nach jeder Richtung = Null; ist er es nicht (wie es z. B. in Betreff des Luftdrucks, welcher wegen der eigenen Schwere der Luft nach oben etwas abnimmt, in der That nicht genau der Fall ist), so soll der Gesammtdruck des fraglichen Mediums, welcher nach dem auch auf luftförmige Flüssigkeiten anwendbaren Archimedischen Princip ermittelt werden kann, als Bestandtheil des Körpergewichts in Rechnung gebracht hier vorausgesetzt werden. Mit dieser eventuellen (meist unnöthigen) Correction sei Q das Gewicht des Körpers, B sein Schwerpunkt, in welchem also Q als vertical abwärts gerichtete Kraft angreifend zu denken ist.

Unter der Voraussetzung, dass P und Q die einzigen Kräfte sind, welche auf den schwimmenden Körper wirken, sollen seine Gleich-

gewichtslagen bestimmt und die Kennzeichen dafür ermittelt werden, dass das Gleichgewicht sicher oder unsicher (stabil oder labil) ist, d. h. der Körper, wenn er unendlich wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt und der Wirkung jener Kräfte frei überlassen worden ist, in jene Lage zurückgetrieben oder noch weiter daraus entfernt wird.

Bei jeder Gleichgewichtslage muss $P = \gamma V = Q$ und die Gerade AB vertical sein. Ist also zunächst der Körper ganz eingetaucht, schwimmt er im Wasser, so bedeutet V sein ganzes Volumen (sein äusseres Volumen mit Rücksicht auf etwa eingeschlossene Hohlräume), und kann er sich nur dann im Gleichgewicht befinden, wenn sein entsprechendes mittleres specifisches Gewicht $= \frac{Q}{V}$ dem specifischen Gewicht γ des Wassers gleich ist. Da ferner der Punkt A in diesem Falle, ebenso wie der Punkt B immer, nur eine einzige bestimmte Lage im Körper hat, so giebt es, falls die Bedingung $Q = \gamma V$ erfüllt ist, nur zwei Gleichgewichtslagen, von denen offenbar diejenige sicher ist, bei welcher B vertical unter A, und die andere unsicher, bei welcher B vertical über A liegt.

Von grösserem Interesse ist der Fall, dass der Körper nur theilweise eingetaucht ist, dass er auf dem Wasser schwimmt. Die Bestimmung seiner Gleichgewichtslagen besteht dann in der Aufgabe, ihn durch Ebenen E so zu schneiden, dass 1) dieselben das Volumen $V = \frac{Q}{\gamma}$ abschneiden und dass 2) die Gerade, welche durch den Schwerpunkt A des abgeschnittenen Volumens V und durch den Schwerpunkt B des Körpers geht, zur schneidenden Ebene senkrecht ist. Das abzuschneidende Volumen erfordert eine nähere Erklärung; es ist zu verstehen als das Volumen, welches von der schneidenden Ebene E und von einem zusammenhängenden Theil der Körperoberfläche so begrenzt wird, dass alle Körperelemente theils in diesem Volumen V, theils jenseits der Ebene E liegen. Dabei braucht das Volumen V nicht ganz von Körperelementen erfüllt zu sein, d. h. es kann (bei hohlen geschlossenen oder bei gefässförmigen Körpern, welche mit aufwärts gekehrter Oeffnung ihres Hohlraums schwimmen) $V > V_1$ sein, wenn V_1 den von der Ebene E abgeschnittenen Theil des Körpervolumens selbst bedeutet, welcher mit V auf derselben Seite von E liegt; es kann sogar V grösser, als das ganze Körpervolumen V_0, also $\gamma V = Q > \gamma V_0$ sein, wenn nämlich das mittlere specifische Gewicht $\gamma_0 = \frac{Q}{V_0}$ des Körpers (z. B. eines Schiffes) $> \gamma$ ist.

Der ersten der obigen zwei Forderungen kann, wenn es überhaupt

möglich ist, im Allgemeinen auf unendlich mannigfache Weise entsprochen werden, indem man sich eine Ebene E relativ gegen den Körper so bewegt denken kann, dass sie immer dasselbe Volumen $V = \frac{Q}{\gamma}$ in dem eben erklärten Sinne abschneidet; der Schwerpunkt A des letzteren bewegt sich dabei in einer gewissen Fläche, welche, als Ort aller möglichen Lagen des Punktes A im Körper betrachtet, mit (A) bezeichnet sei. Diese Fläche ist entweder eine geschlossene (einen gewissen Raum umschliessende) oder eine durch eine gewisse Curve begrenzte zusammenhängende Fläche, oder sie kann auch aus getrennten je durch eine Curve begrenzten Theilen bestehen. Giebt es senkrecht zu jeder Richtung im Körper je zwei schneidende Ebenen E, welche der Bedingung $\gamma V = Q$ entsprechen und die äussere Körperoberfläche (im Gegensatze zu etwaigen inneren, Hohlräume umschliessenden Oberflächen) in nur einer geschlossenen Curve schneiden, wie es namentlich dann der Fall ist, wenn die äussere Körperoberfläche durchaus convex gekrümmt ist, also von keiner Berührungsebene geschnitten wird, so ist (A) eine geschlossene Fläche; umschliesst dabei der Körper keine Hohlräume, so ist nothwendig $V_1 = V < V_0$, also (wegen $\gamma_0 V_0 = \gamma V$) $\gamma_0 < \gamma$, während im Falle von abgeschlossenen Hohlräumen im Körper auch $\gamma_0 > \gamma$ sein kann und dann

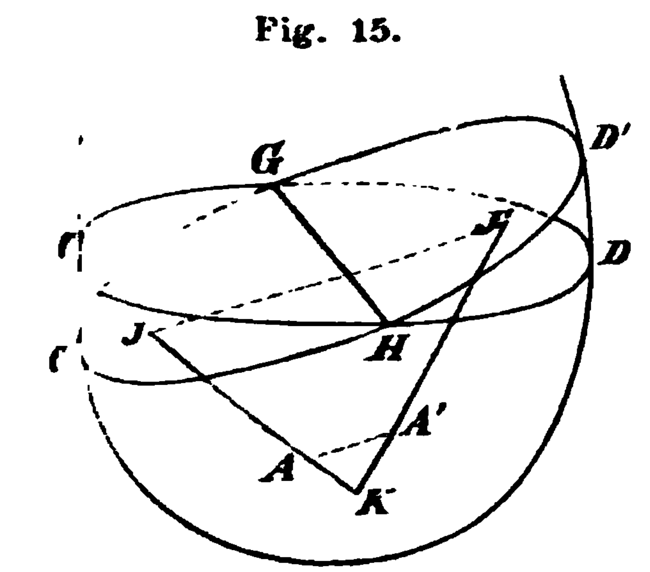
$$V_1 < V < V_0 \text{ für } \gamma_0 < \gamma,$$
$$V_1 < V_0 < V \text{ für } \gamma_0 > \gamma$$

ist. Hat die äussere Oberfläche des Körpers Einbuchtungen, nach aussen offenen Höhlungen entsprechend, und zwar so, dass gewisse Ebenen E, welche der Bedingung $\gamma V = Q$ entsprechen, jene Oberfläche in mehr als einer geschlossenen Curve schneiden, so besteht die Fläche (A) im Allgemeinen aus verschiedenen getrennten und nicht geschlossenen Theilen. Hat insbesondere der Körper die Form eines einfachen Gefässes, eine einzige nach aussen offene Höhlung bildend, und ist dabei $\gamma_0 > \gamma$, so können der Bedingung $\gamma V = Q$ überhaupt nur solche Ebenen E entsprechen, welche die Oberfläche in zwei verschiedenen geschlossenen Curven C und C_1 schneiden; in der einen schneiden sie den Theil der Oberfläche, mit welchem sie zusammen das Volumen V, in der anderen den Theil der Oberfläche, mit welchem sie den innerhalb V liegenden hohlen Raum $= V - V_1$ umschliessen, indem hier wegen $\gamma_0 > \gamma$ jedenfalls $V_1 < V_0$ sein muss. Die Fläche (A) ist in diesem Falle nicht geschlossen, sondern von einer Curve begrenzt, deren Punkte A solchen Grenzlagen der Ebene und

würde das einem Einfliessen von Wasser in die Höhlung des Gefässes entsprechen, es würde dann $V_1 = V$ und die Erfüllung der Bedingung $\gamma V = Q = \gamma_0 V_0$ unmöglich. Ist aber im Falle eines gefässförmigen Körpers $\gamma_0 < \gamma$, so giebt es ausser solchen Lagen der Ebene E, für welche $V_1 < V$ ist, noch solche, für welche $V_1 = V$ ist; die einen und die anderen gehen dabei im Allgemeinen nicht stetig in einander über, und besteht deshalb die Fläche (A) aus getrennten und nicht geschlossenen Theilen, und zwar aus zwei Theilen im Falle eines einfachen Gefässes.

In allen Fällen hat die Fläche (A) die für die Charakterisirung der Gleichgewichtslagen des schwimmenden Körpers bemerkenswerthe Eigenschaft, dass ihre Berührungsebene für jeden ihrer Punkte A der entsprechenden Ebene E, d. h. derjenigen Ebene parallel ist, welche das Volumen V abschneidet, dessen Schwerpunkt dieser Punkt A ist. Ist nämlich (Fig. 15) $CGDH$ eine solche Ebene E, A der Schwerpunkt des entsprechenden Volumens V, ist ferner $C'GD'H$ eine andere solche Ebene E, welche jene in GH unter einem sehr kleinen Winkel schneidet, und A' der Schwerpunkt des von ihr abgeschnittenen Volumens V, so sind die beiden sehr kleinen keilförmigen Volumina $GHCC'$ und $GHDD'$ einander gleich, etwa $= v$. Sind J und J' ihre Schwerpunkte, während K der Schwerpunkt des Volumens $= V - v$ ist, das die Ebenen GHC' und GDH gemeinschaftlich abschneiden, so liegt A in der Geraden JK, A' in der Geraden $J'K$, und zwar so, dass

Fig. 15.



$$\frac{KA}{AJ} = \frac{KA'}{A'J'} = \frac{v}{V-v}$$

ist, dass also die Geraden AA' und JJ' parallel sind. Die Gerade JJ' bildet aber einen sehr kleinen Winkel mit der Ebene $CGDH$, welcher zugleich mit dem Winkel, unter welchem diese Ebene von der Ebene $C'GD'H$ geschnitten wird, verschwindend klein wird; zugleich wird AA' das Längenelement einer Tangente der Fläche (A) im Punkte A. Lässt man die Ebene $CGDH$ von immer anderen der Ebenen E unter verschwindend kleinem Winkel geschnitten werden, so dass der Schnitt GH sich stetig in jener Ebene dreht, so dreht sich AA' parallel derselben um den Punkt A und beschreibt ein Element der Berührungsebene der Fläche (A) für diesen Punkt A.

Aus dieser Eigenschaft der Fläche (A) folgt, dass die Gerade AB dann normal zu der dem Punkte A entsprechenden Schnittebene E ist,

wenn sie mit der Normalen der Fläche (A) für den Punkt A zusammenfällt. Kennt man also diese Fläche im Körper, so sind dessen Gleichgewichtslagen bestimmt durch die Normalen, welche von seinem Schwerpunkte B auf die Fläche gefällt werden können, und welche seine Schwimmaxen genannt werden sollen. Der schwimmende Körper ist im Gleichgewicht, wenn er bei verticaler Lage einer Schwimmaxe bis zu einer Ebene E eingetaucht ist, welche unterhalb das Volumen $V = \frac{Q}{\gamma}$ abschneidet und welche, fixirt gedacht im Körper, eine Schwimmebene desselben heissen mag. Im Allgemeinen gehört zu jeder Schwimmaxe eine Schwimmebene; es können indessen zwei Schwimmaxen in einer zusammenfallen, welcher dann zwei Schwimmebenen entsprechen.

Ist das Körpervolumen symmetrisch in Beziehung auf eine gewisse Ebene, so ist diese offenbar auch Symmetrieebene der Fläche (A), und wenn sie ausserdem den Schwerpunkt B enthält, wie es u. A. bei gleichförmiger Dichtigkeit des Körpers der Fall sein würde, so fallen auch gewisse Schwimmaxen in die Symmetrieebene, welche somit bei den entsprechenden Gleichgewichtslagen des schwimmenden Körpers vertical ist.

Der Charakter einer Gleichgewichtslage ist durch die Krümmung der Fläche (A) bedingt, in welcher Hinsicht zunächst die folgende Bemerkung wichtig ist. Denkt man (Fig. 15) die Ebene E, immer entsprechend der Bedingung $\gamma V = Q$, in stets demselben Sinne gedreht durch die Lagen CD, $C'D'$, $C''D''$..., so dass die Durchschnittslinien GH, $G'H'$.. je zweier aufeinander folgenden Lagen parallel sind, so ist ersichtlich, dass, wenn durch die entsprechende Curve $AA'A''$..., deren Elemente AA', $A'A''$.. den Ebenen CD, $C'D'$... parallel sind, eine Cylinderfläche gelegt wird, deren Erzeugende parallel GH ist, dann diese Cylinderfläche beständig in gleichem Sinne und so gekrümmt ist, dass sie für jede Lage der erzeugenden Geraden ihre concave Seite der entsprechenden Ebene E zuwendet. Weil dasselbe für jede andere Richtung der Geraden GH in der Ebene CD oder in jeder anderen Schnittebene E gilt und so lange, als überhaupt der Bedingung $\gamma V = Q$ bei stetiger Drehung der Ebene E in gleichem Sinne [illegible] werden kann, so folgt, dass die Fläche (A) resp. jeder ihrer getrennten Theile in jedem Punkte A durch unendlich viele Cylinderflächen berührt werden kann, deren Erzeugende in diesem Punkte alle möglichen Richtungen in der betreffenden Berührungsebene der Fläche (A) haben [illegible] welche daselbst ihre concaven Seiten alle der entsprechenden Ebene E zukehren. Die Fläche (A) ist also selbst überall concav-concav gekrümmt und zwar so, dass insbesondere für jede Gleichgewichtslage des Körpers [illegible]

ihre concave Seite im Schwerpunkte A des verdrängten Wasservolumens V nach oben gekehrt, dieser Punkt A folglich ihr tiefster Punkt, resp. der tiefste Punkt des betreffenden Theils der Fläche (A) ist, falls dieselbe aus getrennten Theilen bestehen sollte.

Was nun die Sicherheit oder Unsicherheit des Gleichgewichtes betrifft, so sei AB (Fig. 16) die Schwimmaxe für die betreffende Gleichgewichtslage, aus welcher der Körper unendlich wenig herausgedreht werde so, dass auch in der neuen Lage die Ebene der freien Wasseroberfläche das Volumen $V = \frac{Q}{\gamma}$ abschneidet, dessen Schwerpunkt A' somit der Fläche (A) angehört. Die Ebene der Figur enthalte die Punkte A, B und A', sei also die Ebene des durch A' gehenden Normalschnitts der Fläche (A) für den Punkt A; der Krümmungsmittelpunkt dieses dem Vorigen zufolge jedenfalls nach oben concaven Schnittes sei C, der Krümmungsradius $AC = r$, der Contingenzwinkel $ACA' = d\sigma$. Die Berührungsebene der Fläche (A) im Punkte A' ist der betreffenden Schnittebene E, d. i. der freien Wasseroberfläche parallel, ihre Normale in A' folglich vertical. Diese Normale ist auch normal zu der durch A' gehenden Curve AA' der Fläche (A), so dass $A'C$ ihre Projection auf die Ebene der Figur und sie selbst etwa $A'C'$ ist, unter CC' eine unendlich kleine Strecke verstanden, welche in C auf der Ebene der Figur senkrecht ist. Der entsprechende unendlich kleine Winkel $CA'C'$ sei $= d\tau$; er ist $=$ Null, wenn AA' ein Hauptnormalschnitt der Fläche ist. Nun wirken in der veränderten Lage des Körpers zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Verticalkräfte $= Q$ auf denselben, die eine abwärts gerichtet und in B, die andere aufwärts nach $A'C'$ gerichtet und in A' angreifend zu denken, und das Gleichgewicht des Körpers ist sicher, wenigstens zunächst bezüglich auf den Sinn, in welchem er aus der Gleichgewichtslage entfernt wurde, wenn ihm durch das Kräftepaar Q, Q eine solche Drehung ertheilt wird, durch welche die Schwimmaxe in die Richtung der Verticalen $A'C'$ zurückgelangt, unsicher im entgegengesetzten Falle; jene Drehung kann aber zerlegt werden in eine solche um den Winkel $d\sigma$ im Sinne ACA' und in eine zweite um den Winkel $d\tau$ im Sinne $CA'C'$.

Zerlegt man die Kräfte Q in je eine Componente in der Ebene der Figur und eine andere senkrecht dazu, so können die ersteren Componenten $= Q$, die anderen $= Q\,d\tau$ gesetzt werden. Ist die Entfernung $AB = e$, positiv oder negativ, jenachdem B unter oder über A liegt, so bilden

die Componenten Q ein Paar in der Ebene der Figur, dessen Moment (positiv für den Drehungssinn ACA') $= Q(r+e)d\sigma$ ist, die Componenten Qdl ein Paar in einer dazu senkrechten Ebene; letzteres kann, unter B' die Projection von B auf $A'C$ verstanden, in ein zu vernachlässigendes Paar an BB', dessen Moment unendlich klein zweiter Ordnung ist, und in ein anderes in der Ebene $CA'C'$ zerlegt werden, dessen Moment (positiv für den Drehungssinn $CA'C'$) $= Qedl$ ist, wenn $A'B' = AB = e$ gesetzt wird. Das erste Paar $= Q(r+e)d\sigma$ ist positiv, entspricht also dem Drehungssinne ACA', wenn der Punkt B tiefer liegt, als der Punkt C, wogegen das zweite Paar $= Qedl$ nur dann positiv ist, dem Drehungssinne $CA'C'$ entsprechend, wenn B zugleich unter A liegt. Gleichwohl ist dieser letztere Umstand nicht nothwendige Bedingung für die Sicherheit des Gleichgewichtes; denn während $dl =$ Null sein kann unabhängig davon, ob $d\sigma =$ Null ist oder nicht, wenn nämlich AA' ein Hauptnormalschnitt der Fläche (A) ist, wird umgekehrt mit $d\sigma = 0$ zugleich auch $dl = 0$. Das Gleichgewicht ist deshalb sicher oder unsicher bezüglich auf den Sinn, in welchem der Körper aus der Gleichgewichtslage herausgedreht wurde, je nachdem sein Schwerpunkt B tiefer oder höher liegt, als der Punkt C; der Umstand, ob dabei B tiefer oder höher liegt, als der Punkt A, bedingt nur die Art der kleinen Schwingungen, welche der Körper um seine sichere Gleichgewichtslage ausführt, wenn er, sehr wenig daraus entfernt, den betreffenden Kräften frei überlassen wird.

Soll nun aber das Gleichgewicht unbedingt sicher sein, in welchem Sinne auch der Körper aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht werden mag, so muss offenbar sein Schwerpunkt B tiefer liegen, als der Krümmungsmittelpunkt C irgend eines Normalschnitts der Fläche A für den

eine Verticalkraft $dP = \gamma\, dV$ hinzukommen, deren Richtungslinie durch den Schwerpunkt des Volumens dV geht, welches zwischen den die Volumina V und $V + dV$ in der veränderten Lage des Körpers abschneidenden Horizontalebenen enthalten ist, und welche Kraft aufwärts oder abwärts gerichtet ist, jenachdem dV einen positiven oder negativen Werth hat. Ersetzt man diese Kraft durch eine in B angreifende gleich grosse und gleich gerichtete Kraft $= dP$ und durch ein Kräftepaar, so kann zwar letzteres an und für sich betrachtet den Körper je nach Umständen in seine Gleichgewichtslage zurückzudrehen oder weiter daraus zu entfernen streben; weil aber mit jener in B angreifenden Kraft zugleich auch das fragliche Kräftepaar verschwindet (nicht umgekehrt), so ist dasselbe ebenso wenig massgebend für die Sicherheit oder Unsicherheit des Gleichgewichtes wie das vorhin besprochene Kräftepaar $= Qe\,d\xi$, und weil ferner die in B angreifende Kraft $= dP$ den Körper immer in solchem Sinne bewegt, dass das verdrängte Wasservolumen wieder $= V$ wird, so werden die Bedingungen für die Sicherheit oder Unsicherheit des Gleichgewichtes überhaupt davon unabhängig, ob mit der unendlich kleinen Abweichung von der Gleichgewichtslage zugleich eine unendlich kleine Aenderung von V verbunden ist oder nicht. Es sind davon nur die Schwingungen abhängig, welche der Körper im Falle einer sicheren Gleichgewichtslage um diese ausführt.

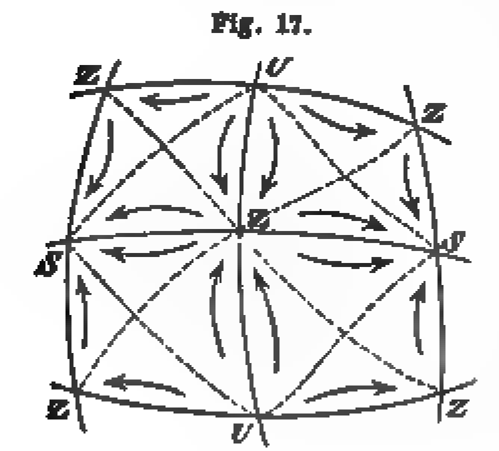
Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers ist also immer sicher oder unsicher, jenachdem sein Schwerpunkt B tiefer oder höher liegt, als die Krümmungsmittelpunkte C aller Normalschnitte der Fläche (A) für ihren Durchschnittspunkt A mit der Schwimmaxe; liegt aber B innerhalb der Strecke C_1C_2, welche der Ort der verschiedenen Punkte C ist, so ist das Gleichgewicht sicher oder unsicher je nach der Art, wie der Körper unendlich wenig aus der Gleichgewichtslage

anderen Ausdruck bringen gemäss
he (A) im Punkte A biconcav ist,
und C_2 ihrer betreffenden Haupt-
unktes A auf einerlei Seite von A
B einen Punkt der Normalen ver-
Entfernung dieses Punktes B von
, jenachdem der Punkt B auf der-
Seite wie der Punkt A ausserhalb
ser Strecke C_1C_2 liegt. Hiernach
chgewichtslage eines schwim-

menden Körpers sicher, unsicher oder zweifelhaft sei, jenach-dem das in der Schwimmaxe liegende Perpendikel vom Schwer-punkte des Körpers auf die Fläche ($\varDelta$) ein Minimum, ein Ma-ximum oder keins von beiden ist.

Wenn man sich im Körper von seinem Schwerpunkte B aus all Geraden gezogen denkt, welche Schwimmaxen sein können, und dieselb mit BS, BU oder BZ bezeichnet, jenachdem sie einer sicheren, ein unsicheren oder einer zweifelhaften Gleichgewichtslage entsprechen, s müssen dieselben, wie sich leicht übersehen lässt, im Allgemeinen so un einander abwechseln, dass sie die Fläche ($\varDelta$), event. die getrennten Theil derselben in solchen Punkten S, U und Z (Fig. 17) treffen, welche al die Knoten eines aus krummlinig-viereckigen Maschen gebildeten Netz betrachtet werden können, und zwar so, dass i jeder Masche die eine Diagonale einen Punkt S mit einem Punkte U, die andere zwei Punkte Z verbindet. In der Figur ist durch Pfeile d Sinn angedeutet, in welchem der aus der Gleich-gewichtslage entfernte und frei beweglich Körper durch die wirksamen Kräfte gedreh wird; diese Pfeile sind gegen die Punkte S durchaus hin, von den Punkten U durchau weg gerichtet, während die Punkte Z von theils zugekehrten, theils ab

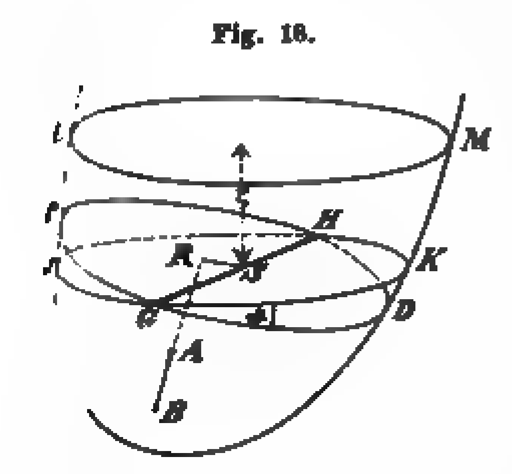
Fig. 17.



digkeiten $= u_0$ mitgetheilt werden, einer anfänglichen lebendigen Kraft des Körpers $= \frac{1}{2}\int u_0^2 \, dM$ entsprechend, welche unendlich klein zweiter Ordnung ist, alsdann das Gleichgewicht sicher war, wenn auch im ganzen Verlauf der Bewegung des Körpers seine Abweichung von der Gleichgewichtslage unendlich klein bleibt; diese Bewegung besteht dann in unendlich kleinen Oscillationen um die Gleichgewichtslage, welche bei Abstraction von Bewegungswiderständen unaufhörlich fortdauern würden, thatsächlich aber immer kleiner werden, bis der Körper in der ursprünglichen Gleichgewichtslage wieder zur Ruhe gelangt.

Es sei CD (Fig. 18) die Schwimmebene, d. h. die Ebene, in welcher die freie Wasseroberfläche den Körper in seiner Gleichgewichtslage schneidet, F der Flächeninhalt dieses Schnittes, AB die Schwimmaxe, nämlich A der Schwerpunkt des in der Gleichgewichtslage verdrängten Wasservolumens V (des von der Schwimmebene CD abgeschnittenen Volumens) und B der Schwerpunkt des Körpers, die Entfernung $AB = e$ (positiv oder negativ, jenachdem B unter oder über A liegt).

Fig. 18.



In irgend einem Augenblicke, in welchem die Abweichung des Körpers von der Gleichgewichtslage (wenn sie auch im weiteren Verlauf der Bewegung von endlicher Grösse werden sollte) noch unendlich klein ist, sei LM der Schnitt des Körpers mit der freien Wasseroberfläche, das von ihr abgeschnittene verdrängte Wasservolumen $= \Phi$. JK die Horizontalebene durch den Schwerpunkt S der Schwimmebene CD, GH die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen, ζ die unendlich kleine Entfernung des Punktes S von der freien Wasseroberfläche (positiv oder negativ, jenachdem S darunter oder darüber liegt), ϑ der unendlich

(in der Gleichgewichtslage) mit z_0 und in dem betrachteten Augenblick mit z, die veränderliche Geschwindigkeit eines Körperelementes mit u bezeichnet wird,

$$\frac{1}{2}\int u^2 dM - \frac{1}{2}\int u_0{}^2 dM = \int (z - z_0) dQ - \gamma \int (z - z_0) d\Phi,$$

wobei die 3 ersten Integrale den ganzen Körper umfassen, während das letzte sich über das Volumen Φ erstreckt, somit auch z im dritten Integral positiv und negativ, im vierten nur positiv ist. Unter C eine Constante verstanden, kann diese Gleichung einfacher geschrieben werden:

$$\int u^2 dM = 2\int z dQ - 2\gamma \int z d\Phi + C$$

oder auch, wenn z' die augenblickliche Tiefe des Punktes B unter der freien Wasseroberfläche bedeutet, wegen

$$\int z dQ = Qz' = \gamma V z'$$

$$\int u^2 dM = 2\gamma (Vz' - \int z\, d\Phi) + C \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Indem die linke Seite dieser Gleichung wenigstens zu Anfang der Bewegung unendlich klein zweiter Ordnung ist, dürfen bei der Berechnung des Integrals $\int z d\Phi$ (= dem Moment des Volumens Φ in Beziehung auf die freie Wasseroberfläche) nur unendlich kleine Glieder von höherer als der zweiten Ordnung vernachlässigt werden. Dieses Integral lässt sich in verschiedene Bestandtheile zerlegen, entsprechend der folgenden aus Fig. 18 ersichtlichen Zerlegung des Volumens

$$\Phi = V + IKLM + GHDK - GHCI.$$

Das Moment des von der Schwimmebene CD abgeschnittenen Volumens V mit dem Schwerpunkte A ist

$$= V(z' - e\cos\vartheta) = V\left(z' - e + \frac{e\vartheta^2}{2}\right) \ldots\ldots\ldots$$

mit einem Fehler, welcher nur unendlich klein von der vierten Ordnung ist. Die übrigen Bestandtheile von Φ sind ebenso wie ihre Schwerpunktsabstände von der freien Wasseroberfläche unendlich klein, ihre Momente bezüglich auf dieselbe folglich unendlich klein zweiter Ordnung, so dass bei ihrer Berechnung nur die Glieder von der niedrigsten Ordnung berücksichtigt zu werden brauchen. Sofern nun, wie vorausgesetzt wird, die Körperoberfläche von den Ebenen CD, IK und LM unter endlichen Winkeln geschnitten wird, die Schnittflächen also mit unendlich kleinem Fehler sämmtlich $= F$ gesetzt werden können, ist zunächst das Moment des Volumens $IKLM$

$$= \frac{1}{2} F \zeta^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Für die hufförmigen Volumina $GHDK$ und $GHCI$ können diejenigen gesetzt werden, welche von den Ebenen CD, IK und von der durch den Umfang des Schnittes CD als Leitlinie bestimmten verticalen Cylinderfläche begrenzt werden. Ist dF ein Element der Schwimmebene CD im Abstande x von der Geraden GH, so ergiebt sich das Moment des hufförmigen Volumens, welches sich vertical über dem Theil GHD der Schwimmebene bis zur Ebene GHK erstreckt, indem man dasselbe in verticale prismatische Elemente vom Querschnitte $dF \cos \vartheta$ und von der Höhe $x \sin \vartheta$ zerlegt denkt,

$$= \int dF \cos \vartheta \,.\, x \sin \vartheta \left(\zeta + \frac{x \sin \vartheta}{2} \right) = \int x\vartheta \left(\zeta + \frac{x\vartheta}{2} \right) dF,$$

wobei das Integral sich über die Fläche GHD zu erstrecken hat. Hieraus ergiebt sich der Ausdruck für den von dem anderen hufförmigen Volumen, welches vertical unter GHC liegt, herrührenden negativen Bestandtheil des Integrals $\int z \, d\Phi$, wenn man $\zeta - \frac{x\vartheta}{2}$ für $\zeta + \frac{x\vartheta}{2}$ setzt und den ganzen Ausdruck entgegengesetzt nimmt, falls x absolut verstanden wird. Indem aber diese beiden Aenderungen zusammen darauf hinauskommen, x mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen, ist auch der von beiden hufförmigen Volumen $GHDK$ und $GHCI$ zusammen herrührende Bestandtheil von $\int z \, d\Phi$

$$= \int x\vartheta \left(\zeta - \frac{x\vartheta}{2} \right) dF,$$

falls x auf der einen Seite von GH positiv, auf der anderen negativ gesetzt und die Integration über die ganze Fläche $CGDH = F$ ausgedehnt [illegible] den [illegible]

[illegible]

In dieser Gleichung bedeutet C den Werth von $\int u^2 dM$ für $\zeta = \vartheta = 0$, also die doppelte lebendige Kraft, welche dem Körper in seiner Gleichgewichtslage mitgetheilt wurde; es ist somit C positiv und unendlich klein zweiter Ordnung. Auch der ganze Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (5) muss seiner Bedeutung zufolge wenigstens immer positiv sein. Ist nun

$$Fi^2 + Ve < 0,$$

so kann dies der Fall sein, wenn auch ζ und ϑ endliche Werthe annehmen sollten; dass das Gleichgewicht sicher sei, lässt sich dann nicht behaupten. Ist aber

$$Fi^2 + Ve > 0,$$

so ist das erste Glied des Ausdrucks auf der rechten Seite von Gl. (5) negativ, dieser Ausdruck selbst kann also nur dadurch beständig positiv sein, dass ζ und ϑ immer unendlich klein bleiben; das Gleichgewicht ist dann sicher. Damit es unbedingt sicher sei, wie auch der Körper unendlich wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt werden mag, muss natürlich schon

$$Fi_1^2 + Ve > 0 \text{ oder } \frac{Fi_1^2}{V} + e > 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

sein, unter Fi_1^2 das kleinste Trägheitsmoment der Schwimmebene für irgend eine Schwerpunktsaxe verstanden, d. h. das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers ist sicher, wenn sein Schwerpunkt entweder unter dem Schwerpunkt des verdrängten Wassers liegt oder in einer solchen Höhe darüber, welche kleiner ist, als der Quotient aus dem kleinsten Trägheitsmoment des in der Schwimmebene liegenden Körperschnitts durch das verdrängte Wasservolumen.

Das Resultat dieser analytisch-mechanischen Untersuchung stimmt mit dem der früheren geometrisch-statischen Betrachtung überein, wenn unter Fi_2^2 das grösste Trägheitsmoment der Fläche F für eine Schwerpunktsaxe in ihrer Ebene verstanden, die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche (A) für den Punkt A beziehungsweise

$$r_1 = \frac{Fi_1^2}{V}, \quad r_2 = \frac{Fi_2^2}{V}$$

gesetzt werden, und wenn allgemein $\frac{Fi^2}{V} = r$ gesetzt wird = dem Krümmungshalbmesser desjenigen Normalschnitts der Fläche (A), in welchem der Schwerpunkt des verdrängten Wassers im Körper fortrückt, falls dieser aus seiner Gleichgewichtslage unendlich wenig herausgedreht wird um die Gerade GH, welcher das Trägheitsmoment Fi^2 entspricht. Bildet die

Gerade mit der Axe des kleinsten Trägheitsmomentes den Winkel α, so ist bekanntlich

$$i^2 = i_1{}^2 \cos^2\alpha + i_2{}^2 \sin^2\alpha, \text{ also } r = r_1 \cos^2\alpha + r_2 \sin^2\alpha,$$

während der Winkel β zwischen dem Normalschnitt zum Halbmesser r und dem Hauptnormalschnitt zum Halbmesser r_1 bestimmt ist durch die Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\beta}{r_1} + \frac{\sin^2\beta}{r_2}.$$

Daraus ergiebt sich

$$\frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \frac{i_2}{i_1},$$

also $\beta > \alpha$, ausser wenn $\alpha = 0^0$ oder 90^0 und somit $\beta = \alpha$ ist.

§. 58. Oscillationen schwimmender Körper.

Wenn ein fester Körper, welcher auf dem Wasser in einer sicheren Gleichgewichtslage schwimmt, aus derselben entfernt und dann der Wirkung seiner constanten Schwere und des veränderlichen Auftriebs frei überlassen wird, so oscillirt er um die Gleichgewichtslage, falls die Entfernung aus derselben eine gewisse Grösse nicht überschritten hatte. Die Gesetze, denen diese Oscillationen folgen, sollen (mit Beibehaltung der in vorigem §. gebrauchten Buchstabenbezeichnungen und mit Bezugnahme auf Fig. 18 daselbst) unter der Voraussetzung entwickelt werden, dass

1) die Gestalt und Massenvertheilung des Körpers symmetrisch sind in Beziehung auf eine durch seine Schwimmaxe AB gehende, in der Gleichgewichtslage folglich verticale Ebene BCD,

2) dass auch in der Lage, in welche der Körper versetzt wurde und von welcher aus seine Oscillationen ohne Anfangsgeschwindigkeit beginnen, jene Ebene BCD vertical ist,

3) dass diese Anfangslage nur wenig von der Gleichgewichtslage verschieden ist.

Die Voraussetzungen unter 2) und 3) können auch so ausgedrückt werden, dass dem Körper in seiner Gleichgewichtslage durch einen Stoss, dessen Richtungslinie in die Symmetrieebene fällt, eine kleine lebendige Kraft ertheilt wird. Der Körper bewegt sich dann so, dass seine Symmetrieebene beständig in derselben Verticalebene bleibt, welche auch immer den Schwerpunkt A des verdrängten Wasservolumens Φ enthält; in dieser

Ebene macht die Schwimmaxe AB kleine Schwingungen um den Punkt B, während dieser, da alle beschleunigenden Kräfte vertical sind, kleine geradlinige verticale Schwingungen macht. Die augenblickliche Lage des Körpers ist bestimmt durch die Tiefe z' seines Schwerpunktes B unter der freien Wasseroberfläche und durch die Neigung ϑ der Schwimmaxe gegen die Verticale. Ist aber (Fig. 18) R der Punkt, in welchem die Schwimmaxe die Schwimmebene CD trifft, S der Schwerpunkt der letzteren, so ist mit $BR = r$ und $RS = s$ bei Vernachlässigung kleiner Grössen zweiter Ordnung

$$z' = r \cos \vartheta + \zeta - s \sin \vartheta = r + \zeta - s\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

die augenblickliche Lage des Körpers also auch bestimmt durch ζ und ϑ, welche Grössen als Functionen der Zeit t zu entwickeln sind. Dabei ist s absolut verstanden, während r, ζ und ϑ positiv oder negativ sind, jenachdem

B unter oder über der Schwimmebene,
S unter oder über der freien Wasseroberfläche,
R über oder unter S liegt.

Für die Bewegung des Körperschwerpunktes B hat man die Gleichung

$$M \frac{d^2 z'}{dt^2} = -\gamma(\Phi - V)$$

oder mit $M = \frac{Q}{g} = \frac{\gamma V}{g}$ und mit Rücksicht auf Gl. (1)

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} - s\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{V}(\Phi - V) = 0.$$

Unter der auch im vorigen §. gemachten Voraussetzung, dass die Körperoberfläche von den Ebenen CD, JK und LM (Fig. 18) durchaus unter endlichen Winkeln geschnitten werde und woraus dort bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung die Gleichheit der Flächeninhalte dieser drei Körperschnitte $= F$ gefolgert wurde, ist aber auch mit entsprechender Annäherung, wie leicht ersichtlich,

$$\Phi - V = F\zeta$$

und somit

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} - s\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{gF}{V}\zeta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Eine zweite Gleichung zwischen ζ, ϑ und t kann erhalten werden, indem bezüglich auf die zur Symmetrieebene senkrechte Schwerpunktsaxe des Körpers das Product aus seinem Trägheitsmoment $= Mk^2$ und die Winkelbeschleunigung $= \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ dem Moment des dem verdrängten Wasservolumen Φ entsprechenden Auftriebes gleich gesetzt und dieses Moment

als eine algebraische Summe von 4 Bestandtheilen ausgedrückt wird analog denjenigen, in welche das Integral $\int z\,d\Phi$ im vorigen §. zerlegt wurde. Zur Vermeidung dieses wiederholten Zerlegungsverfahrens kann man sich indessen auch der Gl. (5) im vorigen §. bedienen, welche das Princip der lebendigen Kräfte daselbst geliefert hatte*; indem nämlich die doppelte lebendige Kraft des Körpers

$$\int u^2 dM = M\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 + Mk^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$

ist, ergiebt sich durch Substitution dieses Ausdrucks in jener Gleichung mit

$$M = \frac{\gamma V}{g} \text{ und } \frac{dz'}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} - s\frac{d\vartheta}{dt} \text{ nach Gl. (1)}$$

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2 - 2s\frac{d\zeta}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + (s^2+k^2)\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{g}{V}[F\zeta^2 + Fi^2 + Ve)\vartheta^2] = C$$

und daraus durch Differentiation

$$\frac{d\zeta}{dt}\frac{d^2\zeta}{dt^2} - s\left(\frac{d\zeta}{dt}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{d\vartheta}{dt}\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) + (s^2+k^2)\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$+ \frac{g}{V}\left[F\zeta\frac{d\zeta}{dt} + (Fi^2 + Ve)\vartheta\frac{d\vartheta}{dt}\right] = 0.$$

Die Summe der Glieder dieser Gleichung, welche den Factor $\frac{d\zeta}{dt}$ enthalten, ist $= 0$ nach Gl. (2), und geht somit nach Division durch $\frac{d\vartheta}{dt}$ die Gleichung über in:

$$-s\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} - s\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\right) + k^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{V}(Fi^2 + Ve)\vartheta = 0$$

oder wieder mit Rücksicht auf Gl. (2) in:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{gFs}{Vk^2}\zeta + \frac{g(Fi^2 + Ve)}{Vk^2}\vartheta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

---

* Dass bei der Entwickelung jener Gleichung ζ und ϑ als unendlich kleine Grössen vorausgesetzt wurden, wie es mit Rücksicht darauf geschehen war, dass zwei verschiedene Schwimmaxen des Körpers einen beliebig kleinen Winkel mit einander bilden können, hindert offenbar nicht die angenäherte Gültigkeit der Gleichung für den Fall, dass ζ und ϑ kleine endliche Werthe haben, sofern dieselben ausserdem als so klein vorausgesetzt werden, dass der aus seiner sicheren Gleichgewichtslage entfernte und frei bewegliche Körper sich nicht etwa gegen eine andere (jener vielleicht sehr nahe) sichere Gleichgewichtslage hin bewegt.

Die Elimination von $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ zwischen dieser Gleichung und Gl. (2) liefert endlich

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{gF(k^2+s^2)}{Vk^2}\zeta + \frac{gs(Fi^2+Ve)}{Vk^2}\vartheta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{gF(k^2+s^2)}{Vk^2} = a; \quad \frac{g(Fi^2+Ve)}{Vk^2} = b; \quad \frac{gFs}{Vk^2} = c \quad \ldots\ldots (5),$$

wo a, b, c positive Grössen sind (b gemäss der vorausgesetzten Sicherheit der Gleichgewichtslage nach vorigem §. und c insofern als die mit s bezeichnete Strecke RS — Fig. 18 — absolut verstanden wird), so lassen die Gleichungen (3) und (4) sich einfacher schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dt^2} + a\zeta + bs\vartheta = 0 \\ \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + c\zeta + b\vartheta = 0 \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Wenn man die zweite dieser Gleichungen mit dem vorläufig unbestimmten Factor λ multiplicirt und zur ersten addirt, so folgt

$$\frac{d^2(\zeta+\lambda\vartheta)}{dt^2} + (a+\lambda c)\left[\zeta + \frac{b(s+\lambda)}{a+\lambda c}\vartheta\right] = 0$$

oder, wenn jetzt λ gemäss der Gleichung

$$\frac{b(s+\lambda)}{a+\lambda c} = \lambda \text{ oder } c\lambda^2 + (a-b)\lambda - bs = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

bestimmt wird,

$$\frac{d^2(\zeta+\lambda\vartheta)}{dt^2} + (a+\lambda c)(\zeta+\lambda\vartheta) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Die beiden Werthe von λ, welche der Gleichung (7) entsprechen, sind reell und von entgegengesetzten Zeichen. Die entsprechenden zwei Werthe von $a+\lambda c$ sind also auch reell und zwar positiv; denn die Substitution von

$$a + \lambda c = \eta, \text{ also } \lambda = \frac{\eta - a}{c}$$

in Gl. (7) liefert eine Gleichung:

$$\eta^2 - (a+b)\eta + b(a-cs) = 0,$$

deren Wurzeln positiv sind, weil ausser a und b auch

$$a - cs = \frac{gF}{V} \text{ nach den Gleichungen (5)}$$

eine positive Grösse ist. Das Integral von Gl. (8) ist somit in reeller Form

$$\zeta + \lambda\vartheta = A\cos(t\sqrt{a+\lambda c}) + B\sin(t\sqrt{a+\lambda c}),$$

unter A und B Constante verstanden. Wird aber die Zeit t von dem Augenblick an gerechnet, in welchem der etwas aus der Gleichgewichtslage entfernte Körper mit den (als gleichzeitig vorausgesetzten) Werthen

$$\zeta = \zeta_0, \quad \vartheta = \vartheta_0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0$$

seine schwingende Bewegung beginnt, so ist $B = 0$, also

$$\zeta + \lambda\vartheta = A\cos(t\sqrt{a+\lambda c}).$$

Diese Gleichung umfasst, wenn die beiden Wurzeln von Gl. (7) mit λ_1 und λ_2 bezeichnet werden, wenn also

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \frac{-(a-b) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4bcs}}{2c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

gesetzt wird, die folgenden zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{matrix}\zeta + \lambda_1\vartheta = A_1\cos(t\sqrt{a+\lambda_1 c})\\ \zeta + \lambda_2\vartheta = A_2\cos(t\sqrt{a+\lambda_2 c})\end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

aus welchen ζ und ϑ leicht gefunden werden können, während die Constanten A_1 und A_2 durch die Anfangswerthe von ζ und ϑ bestimmt sind:

$$A_1 = \zeta_0 + \lambda_1\vartheta_0, \quad A_2 = \zeta_0 + \lambda_2\vartheta_0 \quad \ldots\ldots\ldots (11).$$

Wenn man auf der Geraden RS (Fig. 18, §. 57), in welcher die Symmetrieebene des Körpers seine Schwimmebene CD schneidet, vom Schwerpunkte S der letzteren aus die Strecke $SP_1 = \lambda_1$ im Sinne RS und die Strecke $SP_2 = -\lambda_2$ im Sinne SR abträgt, so bewegen sich die Projectionen der Punkte P_1 und P_2 auf eine zur Symmetrieebene des Körpers senkrechte Verticalebene gemäss Gl. (10) nach demselben Gesetze wie die Horizontalprojection des materiellen Punktes eines mathematischen Pendels bei sehr kleinem Ausschlagwinkel; die Dauer einer ganzen Schwingung ist

$$\left.\begin{matrix}\text{für den Punkt } P_1: \quad T_1 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a+\lambda_1 c}}\\ \text{und für den Punkt } P_2: \quad T_2 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a+\lambda_2 c}}\end{matrix}\right| \quad \ldots\ldots (12).$$

Die Grössen ζ und ϑ einzeln, sowie auch die davon abhängigen Grössen (ausser $\zeta + \lambda_1\vartheta$ und $\zeta + \lambda_2\vartheta$), insbesondere die Tiefe z' des Körperschwerpunktes B unter der freien Wasseroberfläche (Gl. 1), sind in zusammengesetzter Weise periodisch veränderlich; die Periode ist die kleinste

Zeit, welche durch T_1 und T_2 theilbar ist, im Allgemeinen $= T_1 T_2$. —

Ist insbesondere $s = 0$, also auch $c = 0$, wie es namentlich dann der Fall ist, wenn der Körper noch eine zweite Symmetrieebene hat, welche die erste in der Schwimmaxe rechtwinkelig schneidet, und wie es z. B. bei Schiffen näherungsweise angenommen werden kann, so ist nach Gl. (6)

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + a\zeta = 0; \quad \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + b\vartheta = 0.$$

Daraus folgt, wenn die Zeit von einem Augenblicke an gerechnet wird, in welchem ζ resp. ϑ am grössten $= \zeta_0$ resp. ϑ_0 ist,

$$\left.\begin{array}{l} \zeta = \zeta_0 \cos(t\sqrt{a}) = \zeta_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{gF}{V}}\right) \\ \vartheta = \vartheta_0 \cos(t\sqrt{b}) = \vartheta_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{g(Fi^2 + Ve)}{Vk^2}}\right) \end{array}\right\} \ldots\ldots (13)$$

Nach Gl. (1) ist in diesem Falle $z' = r + \zeta$ und somit die Schwingungsdauer

$$\left.\begin{array}{r} \text{des Körperschwerpunktes} = 2\pi\sqrt{\frac{V}{gF}} \\ \text{der Schwimmaxe} = 2\pi\sqrt{\frac{Vk^2}{g(Fi^2 + Ve)}} \end{array}\right\} \ldots (14)$$

Die Resultate vorstehender Untersuchung werden besonders im vierten Theile dieses Werkes Anwendung finden bezüglich der Regeln für den Bau und die Ladung von Schiffen.

b. Gleichgewicht des Wassers mit Rücksicht auf Molekularkräfte.

Die im Vorhergehenden, insbesondere die in §. 55 gefundenen Gleichgewichtsgesetze des Wassers beruhen wesentlich auf der Voraussetzung gleichförmiger Dichtigkeit, überhaupt einer durch die ganze Masse gleichförmigen Molekularbeschaffenheit desselben; in letzter Reihe beruhen sie auf den in §. 53 benutzten allgemeinen Gleichungen (6) in §. 5, welchen ihrerseits die Voraussetzung einer in demselben Punkte für alle Ebenen stets gleichen Pressung als wesentliches Kriterium des Flüssigkeitszustandes zu Grunde liegt. Bei der als gleichförmig angenommenen Temperatur und mit Rücksicht auf die sehr unbedeutende Zusammendrückbarkeit des Wassers

oder irgend einer tropfbaren Flüssigkeit) sind jene Voraussetzungen zwar unbedenklich für alle materiellen Punkte im Inneren, welche in solcher Entfernung von der Oberfläche liegen, dass die von den übrigen materiellen Flüssigkeitspunkten auf sie ausgeübten Molekularkräfte rings herum gleichförmig vertheilt sind, während die Wirkung der von den materiellen Punkten einer festen Wand ausgehenden Molekularkräfte sich nicht bis zu ihnen erstreckt; zunächst der Oberfläche dagegen, und zwar sowohl der freien (von einer luftförmigen Flüssigkeit, insbesondere von der atmosphärischen Luft berührten), als auch der Wand-Oberfläche, können die einen oder die anderen jener Molekularkräfte (die Cohäsions- und Adhäsionskräfte) oder beide zusammen eine wesentlich andere Dichtigkeit und überhaupt eine andere mittlere Gruppirung der materiellen Punkte, sowie auch einen anderen Spannungszustand bedingen, wie im Inneren der Flüssigkeit, und wenn auch die betreffende Oberflächenschicht nur unmessbar dünn ist, so können doch die Gleichgewichtsgesetze u. U. merklich dadurch beeinflusst werden. Bei der folgenden Herleitung der wichtigsten dieser Gesetze wird ausser den fraglichen Molekularkräften und dem gleichförmigen äusseren Druck $= p_0$ an der freien Oberfläche nur die Schwere als wirksame Kraft vorausgesetzt, so dass ohne die Wirkung der Molekularkräfte die freie Oberfläche eine horizontale Ebene wäre.

§. 59. Der Cohäsionsdruck und die Cohäsionsconstante.

Die hier in Rede stehenden Gleichgewichtserscheinungen einer Flüssigkeit geben sich besonders dadurch als abweichend von den im Vorigen hergeleiteten Gesetzen zu erkennen, dass trotz der Gleichförmigkeit des äusseren Drucks $= p_0$ und der verticalen Richtung der einzig wirksamen äusseren Massenkraft (der Schwere) die freie Oberfläche theilweise gekrümmt, und zwar an irgend einer Stelle um so stärker convex oder concav nach aussen gekrümmt ist, je mehr diese Stelle tiefer oder höher liegt, als der horizontale ebene Theil der freien Oberfläche. Ist in Fig. 19 AB ein Theil der krummen, CD ein Theil der horizontalen freien Oberfläche (z. B. AB ein Theil der Quecksilberoberfläche im Inneren einer offenen Glasröhre, welche in ein Gefäss getaucht ist, in dem das Quecksilber ausserhalb der Röhre bis zur Horizontalebene CD steht), so ist die freie Oberfläche so gestaltet, wie sie es auf Grund der bisherigen Gesetze sein müsste, wenn der äussere

Fig. 19.

Druck nicht constant $= p_0$, sondern in irgend einem Punkte B der Oberfläche

$$p = p_0 + \gamma z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

wäre, unter γ das gleichförmige specifische Gewicht der Flüssigkeit und unter z die (positive oder negative) Tiefe des Punktes B unter der Horizontalebene CD verstanden. Die Cohäsionskräfte, d. h. die Molekularkräfte, mit denen die Flüssigkeitsmoleküle gegenseitig auf einander wirken, verursachen also eine solche Aenderung des inneren Zustandes der Oberflächenschicht, welche hinsichtlich ihres Einflusses auf die Gleichgewichtserscheinungen durch eine veränderliche Normalkraft $= \gamma z$ pro Flächeneinheit der freien Oberfläche ersetzt werden kann; diese Normalkraft, welche den äusseren Druck p_0 vergrössert oder verkleinert, jenachdem z positiv oder negativ ist, heisse der Cohäsionsdruck. Es fragt sich, wie derselbe, also auch die Grösse z mit dem inneren Zustande der Oberflächenschicht und mit ihrer Krümmung zusammenhängt.

Ein nach jeder Richtung unendlich kleines Element dF der krummen Oberfläche bei B (Fig. 19) werde von einer Normalen rings umfahren und die dadurch erzeugte Fläche bis auf eine kleine Erstreckung in das Innere der Flüssigkeit als eine feste undurchdringliche Wand betrachtet, welche in der angrenzenden Flüssigkeit keine Aenderung ihrer oberflächlichen Beschaffenheit verursacht; ebenso werde die verticale Cylinderfläche, welche ein endliches Stück $= F$ der horizontalen Oberfläche CD einschliesst, bis auf eine kleine Strecke nach aussen (nach oben) als eine feste undurchdringliche Wand ohne Einfluss auf die oberflächliche Beschaffenheit der angrenzenden Flüssigkeit betrachtet. Unter diesen Umständen ist es eine virtuelle (mit der Natur und den Bedingungen des Systems verträgliche) Verrückung, wenn man annimmt, die Oberfläche der Flüssigkeit werde innerhalb der das Element dF umschliessenden Wand um die unendlich kleine Strecke δn in normaler Richtung einwärts verschoben und innerhalb der das Flächenstück F einschliessenden Wand um den entsprechenden Betrag $= \frac{dF}{F}\delta n$ gehoben; das Gleichgewicht erfordert, dass die dieser virtuellen Verrückung entsprechende Arbeitssumme aller wirksamen Kräfte $=$ Null sei.

Diese Kräfte sind: der äussere Druck auf die Oberfläche, die Schwere und die Molekularkräfte. Die Summe der Arbeiten des äusseren Druckes auf die verschobenen Theile dF und F der Oberfläche ist

$$p_0 dF \delta n - p_0 F \cdot \frac{dF}{F} \delta n = 0.$$

Die Arbeit der Schwere, entsprechend der Erhebung des Flüssigkeitsvolumens $= dF\delta n$ von der Stelle B bis zur Horizontalebene CD, ist

$$= -\gamma z dF\delta n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Die Arbeit der Molekularkräfte endlich ist dadurch bedingt, dass mit der normalen Verschiebung des Oberflächenelementes dF bei B im Allgemeinen zugleich eine Grössenänderung desselben verbunden ist. Die veränderte Grösse sei $= dF - \delta dF$; dann ist die Arbeit der Molekularkräfte

$$= \beta . \delta dF,$$

wenn der Coefficient β, die sogenannte Cohäsionsconstante, die Arbeit zur Umwandlung einer Flächeneinheit der Oberflächenschicht in den Zustand der homogenen Flüssigkeit im Inneren der Masse bedeutet. Betrachtet man dF als ein rechteckiges Flächenelement $= ds\,ds'$, unter ds und ds' die von B aus gerechneten Bogenelemente zweier sich rechtwinklig schneidender Normalschnitte der Oberfläche verstanden, deren Krümmungshalbmesser $= \varrho$ und ϱ' seien (positiv oder negativ, jenachdem der betreffende Schnitt nach aussen convex oder concav ist), so hat man

$$dF - \delta dF = ds \frac{\varrho - \delta n}{\varrho} . ds' \frac{\varrho' - \delta n}{\varrho'} = dF\left(1 - \frac{\delta n}{\varrho}\right)\left(1 - \frac{\delta n}{\varrho'}\right)$$

$$= dF\left(1 - \frac{\delta n}{\varrho} - \frac{\delta n}{\varrho'}\right),$$

also

$$\delta dF = \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) dF\delta n$$

und die Arbeit der Molekularkräfte:

$$\beta . \delta dF = \beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) dF\delta n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Die Summe der virtuellen Arbeiten (2) und (3) = Null gesetzt ergiebt den Cohäsionsdruck

$$\gamma z = \beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Der Constanten β kann auch eine andere Deutung gegeben werden. Nimmt man nämlich an, es finde in der Oberflächenschicht der Flüssigkeit eine Spannung statt von gleicher Grösse an jeder Stelle und nach jeder Richtung, $= \beta$ pro Längeneinheit irgend eines Normalschnittes der Schicht, so wirken auf das Element der fraglichen Schicht, welches dem Oberflächenelement $dF = ds\,ds'$ entspricht, an den beiden Rändern von der Länge ds'

die gleichen Kräfte $=\beta ds'$ unter dem Winkel $=\pi - \frac{ds}{\varrho}$ mit der Resultanten

$$= 2\beta ds' \sin\frac{ds}{2\varrho} = \beta\frac{ds\,ds'}{\varrho} = \beta\frac{dF}{\varrho}$$

normal zur Fläche. Ebenso entsprechen die Spannungen an den beiden anderen Randflächen der Normalkraft $\beta\frac{dF}{\varrho'}$. Die Spannung rings am Umfang des Elementes liefert also die Normalkraft: $\beta\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)dF$ oder pro Flächeneinheit den durch Gl. (4) bestimmten specif. Cohäsionsdruck. Die Cohäsionsconstante β kann also auch betrachtet werden als die Grösse einer gleichförmigen Spannung der Oberflächenschicht pro Längeneinheit irgend eines Normalschnitts derselben.

Der Zustand der Oberflächenschicht ist also schon insofern wesentlich verschieden von dem der übrigen Flüssigkeit, als dort die Pressung in demselben Punkte nicht für alle Ebenen gleich ist, wie es die allgemeinen Gleichungen (6) in §. 5 voraussetzen, auf denen die Gesetze in §. 53 u. ff. beruhen. Wenn man längs einer Normalen BN (Fig. 19) die Oberflächenschicht, deren Dicke $= f$ sei, durchdringt, so wächst die Pressung in den zu BN senkrechten Ebenen von p_0 bis $p = p_0 + \beta\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)$; die Pressung in jeder durch BN gehenden Ebene dagegen ist anfangs negativ, nimmt absolut genommen allmählig ab, geht an einer gewissen mittleren Stelle der Schichtdicke durch Null, und wächst dann als eigentliche Pressung bis $p = p_0 + \beta\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)$ an der inneren Fläche der Schicht. Der Mittelwerth dieser Pressung in den Normalschnitten der Schicht ist negativ $= -\frac{\beta}{f}$ pro Flächeneinheit. Erst an der inneren Seite der Oberflächenschicht ist die Pressung nach allen Richtungen gleich gross $= p$ geworden, und erst von hier an werden deshalb die Gesetze von §. 53 u. ff. wieder gültig, wenn man die Oberflächenschicht dadurch ersetzt, dass der gegebene äussere Druck p_0 durch den Cohäsionsdruck ergänzt wird.

Die Spannung (negative Pressung) der Oberflächenschicht ist durch eine grössere Entfernung der nach jeder tangentialen Richtung benachbarten Flüssigkeitsmoleküle zu erklären, so dass im Durchschnitt die Massenmittelpunkte in den Anziehungsräumen (§. 45) der im Sinne der betreffenden Tangentialebenen nächstbenachbarten Moleküle liegen, während

in der übrigen Flüssigkeit, wo unter dem Einflusse des äusseren Drucks nach allen Richtungen Pressung stattfindet, die Moleküle sich im Durchschnitt näher, nämlich ihre Massenmittelpunkte in den Abstossungsräumen der nächstbenachbarten liegen müssen. Die Oberflächenschicht ist also weniger dicht, als die übrige Flüssigkeit, und es ist die jedenfalls positive Cohäsionsconstante β als eine zur entsprechenden Verdichtung aufzuwendende Arbeit zu betrachten. Durch directe Versuche, also etwa durch den Nachweis, dass dieselbe Flüssigkeitsmasse unter übrigens gleichen Umständen bei grosser freier Oberfläche ein grösseres Volumen hat, als bei kleiner, hat freilich jene kleinere Dichtigkeit der Oberflächenschicht bisher nicht constatirt werden können. Zur Schätzung ihrer Dicke f gewährt die bestimmbare kleinstmögliche Dicke einer Blasenhülle, z. B. der wässerigen Hülle einer Seifenblase, einigen Anhalt; indem Plateau die letztere als $2f$ betrachtete (?), bestimmte er für Wasser

$$f = 0{,}000057 \text{ Millim.}$$

Bei der Allmähligkeit der Zustandsänderung von aussen nach innen ist übrigens eine bestimmte Grenze zwischen Oberflächenschicht und homogener Flüssigkeit kaum anzugeben, und obige Zahl wohl nur als ein Minimalwerth zu betrachten.

Ist eine solche Blase kugelförmig, p_0 der äussere Druck auf die äussere, p_1 derselbe auf die innere Oberfläche (die Pressung des Gases oder Dampfes im Inneren der Blase), und ist die Hülle sehr dünn im Vergleich mit dem Halbmesser r, so kann die Summe aus dem äusseren und dem Cohäsionsdruck

$$\text{für die äussere Oberfläche} = p_0 + \beta\frac{2}{r}$$

$$\text{„ „ innere „} = p_1 - \beta\frac{2}{r}$$

gesetzt werden, so dass im Gleichgewichtszustande

$$p_0 + \frac{2\beta}{r} = p_1 - \frac{2\beta}{r}, \text{ also } p_1 - p_0 = \frac{4\beta}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Bei sehr kleinen Bläschen ist die Pressung innerhalb wesentlich grösser, als ausserhalb. Setzt man z. B. nach §. 62 für Wasser und für Gramm und Meter als Kraft- und Längeneinheiten $\beta = 5$, so wäre für $r = 0{,}0001$, d. h. für ein Bläschen von 0,2 Millim. Durchmesser $p_1 - p_0 = 200000$ Gr. pro Quadratm. $= 200$ Kgr. pro Quadratm. $= 0{,}02$ Atm.

§. 60. Der Randwinkel und die Adhäsionsconstante.

Ebenso wie an der freien Oberfläche einer Flüssigkeit ist auch an ihrer Wand-Oberfläche, d. h. an dem von einer festen Wand berührten Theil ihrer Oberfläche in einer Schicht von sehr kleiner Dicke *w* ein innerer Zustand vorauszusetzen, welcher in Folge der Molekularkräfte von dem der homogenen übrigen Flüssigkeit verschieden ist. Dabei kann aber die mittlere Dichtigkeit dieser Wand-Oberflächenschicht grösser oder kleiner, als die der übrigen Flüssigkeit sein je nach dem Verhältnisse der Cohäsions- und der Adhäsionskräfte, d. h. der Molekularkräfte, welche zwischen den Flüssigkeitsmolekülen gegenseitig sowie zwischen ihnen und den Wandmolekülen stattfinden. Bezeichnet also α die Arbeit zur Umwandlung homogener Flüssigkeit in eine Flächeneinheit der Wand-Oberflächenschicht, so kann diese sogenannte Adhäsionsconstante α (im Gegensatze zu der stets positiven Cohäsionsconstanten β) je nach Umständen positiv oder negativ sein. Von dem Verhältnisse der Constanten α und β und vom Vorzeichen der ersteren hängt der sogenannte Randwinkel φ ab, d. h. der Winkel, unter welchem im Gleichgewichtszustande die freie und die Wand-Oberfläche in der Randlinie sich schneiden.

Dies zu erkennen, sei die Ebene von Fig. 20 die Normalebene der Randlinie im Punkte A, AW ein Element ihres Schnitts mit der Wandfläche, AF ein Element ihres Schnitts mit der freien Oberfläche. Der Winkel WAF ist dann der entsprechende Randwinkel φ, welcher als derjenige spitze oder stumpfe Winkel verstanden wird, um welchen der Schenkel AW oder AF durch die Flüssigkeit hindurch gedreht werden muss, um in die Richtung des anderen zu gelangen. Ist nun $AA' = ds$ ein Element der

Fig. 20.

werden ...
las Linie...
r letzteren
s feste un-
er anzuwe-
eine solche
r die freie
n Wänden
lich kleine

Strecke $\delta n = AB = FG$ in normaler Richtung nach aussen und ein endlich grosses Stück der horizontalen Oberfläche innerhalb einer (wie §. 59) gedachten, dasselbe umschliessenden indifferenten verticalen Cylinderfläche um eine entsprechende Strecke einwärts (nach unten) fortrückt. Die Summe der entsprechenden virtuellen Arbeiten des äusseren Drucks, der Schwere und der Molekularkräfte muss dann wieder = Null sein.

CBG und $C'B'G'$ seien die neuen Schnitte der freien Oberfläche mit den Ebenen der Randwinkel WAF und $W'A'F'$, $AC = \delta a$, $BC = \delta b$. Nun ist zuvörderst die Arbeit des äusseren Drucks p_0 wieder für sich = Null, wie immer, weil die Inhalte der verschobenen Theile der freien Oberfläche ihren normalen Verschiebungen umgekehrt proportional sind. Die Arbeiten der Schwere und der Molekularkräfte, welche der Versetzung eines Flüssigkeitsvolumens $= \overline{ACGF} \,.\, \overline{AA'}$ von der Höhe der horizontalen Oberfläche in die Höhe des Punktes A, sowie der Grössenänderung des Elementes $\overline{AF} \,.\, \overline{AA'}$ der freien Oberflächenschicht in $\overline{BG} \,.\, \overline{BB'}$ entsprechen, sind unendlich klein dritter Ordnung, und können deshalb vernachlässigt werden im Vergleich mit den unendlich kleinen Molekulararbeiten zweiter Ordnung

$= \alpha . \overline{AC} \,.\, \overline{AA'} = \alpha \delta a ds$ zur Verwandlung homogener Flüssigkeit in Wand-Oberflächenschicht, und

$= - \beta \,.\, \overline{BC} \,.\, \overline{BB'} = - \beta \delta b ds$ zur Verwandlung homogener Flüssigkeit in freie Oberflächenschicht. Die Summe der letzteren Arbeiten muss also für sich = Null sein, woraus folgt.

$$\frac{\delta b}{\delta a} = \cos \varphi = \frac{\alpha}{\beta} \dots\dots\dots\dots\dots (1).$$

Bei gegebenen Zuständen der freien und der Wand-Oberflächenschicht ist also der Randwinkel eine constante Grösse, und ist sein Cosinus = dem Verhältniss der Adhäsions- und der Cohäsionsconstanten. Auch der Constanten α kann eine andere Deutung gegeben werden, welche der Bedeutung von β als einer in der freien Oberflächenschicht stattfindenden Spannung entspricht. Vermöge der letzteren wird nämlich auf den Flüssigkeitsfaden, in welchem sich die freie und die Wand-Oberflächenschicht am Rande durchdringen, eine Kraft $= \beta$ pro Längeneinheit im Sinne AF (Fig. 20) ausgeübt. Dieselbe zerfällt in eine zur Wand normale Componente $= \beta \sin \varphi$ und in eine Componente $= \beta \cos \varphi$ nach der Richtung AW. Letztere, nach Gl. (1) $= \alpha$, muss mit einer gleichen und entgegengesetzten, in der Wand-Oberflächenschicht auf den Randfaden ausgeübten Kraft im Gleichgewicht sein, und es kann also die Adhäsionsconstante α als

die Grösse einer Pressung der Wand-Oberflächenschicht pro Längeneinheit eines Normalschnitts derselben betrachtet werden, so dass $\frac{\alpha}{w}$ den Mittelwerth der entsprechenden Pressung pro Flächeneinheit bedeutet. Dieselbe ist offenbar als ebenso gleichförmig nach allen Richtungen in der Wandschicht wie die Spannung β in der freien Oberflächenschicht zu betrachten; doch kann sie positiv oder negativ, eine eigentliche Pressung oder Spannung sein, jenachdem φ spitz oder stumpf, also α positiv oder negativ, die Wandschicht dichter oder weniger dicht, als die übrige Flüssigkeit ist.

Eine grössere Dichtigkeit der Wandschicht ist dem Umstande zuzuschreiben, dass sie von der angrenzenden Wand stärker, als von der benachbarten homogenen Flüssigkeit angezogen wird, so dass das Gleichgewicht eine entsprechende Zunahme der Abstossung durch grössere Annäherung der Moleküle erfordert. Wenn in diesem Falle, welcher einem positiven Werth von α und einem spitzen Randwinkel entspricht, eine relative Bewegung der Flüssigkeit längs der Wand im Sinne AW (Fig. 20) stattfindet, wenn man etwa die Wand im Sinne WA bewegt, so wird sie genetzt, d. h. es bleibt eine dünne Flüssigkeitsschicht an der Wand haften, und zwar (abgesehen von den Einflüssen der Schwere, der Reibung und der Verdunstung) eine Schicht von der Dicke $w+f$, weil auch die dichtere Wandschicht auf die angrenzende Flüssigkeitsschicht mit grösserer Anziehung festhaltend wirkte, wie die andererseits benachbarte homogene Flüssigkeit. Diese die Wand netzende Flüssigkeitsschicht verhält sich in dem Theile von der Dicke w zunächst der Wand wie eine dichtere Wand-Oberflächenschicht, in dem äusseren Theile von der Dicke f wie eine freie Oberflächenschicht. Wäre in Fig. 20 die feste Wand oberhalb der Randlinie in solcher Weise benetzt, so würde der virtuellen Verrückung der freien Oberfläche von AF nach CG nicht sowohl eine Neubildung von Wandschicht an AC, als vielmehr eine entsprechende Verwandlung von freier Oberflächenschicht daselbst in homogene Flüssigkeit entsprechen; in Gl. (1) ist dann β statt α zu setzen, und ergiebt sich $\varphi = 0$, d. h. an einer benetzten Wand ist der Randwinkel = Null. Damit eine Benetzung einer Wand durch eine Flüssigkeit stattfinden könne, muss der entsprechende Randwinkel bei trockener unbenetzter Wand spitz sein.

Die Verdichtung der Wandschicht einer Flüssigkeit an der Oberfläche eines von ihr benetzbaren festen Körpers wurde von Wilhelmy* dadurch experimentell nachgewiesen, dass er das scheinbare Gewicht des in

* Poggendorff's Annalen. Bd. 119, S. 177.

Flüssigkeit theilweise eingetauchten und an einer Wage hängenden Körpers etwas, und zwar um so mehr, je grösser die Oberfläche des eingetauchten Körpertheils war, grösser fand, als es nach der Rechnung bei Berücksichtigung der am Rande gehobenen und von der Wage mit zu tragenden Flüssigkeit sich ergiebt, falls dabei die verdrängte Flüssigkeit mit ihrem specifischen Gewicht als **homogene** Flüssigkeit zur Bestimmung des Gewichtsverlustes (des Auftriebs) in Rechnung gebracht wird. —

Eine directe Bestimmung der Constanten β und α gemäss Gl. (4) im vorigen und Gl. (1) in diesem §. durch Messung der Oberflächenkrümmung und des Randwinkels einer Flüssigkeit ist kaum oder nur schwierig ausführbar; es pflegen vielmehr ihre Werthe aus solchen mehr oder weniger zusammengesetzten, aber leichter und sicherer messbaren Erscheinungen abgeleitet zu werden, welche von den Gesetzen des Cohäsionsdruckes und des Randwinkels abhängen und in deren theoretische Ausdrücke deshalb jene Constanten eintreten. Dahin gehört namentlich die Hebung oder Senkung der Flüssigkeiten an festen Wänden, zwischen zwei sehr nahen Wänden und in engen Röhren (Capillarröhren); die Sicherheit der Bestimmungen wird indessen auch hierbei ausser durch die Schwierigkeit der betreffenden Messungen an sich besonders dadurch sehr erschwert, dass scheinbar geringfügige Umstände (Staub, Feuchtigkeit, Oxydation etc.) einen wesentlichen Einfluss auf die Beschaffenheit der Wände und der Flüssigkeit an der Oberfläche und dadurch auf die Gesammtheit der Erscheinungen ausüben; auch von der Temperatur sind sie merklich abhängig.

Im Folgenden wird im Allgemeinen von der **Hebung** durch Molecularwirkung die Rede sein, weil dieser Fall für die Anwendungen am wichtigsten ist; er setzt voraus, dass die Wand durch die Flüssigkeit benetzbar, der Randwinkel also spitz ist, wobei wieder der Specialfall am meisten Interesse bietet, dass die Benetzung wirklich stattfindet, der Randwinkel also = Null ist. Abgesehen von diesem Specialfall ergeben sich übrigens aus den Gesetzen der Hebung ohne Weiteres auch diejenigen der durch unbenetzbare Wände bewirkten Senkung von Flüssigkeiten, z. B. des Quecksilbers an Glaswänden, in Glasröhren, von Wichtigkeit namentlich zur Correction mancher physikalischer Messungen.

Wenn in jenem Falle der theilweisen Erhebung einer Flüssigkeit unter z die Höhe eines Punktes der gekrümmten über der horizontalen freien Oberfläche verstanden wird, so sind auch in Gl. (4), §. 59 die Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ' der betreffenden Normalschnitte unter entgegengesetzten Umständen positiv oder negativ, wie früher, nämlich positiv für eine nach aussen (nach oben) concave Krümmung.

§. 61. Gewicht der gehobenen Flüssigkeit.

Unter der gehobenen Flüssigkeit werde diejenige verstanden, welche den Raum erfüllt oder erfüllen könnte, der von der ausgebreitet gedachten horizontalen Oberfläche H, von der gehobenen und gekrümmten Oberfläche $= F$ und von der durch die Randlinie $= s$ gehenden verticalen Cylinderfläche begrenzt wird. Ist dF ein Element der gehobenen Oberfläche, z seine Erhebungshöhe über H und dF' seine Horizontalprojection, so ist also das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit:

$$P = \int \gamma z \, dF'$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (4) in §. 59, wenn $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{\varrho'}$ die Krümmungen von F an der Stelle des Elementes dF nach irgend zwei sich rechtwinklig schneidenden Richtungen bedeuten,

$$P = \int \beta \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) dF'.$$

Das Integral umfasst die ganze Fläche F. Nach der in §. 59 angestellten Betrachtung ist aber $\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) dF$ die algebraische Summe der normal zu dF auswärts gerichteten, folglich $\beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) dF'$ die algebraische Summe der vertical aufwärts gerichteten Componenten der Kräfte $= \beta$ pro Längeneinheit, mit welchen auf den Rand des dem Flächenelemente dF entsprechenden Theils der freien Oberflächenschicht der übrige Theil dieser Schicht ringsum ziehend wirkt, und da bei der fraglichen Summation oder Integration sich jene Kraftcomponenten paarweise aufheben bis auf diejenigen, welche dem Rande der Fläche F angehören, so folgt

$$P = \beta \int ds \, . \cos \sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

unter σ den Winkel verstanden, den der Schenkel AF (Fig. 20) des Randwinkels an der Stelle des Elementes ds der Randlinie mit der Lothrechten bildet.

Denkt man durch das Element $AA' = ds$ der Randlinie und durch die Lothrechte AV eine Ebene gelegt, so wird dieselbe von der zu AA' senkrechten Ebene des Randwinkels $FAW = \varphi$ (Fig. 20) normal geschnitten in der Geraden AV', welche mit AA' einen rechten Winkel, mit AV also denselben Winkel bildet, unter welchem AA' gegen den Ho-

rizont geneigt ist. Indem nun AF, AV und AV' die Kanten eines an AV' rechtwinkeligen körperlichen Dreiecks sind, ist

$$\cos\sigma = \cos(VAF) = \cos(VAV') . \cos(FAV')$$

und somit nach Gl. (1)

$$P = \beta \int ds' \cos\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

wenn mit $ds' = ds . \cos(VAV')$ das Element der Horizontalprojection der Randlinie und mit ψ der Winkel FAV' bezeichnet wird, den der Schenkel AF des Randwinkels mit der verticalen Berührungsebene $A'AV$ der Randlinie bildet. Ist die Wand vertical (eine verticale Cylinderfläche), so ist die Ebene $A'AV$ ihre Berührungsebene, also ψ = dem constanten Randwinkel φ und

$$P = \beta s' \cos\varphi = \alpha s' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

insbesondere bei benetzter Wand ($\varphi = 0$):

$$P = \beta s'.$$

Die Constanten α und β sind hiernach = den Flüssigkeitsgewichten, welche an einer benetzbaren verticalen Wand, jenachdem sie trocken oder benetzt ist, pro Längeneinheit der Horizontalprojection ihrer Randlinie gehoben werden.

Dieses Gesetz, welches in der allgemeineren Form von Gl. (3) auch für den Fall einer unbenetzbaren Wand gilt, falls unter P in leicht ersichtlich entsprechender Weise das Gewicht der gesenkten Flüssigkeit verstanden wird, kann zur Bestimmung der Constanten α und β durch Wägung benutzt werden. Wird z. B., wie es von Wilhelmy (siehe die Bemerkung am Ende des vorigen §.) geschehen ist, das scheinbare Gewicht eines cylindrischen Körpers, wenn er in verticaler Lage an einer Wage hängend theilweise in eine netzende Flüssigkeit eingetaucht ist, bei benetzter Oberfläche = Q ermittelt, so hat man, wenn G das Gewicht des Körpers in der Luft, U seinen Umfang, V das Volumen der verdrängten Flüssigkeit bis zur horizontalen Oberfläche gerechnet), γ das specif. Gewicht der letzteren und O die eingetauchte Körperoberfläche bedeutet,

$$Q = G - \gamma V + \beta U + \delta O.$$

Das letzte Glied = δO entspricht dem Umstande, dass die am Körper haftende verdichtete Flüssigkeitsschicht bei der Wägung als ein Theil des Körpers zu betrachten ist, so dass, da sie auch einen entsprechenden Gewichtsverlust oder Auftrieb erfährt, der Coefficient δ das Product aus der Dicke dieser Schicht und dem Ueberschuss ihres mittleren specif. Gewichtes über dasjenige = γ der homogenen Flüssigkeit bedeutet. Durch

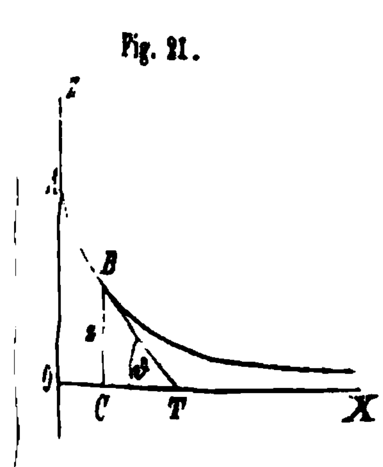
Wiederholung des Versuches für eine andere Eintauchungstiefe erhält man eine entsprechende Gleichung

$$Q' = G - \gamma V' + \beta U + \delta O',$$

aus welcher in Verbindung mit der vorigen Gleichung die Unbekannten β und δ gefunden werden können, da die übrigen Grössen bekannt oder anderweitig bestimmbar sind.

Dasselbe Verfahren kann bei Benutzung eines Körpers von nicht benetzbarer Oberfläche zur Bestimmung der Constanten α dienen, wogegen es kaum möglich sein würde, bei netzbarer Oberfläche die wirkliche Benetzung dauernd und sicher zu hindern, also die Constante α auf solche Weise zu bestimmen. —

Wenn ein solcher gerader, z. B. cylindrischer Stab vom Umfange U in eine netzende Flüssigkeit vertical eingetaucht und wieder empor gezogen wird, so bleibt ein Tropfen an ihm hängen, welcher abfällt, wenn sein Gewicht die am Umfange vertical aufwärts wirkende Molekularkraft $= \beta U$ um eine verschwindend kleine Grösse übertrifft; die Wägung eines solchen abgefallenen Flüssigkeitstropfens kann somit auch zur Bestimmung von β dienen. Im Vergleich mit dem oben betrachteten Falle findet hier nur der im Princip unwesentliche Unterschied statt, dass, während die gehobene Flüssigkeit dort unten an ihrer gespannten krummen Oberflächenschicht gewissermassen hing, sie hier von oben auf ihr ruht bis zum Augenblicke des Abtropfens. Indem das Gewicht oder Volumen des eben noch anhängenden Tropfens dem Umfange U, also dem Durchmesser des Stabes, seine Grundfläche aber dem Quadrat dieses Durchmessers proportional ist, so muss seine mittlere Dicke oder Höhe dem Stabdurchmesser



enthaltend. Wird diese Curve AB, deren Krümmungshalbmesser in dem beliebigen Punkte $B = \varrho$ sei, auf die rechtwinkeligen Axen OX und OZ bezogen, jene in der horizontalen Wasseroberfläche gelegen, diese durch den Punkt A der Randcurve gehend, so ist nach §. 59, Gl. (4) mit $\varrho' = \infty$ die Erhebung des Punktes B

$$BC = z = \frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right) = \frac{\beta}{\gamma}\,\frac{1}{\varrho}$$

oder, unter ds ein Bogenelement der Curve AB und unter ϑ den spitzen Winkel ihrer Tangente BT mit der x-Axe verstanden, wegen

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta}{dz}\sin\vartheta$$

$$z\,dz = \frac{\beta}{\gamma}\sin\vartheta\,d\vartheta$$

und daraus mit Rücksicht darauf, dass $\vartheta = 0$, $z = 0$ zusammengehörige Werthe sind, und wenn

$$2\frac{\beta}{\gamma} = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gesetzt wird,

$$z^2 = a^2(1 - \cos\vartheta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Ist die Wand vertical und φ der Randwinkel, so ist die grösste Erhebung

$$OA = h = a\sqrt{1 - \sin\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

entsprechend $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$; a ist die grösste Erhebung an der benetzten verticalen Wand. Hagen* fand dieselbe durch Messung für destillirtes und für Brunnenwasser nahe gleich, auch unabhängig vom Material und von der Oberflächenbeschaffenheit der eingesenkten, wenn nur in allen Fällen gehörig benetzten Platte, wie es in der That die Bedeutung von β erfordert; dagegen zeigte sich a, also auch β und die Oberflächenbeschaffenheit des Wassers insofern nicht constant, als bei einer frisch hergestellten Oberfläche a am grössten war und dann mit abnehmender Schnelligkeit abnahm etwa von

$$a = 3{,}49 \text{ bis } 3{,}07 \text{ Millim.},$$

* Ueber die Oberfläche der Flüssigkeiten; Abhandl. der Akademie der Wissensch. zu Berlin, 1845 und 1846.

entsprechend $a^2 = 12{,}2$ bis $9{,}4$ . . . . 4.

Indem $\gamma = 1$ Milligr. pro 1 Cubikmillim. Wasser ist, so würde nach Gl. 1 hieraus folgen, jenachdem β als Spannung oder als Arbeit betrachtet wird (§. 59),

$$\beta = \frac{a^2}{2} = 6{,}1 \text{ bis } 4{,}7$$

Milligr. pro 1 Millim. resp. Milligramm-Millim. pro 1 Quadratmillim. oder ebenso viel Gramm pro 1 Meter Breite eines Oberflächenstreifens resp. Gramm-Mtr. pro 1 Quadratmeter Oberfläche.

Um die Gleichung der Curve AB zu finden, mag auch x als Function von ϑ entwickelt, zuvor aber nach Gl. (2) gesetzt werden:

$$z = a\sqrt{2}\,.\sin\frac{\vartheta}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 5.$$

Daraus folgt

$$dz = a\sqrt{2}\,.\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\frac{\vartheta}{2} = -dx\,tg\,\vartheta$$

$$dx = -a\sqrt{2}\,\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\frac{\vartheta}{2} = -a\sqrt{2}\,\frac{1-2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}}\,d\frac{\vartheta}{2}$$

und wenn $\vartheta = \vartheta_0$, $z = z_0$ für $x = 0$ gesetzt wird,

$$x = a\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\int_{\vartheta}^{\vartheta_0}\frac{d\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta}\sin\frac{\vartheta}{2}\,d\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$= a\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\,ln\,\frac{tg\frac{\vartheta_0}{4}}{tg\frac{\vartheta}{4}} + \cos\frac{\vartheta_0}{2} - \cos\frac{\vartheta}{2}\right) \quad \ldots \ldots \quad 6.$$

Zur Elimination von ϑ zwischen dieser Gleichung und Gl. (5) hat man nach der letzteren

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{1-\frac{z^2}{2a^2}} = \frac{\sqrt{2a^2-z^2}}{\sqrt{2a^2}}$$

$$tg\frac{\vartheta}{4} = \frac{\sin\frac{\vartheta}{2}}{1+\cos\frac{\vartheta}{2}} = \frac{z}{\sqrt{2a^2}+\sqrt{2a^2-z^2}}$$

und entsprechend $\cos\frac{\vartheta_0}{2}$ und $tg\frac{\vartheta_0}{4}$ mit $z = z_0$; folglich

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2} . ln\left(\frac{\sqrt{2a^2} + \sqrt{2a^2 - z^2}}{\sqrt{2a^2} + \sqrt{2a^2 - z_0^2}}\frac{z_0}{z}\right) + \sqrt{2a^2 - z_0^2} - \sqrt{2a^2 - z^2} . (7)$$

als allgemeine Gleichung des Querschnitts der krummen Oberfläche, einerlei ob die Wand vertical oder geneigt, benetzt oder unbenetzt ist; für $z = 0$ ist $x = \infty$. Ist die Wand vertical, so ist, wenn sie unbenetzt ist, $z_0 = h$ nach Gl. (3), wenn sie benetzt ist, $z_0 = a$. Für diesen letzteren Fall hat **Hagen** die Gleichung (7) in sehr befriedigender Uebereinstimmung mit seinen Messungen gefunden, wie die folgende Zusammenstellung der für **Wasser** beobachteten Werthe z, x und der nach Gl. (7) berechneten Werthe x, alle in Pariser Linien ausgedrückt, erkennen lässt:

$z =$	1,37	0,70	0,49	0,34	0,12	0,04	beobachtet,
$x =$	0,00	0,31	0,63	0,94	1,88	3,13	„
$x =$	0,00	0,33	0,63	0,96	1,95	3,01	berechnet.

Dieselbe Gleichung (7) gilt auch für den Querschnitt der an einer unbenetzbaren Wand abwärts gekrümmten freien Oberfläche, wenn nur die z-Axe entgegengesetzt genommen wird, so dass z eine Senkung unter die horizontale Oberfläche bedeutet.

§. 63. Capillarität.

Unter dem Begriff der Capillarität wird häufig die Gesammtheit der Erscheinungen zusammengefasst, welche von den Molekularkräften der Flüssigkeiten und der sie begrenzenden festen Wände herrühren; hier sollen darunter im engeren Sinne nur die Erscheinungen der **Hebung und Senkung von Flüssigkeiten zwischen sehr nahen Wänden**, in engen Röhren, sogenannten **Capillarröhren** (Haarröhren), verstanden werden. Ist für eine solche als cylindrisch (im weiteren Sinne des Wortes) vorausgesetzte Röhre, welche vertical in eine Flüssigkeit eingetaucht sei,

F der Querschnitt im Lichten,
U der Umfang desselben,
$r = \frac{2F}{U}$ sein mittlerer Halbmesser (= dem wirklichen Halbmesser bei kreisförmigem Querschnitt),
h die mittlere Erhebungshöhe = der Höhe einer Flüssigkeitssäule von der Grundfläche F, deren Volumen = dem gehobenen Flüssigkeitsvolumen ist, und wird wieder
$a^2 = 2\frac{\beta}{\gamma}$ gesetzt wie im vorigen §.,

so ist nach §. 61, Gl. (3) das gehobene Flüssigkeitsgewicht

$$P = \beta\, U \cos\varphi = \gamma\, F h,$$

folglich

$$h = \frac{\beta}{\gamma}\,\frac{U}{F}\cos\varphi = \frac{a^2}{r}\cos\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 1)$$

vorausgesetzt dass der Randwinkel φ ringsum gleich ist.

Diese mittlere Höhe h, welche nach vorstehender Gleichung allgem[ein] dem mittleren Halbmesser r oder dem mittleren Durchmesser $= 2r$ d[er] Röhre umgekehrt und dem Cosinus des Randwinkels direct proportion[al] [is]t, wird aber nicht unmittelbar beobachtet, sondern vielmehr die kleinste H[öhe] $= h_0$ des Scheitelpunktes der krummen Oberfläche und die grösst[e] H[öhe] $= h_1$ der Randlinie, letztere zunächst als horizontal vorausgesetzt. [Di]e genaue Bestimmung dieser Höhen h_0 und h_1 würde die Gleichung d[er] [ge]hobenen Oberfläche erfordern, welche sich indessen in geschlossener F[orm] selbst in einfachen Fällen, z. B. schon im Falle einer kreisförmig cy[lin]drischen Röhre nicht entwickeln lässt. Wird aber die Gleichung der O[ber]fläche möglichst einfach den Verhältnissen angepasst, übrigens willk[ürlich] und so angenommen, dass sie zwei zu bestimmende Parameter enthält, [von] welchen der eine die Höhenlage, der andere die Form der Fläche b[estimmt], so kann zunächst jener, also die Höhenlage der Fläche mit Rücksi[cht] [da]rauf bestimmt werden, dass das gehobene Flüssigkeitsvolumen $= Fh$ [sein] muss, wonach h_0 und h_1 als Functionen des anderen Parameters [aus]zu[drücken] sind. Durch denselben können dann auch die mittleren Kr[üm]mungen der Normalschnitte, d. h. die Grössen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right)$$

$= \frac{1}{\varrho_0}$ für den Scheitelpunkt und $= \frac{1}{\varrho_1}$ für die Punkte der Randlinie [aus]gedrückt, und kann schliesslich der fragliche Parameter gemäss der [Be]dingung bestimmt werden, dass nach §. 59, Gl. (4)

$$h_1 - h_0 = 2\,\frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_0}\right) = a^2\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad \ldots\ldots$$

sein muss. Auf solche Weise können die Höhen h_0 und h_1 um so w[eniger] fehlerhaft gefunden werden, je weniger sie von der durch Gl. (1) bestimmten mittleren Höhe verschieden sind, je kleiner also $\frac{h_1 - h_0}{h}$ [is]t

nach Gl. (1), indem $h_1 - h_0$ eine mit r vergleichbare Grösse sein muss, je kleiner $\frac{r}{a}$ ist; die Erfahrung lehrt übrigens, dass $\frac{h_1 - h_0}{h}$ oder $\frac{r}{a}$ durchaus nicht sehr kleine Brüche zu sein brauchen, um auf die angegebene Weise eine genügende Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen von h_0 und h_1 zu erzielen.

Eine horizontale Randlinie, wie sie hier vorausgesetzt wurde, kann freilich bei constantem Randwinkel φ streng genommen nur in den beiden sogleich näher zu betrachtenden Grenzfällen stattfinden, in welchen sie aus zwei parallelen Geraden besteht oder ein Kreis ist. In anderen Fällen müsste eine entsprechend grössere Zahl von Parametern in der angenommenen Gleichung der Oberfläche so bestimmt werden, dass für verschiedene ausgezeichnete Punkte der Randlinie die Bedingung (2) erfüllt wird.

1) Bei der Erhebung einer Flüssigkeit zwischen zwei parallelen und verticalen ebenen Wänden, deren Entfernung $= d = 2e$ und deren Breite viel Mal grösser sei, ist die krumme Oberfläche gegen die Mitte der Wandbreite hin eine Cylinderfläche, welche die Wände in zwei horizontalen Geraden als Randlinien berührt oder schneidet jenachdem die Wände benetzt sind oder nicht. Für einen Theil der Flüssigkeit zwischen zwei Verticalebenen, die in der Entfernung $= 1$ die Wände rechtwinkelig schneiden, ist dann

$$F = d, \quad U = 2, \quad r = \frac{2F}{U} = d,$$

so nach Gl. (1) im Falle der Benetzung:

$$h = \frac{a^2}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Wird als Querschnitt der cylindrischen Oberfläche eine halbe Ellipse mit der verticalen Halbaxe e_0 angenommen, so ergiebt sich zunächst aus der Bedingung

$$Fh = 2eh = 2eh_1 - \frac{\pi}{2} ee_0$$

$$h_1 = h + \frac{\pi}{4} e_0; \quad h_0 = h_1 - e_0 = h - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) e_0 \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Von den Krümmungshalbmessern ϱ und ϱ' der Hauptschnitte ist der eine unendlich, der andere für die Punkte

$$\text{der Randlinie} = \frac{e_0^2}{e}, \text{ also } \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{2} \frac{e}{e_0^2},$$

$$\text{der Scheitellinie} = \frac{e^2}{e_0}, \text{ also } \frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{2} \frac{e_0}{e^2}.$$

Nach Gl. (2) ist somit

$$h_1 - h_0 = e_0 = \frac{a^2}{2}\left(\frac{e}{e_0^{\,2}} - \frac{e_0}{e^2}\right)$$

und folgt daraus

$$\left(\frac{e}{e_0}\right)^3 = 1 + 2\frac{e^2}{a^2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{d^2}{a^2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{d}{h}$$

$$e_0 = \frac{1}{2}\frac{d}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}\frac{d}{h}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Es fand z. B: Hagen für Brunnenwasser im Mittel aus mehreren M-
sungen

$$a = 1{,}38; \quad h_1 = 2{,}09; \quad h_0 = 1{,}55 \text{ Pariser Linien.}$$

Daraus würde folgen:

$$e_0 = h_1 - h_0 = 0{,}54$$

$$h = h_1 - \frac{\pi}{4}e_0 = 1{,}67$$

$$d = \frac{a^2}{h} = 1{,}14; \quad \frac{d}{h} = 0{,}683$$

und zur Controle aus Gl. (5)

$$e_0 = \frac{1}{2}\frac{1{,}14}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}683}} = 0{,}52$$

nahe übereinstimmend mit dem gemessenen Werthe von $e_0 = h_1 - h$
Uebrigens ist es bemerkenswerth, dass der auf solche Weise durch R
nung aus den gemessenen Erhebungshöhen a, h_1 und h_0 abgeleitete W
von d im Allgemeinen kleiner gefunden wird, als die durch directe M
sung bestimmte Entfernung der eingetauchten ebenen Platten; oder d
wenn in Gl. (3) für d die gemessene Entfernung der festen Wände ge
dann a grösser gefunden wird, als durch Messung der Erhebungshöhe
einer ebenen Wand, welcher nicht eine andere nahe gegenüber liegt (§. 6
Diese Thatsache, welche auch bei der Erhebung einer Flüssigkeit in b
netzten eigentlichen Capillarröhren hervortritt, ist wahrscheinlich d
Umstande zuzuschreiben, dass die Dicke $= b$ der benetzenden Schi
(nach den Bezeichnungen in §. 60 $= w + f$) nicht verschwindend kl
ist, die krumme Oberfläche aber nicht eigentlich von den festen Wänd

sondern von den freien Oberflächen der sie netzenden Flüssigkeitsschichten, d. h. von zwei Ebenen berührt wird, deren Entfernung

$$= d - 2b = d - 2(w + f)$$

ist. Nach einem der Hagen'schen Versuche, welcher von A. Beer* angeführt wird, war z. B. in Millimetern

$$a = 3{,}181; \quad h_1 = 4{,}748; \quad h_0 = 3{,}553,$$

und wurde die Entfernung der Platten (durch eine dazwischen befindliche dritte Platte) zu

$$d = 2{,}808 \text{ Millim.}$$

bestimmt, während die obigen Formeln mit

$$e_0 = h_1 - h_0 = 1{,}195; \quad h = h_1 - \frac{\pi}{4} e_0 = 3{,}810$$

ergeben würden: $d = \frac{a^2}{h} = 2{,}656$ Millim.

entsprechend $b = w + f = \frac{2{,}808 - 2{,}656}{2} = 0{,}076$ Millim.,

ein Werth, dessen auffallende Grösse freilich wohl zum Theil von Messungsfehlern herrühren mag.

2) Bei einer kreisförmig cylindrischen verticalen Röhre von der Weite $2r$ ist r zugleich der mittlere Halbmesser im Sinne von Gl. (1), also die mittlere Erhebungshöhe bei benetzter Rohrwand

$$h = \frac{a^2}{r} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (6).$$

Wird dann die Oberfläche der in der Röhre gehobenen Flüssigkeit als ein halbes Rotationsellipsoid betrachtet, dessen horizontale Halbaxen $= r$ sind, während die verticale Halbaxe in der Rotationsaxe $= r_0$ gesetzt wird, so ist wegen

$$Fh = \pi r^2 h = \pi r^2 h_1 - \frac{2}{3}\pi r^2 r_0$$

$$h_1 = h + \frac{2}{3} r_0; \quad h_0 = h - \frac{1}{3} r_0 \quad \dots\dots\dots (7).$$

Die Krümmungshalbmesser der Hauptschnitte sind

für die Randlinie: $\varrho = \frac{r_0^2}{r}$, $\varrho' = r$, also $\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_0^2} + \frac{1}{r}\right)$,

* Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität, S. 127.

für den Scheitelpunkt: $\varrho = \varrho' = \frac{r^2}{r_0}$, also $\frac{1}{\varrho_0} = \frac{r_0}{r^2}$.

Nach Gl. (2) ist folglich

$$h_1 - h_0 = r_0 = \frac{a^2}{2}\left(\frac{r}{r_0^2} + \frac{1}{r} - 2\frac{r_0}{r^2}\right)$$

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 + \frac{r}{r_0} = 2 + 2\frac{r^2}{a^2} = 2\left(1 + \frac{r}{h}\right) \quad \ldots\ldots\ldots$$

Hiernach ist, wenn $\frac{r}{h}$ ein kleiner Bruch ist, $\frac{r}{r_0} = 1 + x$ nur wenig > 1,

also näherungsweise

$$2 + 4x = 2\left(1 + \frac{r}{h}\right); \quad x = \frac{1}{2}\frac{r}{h}$$

$$r_0 = \frac{r}{1+x} = r\left(1 - \frac{1}{2}\frac{r}{h}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= h\left(1 + \frac{2}{3}\frac{r}{h} - \frac{1}{3}\frac{r^2}{h^2}\right) \\ h_0 &= h\left(1 - \frac{1}{3}\frac{r}{h} + \frac{1}{6}\frac{r^2}{h^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

Wenn man das letzte Glied vernachlässigt, also $r_0 = r$, d. h. die Oberfl. als Kugelfläche voraussetzt, so ergiebt sich aus der Gleichung

$$h_0 = h - \frac{1}{3}r = \frac{a^2}{r} - \frac{1}{3}r$$

$$a^2 = r\left(h_0 + \frac{r}{3}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 11$$

ein Ausdruck, welcher vorzugsweise zur Bestimmung der Constante a^2 benutzt worden ist. Dass dieselbe hierbei im Allgemeinen grösser gefunden wird, als bei unmittelbarer Messung der Erhebungshöhe a an einer einfachen ebenen Wand (§. 62), und zwar um so mehr grösser, je kleiner r ist, muss vermuthlich dem oben unter 1) erwähnten Umstande zugeschrieben werden, dass die Dicke $= b$ der die Rohrwand benetzenden Flüssigkeitsschicht eine mit dem Halbmesser r vergleichbare Grösse hat. Nach Gl. 11 folgt z. B. für Wasser aus Messungen von Bède,* bei welchen in Millimetern

$r =$	0,111	0,199	0,487	0,621	1,025
$h_0 =$	136,65	75,10	29,70	22,82	12,42 war,
$a^2 =$	15,17	14,96	14,54	14,30	13,08,

* Mém. de l'académie royale des sciences de Belgique, t. XXV.

im Mittel: $a^2 = 14,4$. Die hiernach offenbar gesetzmässige Veränderlichkeit von a^2 mit der Grösse von r kann angenähert dadurch in der Formel ausgedrückt werden, dass $r - b$ für r gesetzt und b entsprechend, nämlich so bestimmt wird, dass dem grössten und dem kleinsten Werthe von r nahezu gleiche Werthe von a^2 entsprechen. Bei dem neben h_0 verhältnissmässig kleinen Summand $\frac{r}{3}$ ist diese Correction unwesentlich; wird also

$$a^2 = (r - b)\left(h_0 + \frac{r}{3}\right)$$

gesetzt, so folgt aus obigen Versuchen z. B. mit $b = 0,015$ Millim.

$$a^2 = 13,12 \quad 13,83 \quad 14,09 \quad 13,95 \quad 12,89,$$

im Mittel: $a^2 = 13,6$.

Jener Mittelwerth $a^2 = 14,4$, welcher ohne die fragliche Correction von r abgeleitet wurde und sich auf eine Wassertemperatur von ungefähr 15° C. bezieht, stimmt nahe überein mit den analog gefundenen Resultaten anderer Beobachter, z. B. von Desains, Hagen und Quincke. Brunner, ebenso Frankenheim und Sondhauss constatirten einen merklichen Einfluss der Temperatur der Art, dass a^2 mit wachsender Temperatur abnimmt; insbesondere für Wasser ist nach Brunner* zu setzen:

$$a^2 = 15,32(1 - 0,00187\,t) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(12).$$

Mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit von γ muss die Cohäsionsconstante $\vartheta = \frac{1}{2}\gamma a^2$ in noch etwas höherem Grade mit wachsender Temperatur abnehmen. —

Der Fall einer unbenetzten Rohrwand ist von Wichtigkeit nur dann, wenn dieselbe überhaupt nicht benetzt werden kann, d. h. wenn der Randwinkel φ stumpf ist. Die mittlere Erhebungshöhe h wird dann nach Gl. (1) negativ; ihr Absolutwerth, nämlich

$$-h = t = -\frac{a^2 \cos\varphi}{r} = \frac{a^2 \sin\varphi'}{r} \text{ mit } \varphi = 90^0 + \varphi' \;\ldots\; (13)$$

bedeutet dann die mittlere Tiefe der convexen Oberfläche innerhalb der Röhre unter der horizontalen ausserhalb derselben. Von besonderem Interesse ist diese sogenannte Capillardepression für Quecksilber in Glasröhren zur Correction der Ablesungen von Barometern und Manometern. Diese Ablesungen beziehen sich aber auf den Scheitel der Quecksilberkuppe, und um dessen Depression

* Pogg. Ann. Bd. 70, S. 515.

$$t_0 = t - f = \frac{a^2 \sin \varphi'}{r} - f \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; 14$$

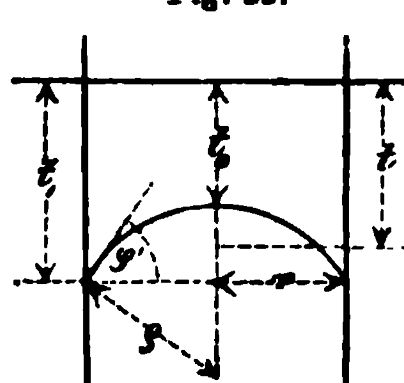
zu erhalten, muss von t eine Grösse f abgezogen werden, welche durch die Gestalt der Oberfläche bestimmt ist, nämlich, wenn t_1 die Depression der Randcurve bedeutet,

$$f = t - t_0 = t_1 - t_0 - (t_1 - t) = f_1 - (t_1 - t) \; \ldots\ldots \; 15$$

= dem Ueberschuss der ganzen Höhe f_1 über die mittlere Höhe $t_1 -$ ' der Quecksilberkuppe ist.

Wenn die Weite der Röhre eine gewisse Grenze (etwa 5 Millim. nicht überschreitet, kann die krumme Oberfläche des Quecksilbers als Kugelfläche vorausgesetzt werden; der Radius dieser Kugelfläche wäre dann, wie ein Blick auf Fig. 22 erkennen lässt,

Fig. 22.



$$\varrho = \frac{r}{\sin \varphi'}$$

und die Höhe der Quecksilberkuppe

$$f_1 = \varrho (1 - \cos \varphi') = r \frac{1 - \cos \varphi'}{\sin \varphi'} = r \, tg \frac{\varphi'}{2} \; \ldots \; 1$$

Die fragliche Voraussetzung ist also gerechtfertigt, so lange die Höhe f_1 der Kuppe nahe proportional der Rohrweite gefunden wird. Folgende Tabelle enthält einige solche zusammengehörige Werthe von r und f_1 in Millimetern nach Messungen von Bède.

r	f_1	$\frac{f_1}{r}$	r	f_1	$\frac{f_1}{r}$
0,199	0,15	0,7538	1,323	0,70	0,5[illegible]
0,576	0,20	0,3472	1,771	0,95	0,5[illegible]
1,025	0,50	0,4878	2,140	1,00	0,4[illegible]

Die entsprechenden Werthe von

$$tg \frac{\varphi'}{2} = \frac{f_1}{r}$$

sind freilich sehr verschieden, jedoch in ganz regelloser Weise; als Mittelwerth ergiebt sich

$$\varphi' = 55^0, \text{ also } \varphi = 145^0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Indem nun das Volumen des von der Quecksilberkuppe gebildeten Kugelabschnitts mit Rücksicht auf Gl. (16)

$$V = \frac{1}{6} \pi f_1 (3 r^2 + f_1{}^2) = \frac{1}{6} \pi f_1 \left(3 r^2 + r^2 tg^2 \frac{\varphi'}{2}\right),$$

also ihre mittlere Höhe

$$t_1 - t = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1}{6}\left(3 + tg^2 \frac{\varphi'}{2}\right) f_1 = 0{,}545 f_1$$

ist, wenn $\varphi' = 55^0$ gesetzt wird, so folgt aus Gl. (15)

$$f = (1 - 0{,}545) f_1 = 0{,}455 f_1 = 0{,}237\, r$$

und aus Gl. (14) schliesslich

$$t_0 = \frac{a^2 \sin \varphi'}{r} - 0{,}237\, r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Diese Depressionen t_0 der Quecksilberkuppe in engen Glasröhren sind u. A. auch von Bède gemessen worden. Einige der gefundenen Werthe nebst den entsprechenden Werthen von r, ausgedrückt in Millimetern, sind in der folgenden Tabelle enthalten;* sie beziehen sich auf eine Temperatur von ungefähr 17° C.

r	t_0	$a^2 \sin \varphi'$	r	t_0	$a^2 \sin \varphi'$
0,0492	101,90	5,014	0,199	25,53	5,090
0,0795	60,90	4,843	0,466	11,03	5,191
0,111	43,75	4,859	0,621	7,88	4,985

Die Tabelle enthält auch die nach Gl. (18) berechneten Werthe von $a^2 \sin \varphi'$, deren geringe Verschiedenheit ohne ausgesprochene Abhängigkeit von r eine Gleichung als zulässig für geringe Rohrweiten bestätigt; im Mittel ergiebt sich

$$a^2 \sin \varphi' = 5{,}00; \text{ mit } \varphi' = 55^0 \text{ also } a^2 = 6{,}104 \quad \ldots\ldots \quad (19).$$

Die Kenntniss der Depression t_0 des Quecksilbers in Glasröhren ist übrigens auch für solche Fälle Bedürfniss, in welchen die Rohrweite zu gross ist, als dass die Quecksilberkuppe mit genügender Annäherung wie ein Kugelabschnitt berechnet werden könnte. Für solche Fälle sind directe Messungen der Grösse f in Gl. (14) besonders werthvoll, wie sie von Danger** ausgeführt wurden, indem er auf den ebenen Rand der oberen Oeffnung einer vertical stehenden und ganz mit Quecksilber angefüllten Glasröhre eine Glasplatte deckte, durch Entfernung derselben die Quecksilberkuppe sich bilden liess und die Erhebung ihres Scheitels über die Randebene der Röhre $= f$ bestimmte; denn das Quecksilbervolumen, welches sich hierbei über die Randebene der Röhre in der Mitte erhob, musste natürlich demjenigen ringförmigen Volumen gleich sein, aus welchem

* Nach A. Beer's Einleitung in die mathem. Theorie der Elasticität und Capillarität, S. 135.

** Ann. de Chim. et de Phys., série III, t. XXIV, p. 501.

sich unterhalb jener Ebene das Quecksilber zurückzog, und war also die Erhebung des Kuppenscheitels über den Röhrenrand = dem Ueberschu[illegible] der ganzen über die mittlere Höhe der Quecksilberkuppe. Folgend[illegible] Tabelle enthält die bei einer Quecksilbertemperatur = 15° C. gefunden[illegible] Werthe in Millimetern.

$2r$	f	t_0	$2r$	f	t_0	$2r$	f	t_0
1	0,178	10,502	7	0,610	0,916	13	0,627	0,1[illegible]
2	0,310	5,030	8	0,630	0,705	14	0,610	0,15[illegible]
3	0,410	3,150	9	0,639	0,548	15	0,590	0,[illegible]
4	0,486	2,184	10	0,643	0,425	20	0,495	0,[illegible]
5	0,544	1,592	11	0,643	0,328	30	0,355	0,[illegible]
6	0,548	1,232	12	0,637	0,253	60	0,178	0,[illegible]

Diese Messungen bestimmen auch die Constante $a^2 \sin \varphi'$ und [illegible] nach Gl. (14) die Depression t_0. Je weiter nämlich die Röhre ist, [illegible] mehr nähert sich natürlich die Oberfläche des Quecksilbers gegen die M[illegible] hin einer Ebene und t_0 der Grenze Null; in der Grenze wird fr cons[illegible] $= a^2 \sin \varphi'$. Die Tabelle lässt nun erkennen, dass schon bei einer R[illegible] weite von 30 Millim. diese Grenze merklich erreicht wird, indem der [illegible] sprechende Werth von f doppelt so gross ist wie für $2r = 60$ Mil[illegible] Also ergiebt sich

$$a^2 \sin \varphi' = 30 \,.\, 0{,}178 = 5{,}34 \; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die hiermit berechneten Werthe von

$$t_0 = \frac{5{,}34}{r} - f,$$

welche in der Tabelle eingetragen wurden, sind mit den Beoba[illegible] fehlern der Einzelbestimmungen von f behaftet, und es würde [illegible] gleichung derselben am rationellsten sein, jene Werthe t_0 zun[illegible] Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Coefficienten A, B [illegible] einer Formel zu benutzen, welche analog der Gl. (10) in der Form

$$t_0 = \frac{A}{r} - Br + Cr^3$$

angenommen werden könnte, und dann schliesslich mit Hülfe di[illegible] eine corrigirte Tabelle zu berechnen.

Zur Vergleichung mag noch die folgende Tabelle* hier Pla[illegible] welche Bouward nach Laplace berechnete und welche häufig [illegible]

* Nach Mousson's „Physik auf Grundlage der Erfahrung". [illegible] Bd. I, S. 265.

rection der Ablesungen manometrischer Instrumente, bei denen Quecksilber in Glasröhren die manometrische Flüssigkeit ist, seither benutzt wurde.

2r	t_0	2r	t_0	2r	t_0	2r	t_0	2r	t_0
2	4,560	6	1,148	10	0,420	14	0,160	18	0,059
3	2.902	7	0,881	11	0,351	15	0,124	19	0,043
4	2.039	8	0,685	12	0,260	16	0,097	20	0,035
5	1.505	9	0,535	13	0,205	17	0,075		

Danger (siehe oben) bestimmte auch die ganze Höhe f_1 der Quecksilberkuppe, und es kann namentlich der Werth, welcher für die Röhre on 60 Millim. Durchm. durch die Messung gefunden wurde, in Verbindung it dem nach Gl. (20) schon ermittelten Werthe von $a^2 \sin\varphi'$ zur angeäherten Bestimmung von φ' und a^2 benutzt werden. In diesem Falle ist ämlich $t_0 = 0$, also $f_1 = t_1$ und somit nach §. 59, Gl. (4), wenn für die unkte der Randlinie ϱ den Krümmungshalbmesser der zu ihr senkrechten ormalschnitte (der Meridiane) der krummen Oberfläche bedeutet,

$$\gamma f_1 = \beta\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{\sin\varphi'}{r}\right) \text{ oder } f_1 = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{\sin\varphi'}{r}\right)$$

egen $a^2 = 2\frac{\beta}{\gamma}$ und weil die Krümmungshalbmesser der die Randlinie beührenden Normalschnitte $= \frac{r}{\sin\varphi}$, sind. Für $r = \infty$ ist f_1 die grösste epression des Quecksilbers an einer ebenen verticalen Glaswand, also ch §. 62, Gl. (3)

$$= a\sqrt{1 - \sin\varphi} = a\sqrt{1 - \cos\varphi'} = \sqrt{2a^2 \sin^2\frac{\varphi'}{2}} = \sqrt{a^2 \sin\varphi' \, tg\,\frac{\varphi'}{2}};$$

mit ist auch, wenn man annimmt, dass ϱ bei der 60 Millim. weiten öhre denselben Werth hat wie bei einer ebenen Wand,

$$f_1 = \sqrt{a^2 \sin\varphi' \, tg\,\frac{\varphi'}{2}} + \frac{a^2 \sin\varphi'}{2r}$$

d folgt daraus mit $a^2 \sin\varphi' = 5,34$

$$tg\,\frac{\varphi'}{2} = \frac{\left(f_1 - \frac{5,34}{2r}\right)^2}{5,34}.$$

em nun Danger $f_1 = 1,718$ für $r = 30$ Millim. fand, ergiebt sich

$$\varphi' = 52^0\, 51', \text{ also } a^2 = \frac{5,34}{\sin\varphi'} = 6,70.$$

Würde nicht ϱ, sondern die Maximaldepression als gleich für die 60 Millim. weite Röhre und für die ebene Wand angenommen, so wäre

$$f_1 = \sqrt{a^2 \sin\varphi' \, tg \frac{\varphi'}{2}} \; ; \; tg \frac{\varphi'}{2} = \frac{f_1^2}{5{,}34}$$

und danach mit $f_1 = 1{,}718$

$$\varphi' = 57^0\, 52', \text{ also } a^2 = \frac{5{,}34}{\sin\varphi'} = 6{,}31.$$

Die wahren Werthe von φ' und a^2, welche diesen Versuchen entsprechen, liegen vermuthlich zwischen den obigen Zahlen als Grenzen. — Richtig würde φ' aus der Gleichung

$$tg \frac{\varphi'}{2} = \frac{t^2}{a^2 \sin\varphi'}$$

gefunden, wenn darin für t die beobachtete Depression der Randhöhe an einer verticalen ebenen Wand und für $a^2 \sin\varphi'$ der anderweitig aus obigen Angaben bestimmte Werth gesetzt wird.

Uebrigens ändern sich φ' und a^2 sehr merklich schon durch geringe Unreinheiten des Glases, durch das Anhängen verdichteter Luft und von Feuchtigkeit an der Oberfläche desselben und durch Oxydation des Quecksilbers. Mit wachsender Temperatur nimmt $a^2 \sin\varphi'$ zu, von 0^0 bis t^0 nach Frankenheim im Verhältnisse $1 : 1 + 0{,}0013\, t$. —

Von der Veränderlichkeit des Randwinkels lässt sich die Bestimmung der Capillardepression des Quecksilbers in Glasröhren dadurch unabhängig machen, dass man die Höhe h der Quecksilberkuppe (im Vorhergehenden mit f_1 bezeichnet) in jedem einzelnen Falle besonders misst und den Randwinkel als Function von h ausdrückt, so dass dann auch die Depression t_0 des Scheitels der Quecksilberkuppe als eine (ausserdem nur von der Constanten a^2 abhängige) Function von r und h erhalten wird, nämlich nach Gl. (14) und (15)

$$t_0 = \frac{a^2 \sin\varphi'}{r} + t_1 - t - h \; \ldots\ldots\ldots\ldots$$

worin $\sin\varphi'$ und $(t_1 - t)$ auf Grund einer Annahme in Betreff der Gestalt der Quecksilberoberfläche durch r und h auszudrücken sind.

Wird zunächst diese Oberfläche als Kugelfläche vorausgesetzt, so ist das Volumen der Quecksilberkuppe

$$V = \frac{1}{6} \pi h (3r^2 + h^2)$$

und ihre mittlere Höhe

$$t_1 - t = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{h}{6}\left(3 + \frac{h^2}{r^2}\right);$$

ferner nach Gl. (16): $tg\,\frac{\varphi'}{2} = \frac{h}{r}$, also

$$\sin\varphi' = \frac{2\,tg\,\frac{\varphi'}{2}}{1 + tg^2\frac{\varphi'}{2}} = \frac{2\,\frac{h}{r}}{1 + \frac{h^2}{r^2}} = \frac{2rh}{r^2 + h^2}$$

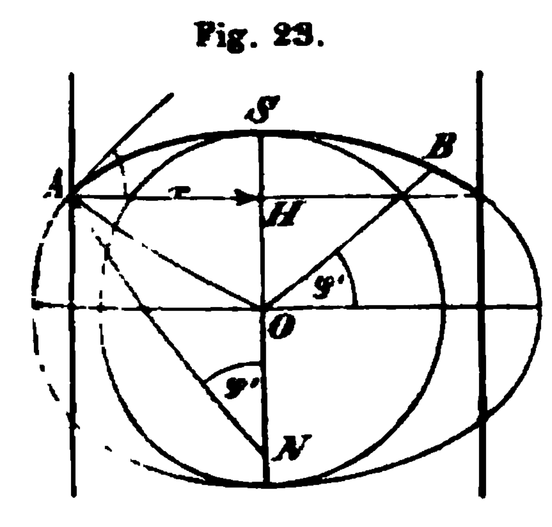
und somit nach Gl. (21)

$$t_0 = \frac{2a^2h}{r^2+h^2} + \frac{h}{6}\left(3 + \frac{h^2}{r^2}\right) - h$$

$$\frac{t_0}{h} = \frac{2a^2}{r^2+h^2} + \frac{1}{6}\,\frac{h^2}{r^2} - \frac{1}{2} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (22).$$

Diese Formel kann indessen, wenn die Röhre nicht sehr eng ist, nur eine erste Annäherung gewähren, weil in der That die Quecksilberoberfläche am Rande stärker gekrümmt sein muss, als am Scheitel, und zwar so, dass nach Gl. (2) das Product aus der Constanten a^2 und der Differenz der mittleren Krümmungen $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_0}$ der betreffenden Normalschnitte = der Kuppenhöhe h ist. Behufs einer weiteren Annäherung werde deshalb diese Oberfläche als ein Umdrehungsellipsoid vorausgesetzt (Fig. 23), dessen Halbmesser am Aequator: $OQ = x$ und in der Axe: $OS = y$ sei; dabei sind x und y vorläufig unbekannt, nur ist jedenfalls $x > y$. Dieses Ellipsoid und die in demselben um seine Axe $= 2\,y$ als Durchmesser beschriebene Kugel werden von horizontalen Ebenen in Parallelkreisen geschnitten, deren Flächen das constante Verhältniss $\frac{x^2}{y^2}$ haben; dasselbe Verhältniss haben

Fig. 23.



somit auch die von solchen Ebenen abgeschnittenen Volumina, und es ist also das Volumen der Quecksilberkuppe

$$V = \frac{1}{6}\pi h\left(3r^2\frac{y^2}{x^2} + h^2\right)\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{6}\pi h\left(3r^2 + h^2\frac{x^2}{y^2}\right),$$

woraus

$$t_1 - t = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{h}{6}\left(3 + \frac{h^2}{r^2}\,\frac{x^2}{y^2}\right)$$

und nach Gl. (21)

$$\frac{t_0}{h} = \frac{a^2\sin\varphi'}{rh} + \frac{1}{6}\,\frac{h^2}{r^2}\,\frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{2} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (23)$$

folgt. Um in dieser Gleichung x, y und φ' durch r und h auszudrücken sind drei Beziehungen zwischen diesen Grössen erforderlich. Zunächst is nach der Gleichung der Ellipse:

$$\frac{r^2}{x^2} + \frac{(y-h)^2}{y^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 24$$

Um ferner den Winkel φ' als der Tangente an die Ellipse im Punkte der Randlinie angehörig zu charakterisiren, mag der bekannte Ausdruck für die Subnormale benutzt werden, wonach

$$NH = \frac{x^2}{y^2} \cdot OH, \text{ d. h. } r \cot g\, \varphi' = \frac{x^2}{y^2}(y-h) \quad \ldots\ldots\ldots$$

ist. Eine dritte Beziehung liefert die oben erwähnte Gleichung (2. Ist nämlich für irgend einen Punkt A der Randlinie der Krümmungshalbmesser des dieselbe berührenden Normalschnitts des Umdrehungsellipsoids = Normalen

$$AN = \varrho = \frac{r}{\sin \varphi'}$$

und der Krümmungshalbmesser der Meridianlinie, d. h. der Ellipse, wenn z die Länge des dem Halbmesser OA conjugirten Halbmessers OB bedeutet

$$= \frac{z^3}{xy} \text{ oder wegen } \varrho = \frac{x}{y} z \text{ auch } = \varrho^3 \frac{y^2}{x^4}$$

ist, so ist die mittlere Krümmung der betreffenden Normalschnitte:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^3} \frac{x^4}{y^2}\right),$$

wogegen im Scheitel jeder Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes

$$= \frac{x^2}{y}, \text{ also } \frac{1}{\varrho_0} = \frac{y}{x^2}$$

ist; somit hat man nach Gl. (2)

$$h = a^2\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_0}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho^3} \frac{x^4}{y^2} - 2\frac{y}{x^2}\right) \quad \ldots\ldots$$

Setzt man den Krümmungshalbmesser der Normalschnitte im Scheitelpunkt S

$$\frac{x^2}{y} = k\varrho,$$

so folgt aus Gl. (24)

$$\frac{r^2}{k\varrho y} - 2\frac{h}{y} + \frac{h^2}{y^2} = 0; \quad \frac{1}{y} = \frac{2}{h} - \frac{r^2}{h^2 k \varrho}$$

und somit

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{2k\varrho}{h}-\frac{r^2}{h^2}=\frac{2kr}{h\sin\varphi'}-\frac{r^2}{h^2}.$$

Gl. 23) erhält dadurch die Form

$$\frac{t_0}{h}=\frac{a^2\sin\varphi'}{rh}+\frac{1}{3}\frac{hk}{r\sin\varphi'}-\frac{2}{3}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(27),$$

worin noch k und φ' vermittels Gl. (25) und (26) zu bestimmen bleiben. Aus Gl. (25) folgt

$$r\cot g\,\varphi'=\frac{x^2}{y}\left(1-\frac{h}{y}\right)=k\varrho\left(1-2+\frac{r^2}{hk\varrho}\right)=-k\varrho+\frac{r^2}{h},$$

also mit $\varrho=\frac{r}{\sin\varphi'}$,

$$\frac{k+\cos\varphi'}{\sin\varphi'}=\frac{r}{h}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(28),$$

während nach Gl. (26)

$$\frac{2\varrho h}{a^2}=\frac{2rh}{a^2\sin\varphi'}=1+k^2-\frac{2}{k}$$

$$\sin\varphi'=\frac{2rh}{a^2\left(1+k^2-\frac{2}{k}\right)}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(29)$$

Durch successive Näherung ist nun der Werth von k so zu bestimmen, dass durch denselben und durch den nach Gl. (29) entsprechenden Werth von φ' der Gl. (28) genügt wird. Auf diese Weise findet man beispielsweise mit $a^2=6{,}5$ (entsprechend im Mittel den oben discutirten Messungen von Danger) die folgenden Werthe von t_0 in Millim.; die gleichfalls beigefügten Werthe von k lassen erkennen, in welchem Grade die Quecksilberoberfläche von einer Kugelfläche abweicht.

r	h	k	t_0	r	h	k	t_0
1	0,5	1,048	5,040	3	0,5	1,321	0,577
2	0,5	1,157	1,402	3	1	1,349	1,045
2	1	1,186	2,341	4	1	1,545	0,508

Für den praktischen Gebrauch bequem ist eine umfangreiche Tabelle, welche Delcros nach Formeln berechnet hat, die von Schleiermacher aus besonderen Versuchen abgeleitet wurden. Der folgende Auszug aus dieser Tabelle* lässt eine sehr befriedigende Uebereinstimmung mit den

* Nouveaux Mémoires de l'acad. roy. de Bruxelles. t. XIV.

so eben nach den Gleichungen (27) bis (29) für einige Fälle berechnete Depressionen t_0 erkennen; durch eine kleine Aenderung des zuvor angenommenen Werthes: $a^2 = 6,5$ liesse sich die Abweichung noch wesentlich vermindern.

Capillardepression des Quecksilbers in Glasröhren nach Schleiermacher und Delcros.

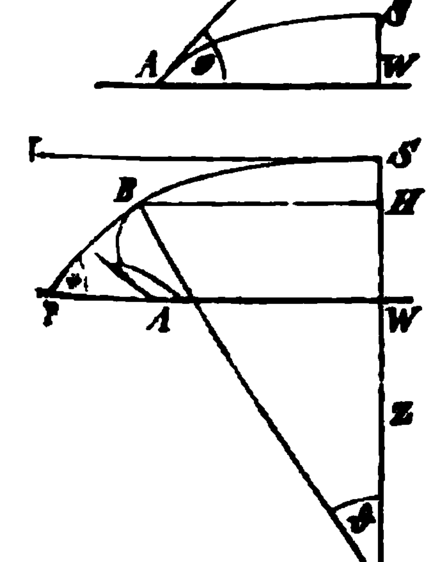
Halbm. der Röhre.	Höhe der Quecksilberkuppe.											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,2	1,4	[illegible]
1,0	1,268	2,460	3,516	4,396	5,085	—	—	—	—	—	—	—
1,2	0,876	1,715	2,484	3,162	3,728	4,190	—	—	—	—	—	—
1,4	0,638	1,256	1,836	2,363	2,825	3,218	3,542	—	—	—	—	—
1,6	0,484	0,955	1,404	1,820	2,196	2,528	2,812	3,050	—	—	—	—
1,8	0,378	0,747	1,103	1,437	1,746	2,024	2,270	2,483	—	—	—	
2,0	0,302	0,598	0,885	1,158	1,413	1,648	1,859	2,046	2,348	—	—	—
2,2	0,245	0,487	0,723	0,948	1,161	1,360	1,541	1,705	1,978	—	—	
2,4	0,203	0,403	0,599	0,787	0,966	1,135	1,292	1,436	1,680	1,866	—	
2,6	0,170	0,337	0,502	0,661	0,813	0,958	1,093	1,218	1,436	1,60[illegible]	—	
2,8	0,143	0,285	0,425	0,560	0,691	0,815	0,932	1,041	1,235	1,392	1,511	
3,0	0,122	0,243	0,362	0,478	0,591	0,698	0,800	0,896	1,068	1,210	1,3[illegible]	
3,2	0,105	0,209	0,312	0,412	0,509	0,602	0,691	0,776	0,928	1,057	1,1[illegible]	[illegible]
3,4	0,091	0,181	0,269	0,356	0,441	0,523	0,601	0,675	0,810	0,926	1,0[illegible]1	[illegible]
3,6	0,079	0,157	0,234	0,310	0,384	0,455	0,524	0,590	0,710	0,814	0,9[illegible]1	[illegible]
3,8	0,069	0,137	0,205	0,271	0,336	0,399	0,459	0,517	0,624	0,718	0,7[illegible]	[illegible]
4,0	0,060	0,120	0,180	0,238	0,295	0,350	0,404	0,455	0,551	0,635	0,7[illegible]	[illegible]
4,2	0,053	0,106	0,158	0,210	0,260	0,309	0,356	0,402	0,487	0,563	0,6[illegible]	[illegible]
4,4	0,047	0,094	0,140	0,185	0,230	0,273	0,315	0,356	0,432	0,500	0,5[illegible]	[illegible]
4,6	0,042	0,083	0,124	0,164	0,204	0,242	0,280	0,316	0,384	0,445	0,4[illegible]	[illegible]
4,8	0,037	0,074	0,110	0,146	0,181	0,215	0,249	0,281	0,342	0,397	0,44[illegible]	[illegible]
5,0	0,033	0,065	0,098	0,130	0,161	0,192	0,221	0,250	0,305	0,354	[illegible]	[illegible]

Alle Dimensionen sind dabei in Millimetern ausgedrückt vorau[illegible]. Der Werth von t_0, welcher dieser Tabelle entnommen oder n[illegible] obigen Formeln berechnet werden kann, wenn man die Weite d[illegible] röhre kennt und die jeweilige Höhe der Quecksilberkuppe gem[illegible] ist bei dem Gebrauch manometrischer und ähnlicher Instrumente [illegible] beobachteten Länge der bis zum Scheitel der Kuppe gerechneten [illegible] silbersäule zu addiren, um sie mit Rücksicht auf den Einfluss d[illegible] larität zu corrigiren.

§. 64. Tropfen und Blasen.

Ein Flüssigkeitstropfen auf einer trockenen, horizontalen ebenen Fläche hat im Gleichgewichtszustande offenbar die Gestalt eines Umdrehungskörpers mit verticaler Axe, falls die Oberflächenbeschaffenheit dieser festen Unterlage, ebenso wie die der Flüssigkeit, also auch der Randwinkel φ ringsum gleich ist. Jenachdem der letztere spitz oder stumpf ist, hat der (halbe) Meridiandurchschnitt die Form der oberen oder unteren Fig. 24. Ist z die Höhe des Scheitelpunktes S über dem beliebigen Punkte B der Oberfläche, so muss im Gleichgewichtszustande der normal einwärts gerichtete Cohäsionsdruck bei B denselben bei S um γz übertreffen, wenn wieder γ das specif. Gewicht der Flüssigkeit bedeutet; sind also ϱ und ϱ' die Krümmungshalbmesser der Hauptschnitte bei B, R dieselben für alle Normalschnitte bei S, so hat man mit Rücksicht auf §. 59, Gl. (4)

Fig. 24.



$$\beta\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)=\beta\frac{2}{R}+\gamma z$$

d. wenn wieder $\frac{\beta}{\gamma}=\frac{a^2}{2}$ gesetzt wird,

$$z=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}-\frac{2}{R}\right).$$

$x = BH$ der Halbmesser des betreffenden Parallelkreises, ϑ der Winkel, er welchem die Tangente BT gegen die Horizontalebene, also die Norle BN gegen die Axe NS geneigt ist, und bedeutet ϱ den Krümmungsbmesser der Meridianlinie, so ist

$$\varrho'=BN=\frac{x}{\sin\vartheta},$$

)

$$z=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{\sin\vartheta}{x}-\frac{2}{R}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

gen

$$\varrho=\frac{ds}{d\vartheta}=\frac{dx}{\cos\vartheta\, d\vartheta}=\frac{dx}{d\sin\vartheta}$$

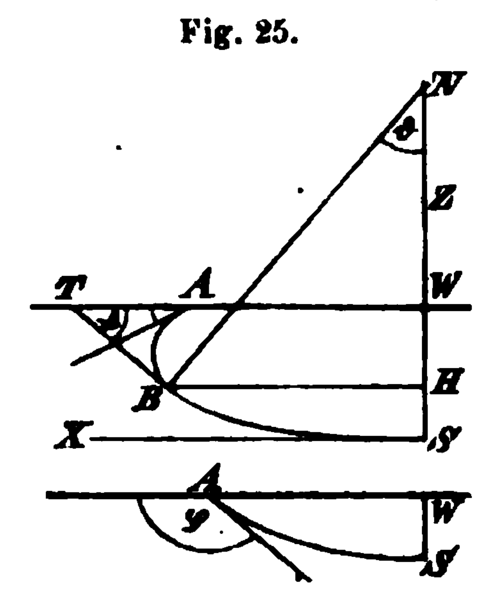
auch

$$z=\frac{a^2}{2}\left(\frac{d\sin\vartheta}{dx}+\frac{\sin\vartheta}{x}-\frac{2}{R}\right)=a^2\left[\frac{d(x\sin\vartheta)}{d(x^2)}-\frac{1}{R}\right] \quad \ldots\ldots \quad (2).$$

Dieselben Ausdrücke gelten offenbar auch für den umgekehrten Fall

einer Blase, welche von einer Flüssigkeit unter einer ihre Oberfläche berührenden ebenen Deckplatte gebildet wird, falls jetzt z die Höhe des beliebigen Punktes B der Blasenoberfläche über ihrem Scheitel S bedeutet; wie Fig. 25 zeigt, entspricht hier dem spitzen Randwinkel eine ähnliche Form des Meridianschnitts wie dem stumpfen Randwinkel des Tropfens und umgekehrt. Der normal einwärts gerichtete Cohäsionsdruck bei B muss hier zwar um den Betrag γz nicht grösser, sondern kleiner sein, als derjenige bei S, allein jener Cohäsionsdruck selbst ist hier wegen der nach aussen concaven statt convexen Krümmung $= -\beta\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right)$ resp. $= -\beta\frac{2}{R}$

Fig. 25.



wenn die Krümmungshalbmesser absolut verstanden werden, wie bei den obigen Umformungen stillschweigend vorausgesetzt wurde.

Die Gl. (2) führt zu einem bemerkenswerthen Ausdruck für das Volumen V des Tropfens oder der Blase. Es ist danach nämlich allgemein das Volumen Φ des Abschnitts von der Höhe z, erhalten durch die Ebene des Parallelkreises mit dem Halbmesser x,

$$\Phi = \int_0^z \pi x^2 dz = \pi x^2 z - \pi\int_0^x z\, d(x^2) = \pi x^2 z - \pi a^2 \int_0^x \left[d(x \sin\vartheta - \ldots\right.$$

$$= \pi x^2 z - \pi a^2\left(x\sin\vartheta - \frac{x^2}{R}\right).$$

Ist also h die Höhe SW des ganzen Tropfens oder der Blase, r der Halbmesser AW der Randlinie, so ist (mit $\vartheta = \varphi$ im Falle des Tropfens und $\vartheta = 180^0 - \varphi$ im Falle der Blase)

$$\frac{1}{\pi}V = r^2 h - a^2 r\left(\sin\varphi - \frac{r}{R}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Indem das Volumen eines Tropfens sehr genau durch Wägung bestimmt, ausser r und h auch der Randwinkel φ gemessen werden kann, lässt sich diese Formel zur Bestimmung der Constanten a^2 benutzen, freilich mit einer vom Krümmungshalbmesser R im Scheitel herrührenden Unsicherheit, sofern nicht etwa der Tropfen gross genug ist, um $R = \infty$ setzen zu dürfen.

Quincke fand z. B. das Gewicht eines Quecksilbertropfens, welcher in luftverdünntem Raume auf einer horizontalen Glasplatte lag,* = 27...

* Poggendorff's Annalen, Bd. 105. Siehe auch: A. Beer, Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität, S. 143

Gramm,

$$r = 13{,}99 \text{ und } h = 3{,}655 \text{ Millim.}, \quad \varphi = 128^0\, 36',$$

ferner den Halbmesser r_1 des grössten Parallelkreises und die Höhe des Scheitels S über seiner Ebene:

$$r_1 = 14{,}355 \text{ und } h_1 = 2{,}783 \text{ Millim.},$$

endlich die Höhe h' des Scheitels über demjenigen Parallelkreise, dessen Halbmesser im oberen Theil des Tropfens $= r$ war,

$$h' = 1{,}856 \text{ Millim.}$$

Wenn der Versuchstemperatur von 17° C. entsprechend die Dichtigkeit des Quecksilbers = 13,593 gesetzt wird, ergiebt sich

$$V = 1000\, \frac{27{,}8452}{13{,}593} = 2048{,}5 \text{ Cubikmillim.}$$

Was R betrifft, so wäre, wenn man den ganzen oberen Theil des Tropfens in der Höhe h_1 als ein halbes Umdrehungsellipsoid betrachten dürfte,

$$R = \frac{r_1^{\,2}}{h_1} = 74{,}04 \text{ Millim.}$$

Ein besserer Werth ergiebt sich, wenn nur der oberste Theil des Tropfens in der Höhe h' als Abschnitt eines Umdrehungsellipsoids betrachtet und $= k \dfrac{r}{\sin\varphi'}$ gesetzt wird, unter k und φ' die Grössen verstanden, welche den Gl. (28) und (29) im vorigen §. den Bedingungen entsprechen:

$$\frac{k + \cos\varphi'}{\sin\varphi'} = \frac{r}{h'}\,; \quad \sin\varphi' = \frac{2rh'}{a^2\left(1 + k^2 - \frac{2}{k}\right)}\,.$$

findet man mit $a^2 = 6{,}5$

$$k = 3{,}625; \quad \sin\varphi' = 0{,}588; \quad R = 86{,}25.$$

Aber auch dieser Werth von R ist jedenfalls noch zu klein, weil nach den Beobachtungen Dangers (§. 63) schon für $r = 20$ Millim. $R = \infty$ gesetzt werden kann. Wird etwa die Annahme der ellipsoidischen Form des oberen Theils der Tropfenoberfläche bis zu $r = 5$ Millim. als zulässig erachtet, so für solche Werthe von r, welche zwischen den Grenzen 5 und 20 Millim. ...n. die Krümmung der Scheitel-Normalschnitte

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{k}\, \frac{\sin\varphi'}{r} \,.\, f(r)$$

setzen, unter $f(r)$ eine Function von r verstanden, welche bei stetig in ...em Sinne stattfindender Veränderlichkeit innerhalb der fraglichen ...zen den Bedingungen

$$f(5) = 1; \quad f(20) = 0$$

entspricht. Die einfachste solche Function ist

$$f(r) = 1 + \frac{r}{60} - \frac{r^2}{300},$$

so dass nun für $5 < r < 20$ mit jedenfalls schon erheblicher Annäherung

$$\frac{r}{R} = \frac{\sin\varphi'}{k}\left(1 + \frac{r}{60} - \frac{r^2}{300}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und insbesondere im vorliegenden Falle

$$\frac{r}{R} = \frac{0{,}588}{3{,}625} \cdot 0{,}58076 = 0{,}0942$$

gesetzt werden kann. Damit folgt dann aus Gl. (3)

$$a^2 = \frac{r^2 h - \frac{1}{\pi} V}{r\left(\sin\varphi - \frac{r}{R}\right)} = 6{,}583$$

in befriedigender Uebereinstimmung mit anderweitigen Bestimmungen die[ser] Grösse. —

Wenn der Tropfen oder die Blase eine so grosse Ausdehnung h[at], dass nicht nur die Krümmung im Scheitel = Null zu setzen ist, sond[ern] auch an jeder anderen Stelle die Krümmung der zur Meridianlin[ie] senkrechten Normalschnitte vernachlässigt werden kann, dann i[st] nach Gl. (1) einfach

$$z = \frac{a^2}{2\varrho}$$

oder mit $\varrho = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{dz}{\sin\vartheta\, d\vartheta} = \frac{-dz}{d\cos\vartheta}$

$$2z\, dz = -a^2\, d\cos\vartheta$$

und folglich, weil $z = 0$ und $\vartheta = 0$ zusammengehörige Werthe sind,

$$z^2 = a^2(1 - \cos\vartheta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Daraus ergiebt sich die Höhe $z = h$ eines grossen Tropfens mit $\vartheta = \ldots$ einer grossen Blase mit $\vartheta = 180^0 - \varphi$, also

$$h = a\sqrt{1 + \cos\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

streng genommen ist dieses h die Grenze, welcher sich die Höhe ei[nes] Tropfens oder einer Blase bei ohne Ende wachsendem Durchmesser [zu]nehmend nähert.

Wenn im Falle der Blase die ebene Deckplatte von der Flüssigk[eit]

nicht nur benetzbar, d. h. φ spitz ist, sondern wirklich benetzt wird, also φ = Null ist, ergiebt sich die Höhe der Blase

$$h = a\sqrt{2} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7).$$

Wenn wieder mit h_1 der Höhenunterschied des Scheitels und der Aequatorebene (der Ebene des grössten Parallelkreises) des von einer nicht netzenden Flüssigkeit gebildeten Tropfens oder der von einer netzenden Flüssigkeit gebildeten Blase bezeichnet wird, ist nach Gl. (5) mit $\vartheta = 90^0$

$$h_1 = a \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Durch die Messung von h_1 und h findet man also

$$a = h_1 \text{ und } \pm \cos\varphi = \left(\frac{h}{h_1}\right)^2 - 1.$$

Das Volumen eines grossen Tropfens oder einer solchen Blase ist nach Gl. (3) mit Rücksicht auf Gl. (6)

$$V = \pi r^2 h - \pi r h^2 \frac{\sin\varphi}{1 \mp \cos\varphi}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{oder für den Tropfen:} \quad V = \pi r^2 h \left(1 - \frac{h}{r} \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right) \\ &\text{und für die Blase:} \quad V = \pi r^2 h \left(1 - \frac{h}{r} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \ldots \ldots (9).$$

Das Volumen einer grossen Blase unter einer benetzten ebenen Platte ($\varphi = 0$) ist

$$V = \pi r^2 h.$$

Messungen an Tropfen sind namentlich von Quincke zur Bestimmung von a und φ, also der Constanten

$$\beta = \frac{1}{2} a^2 \gamma \text{ und } \alpha = \beta \cos\varphi$$

benutzt worden. Für Wasser an einer reinen trockenen Glasfläche ergab sich $\varphi = 25^0\, 30'$; nach anderen Bestimmungen soll in diesem Falle φ bis 0^0 und darüber betragen können.

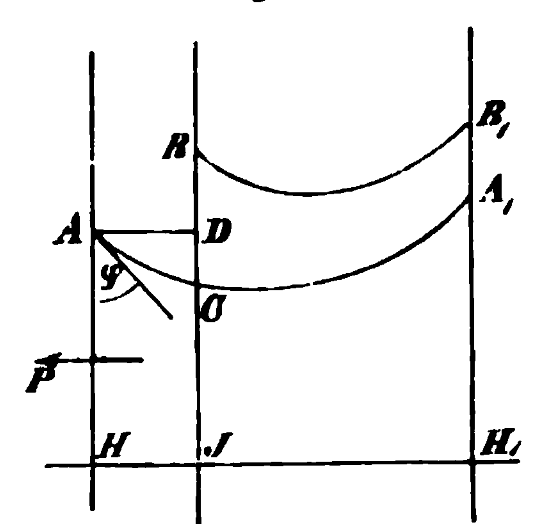
§. 65. Modification des hydrostatischen Druckes durch Molekularwirkung.

Dass der Druck einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit auf eine theilweise eingetauchte feste Fläche, an welcher somit die Flüssigkeit gehoben oder niedergedrückt ist, eben dadurch merklich modificirt werden kann, giebt sich besonders durch die Anziehung oder Abstossung zu er-

kennen, welche zwischen einem auf einer Flüssigkeit schwimmenden Körp und der Gefässwand oder zwischen zwei solchen Körpern bei einer ge wissen, nämlich solchen Annäherung stattzufinden scheint, dass die län der Gefässwand und in der Umgebung des schwimmenden Körpers re die um beide Körper herum deformirten (gekrümmten) Theile der fre Flüssigkeitsoberfläche gegenseitig in einander übergehen. Diese Wirkun welche als Anziehung erscheint, wenn die Flüssigkeit an beiden Körp r gehoben oder an beiden niedergedrückt, dagegen als Abstossung, wenn s an dem einen gehoben und am anderen gesenkt ist, hat z. B. die bekan Erscheinung zur Folge, dass viele kleine gleichartige Körper, welche a einer Flüssigkeit schwimmen, bei wiederholten regellosen Störungen d Gleichgewichtes sich allmählig zu zusammenhängenden Gruppen verein die an der Gefässwand haften, wenn auch zwischen dieser und der F sigkeit eine Molekularwirkung von gleicher Art stattfindet wie zwis der letzteren und den schwimmenden Körpern.

Zur Erklärung dieser Erscheinung im Allgemeinen und zugleich a Grundlage zur Beurtheilung ihres wesentlichsten Wirkungsgesetzes ge die nähere Betrachtung des einfachsten Falles zweier ebenen Platt AH und A_1H_1 (Fig. 26), welche vertical in kleiner Entfern und parallel mit einander theilweis eine Flüssigkeit eingetaucht sind, d freie Oberfläche, soweit sie horizontal ist, mit d Horizontalebene HH_1 zusammenfalle. Die Br $= b$ der Platten sei so gross, dass die zwis ihnen gehobene oder gesenkte Flüssigkeitsob fläche (in der Figur und bei der folgenden E wickelung ist der erstere Fall vorausgesetzt, Wesentlichen als eine Cylinderfläche mit hor taler Erzeugenden gelten kann; übrigens seien sie von den Gefässwand oder von anderen festen Körpern so weit entfernt, dass, wenn sie im S ihrer gemeinschaftlichen Normalen unendlich wenig verschoben werd dadurch die Gestalt und Höhenlage der freien Flüssigkeitsoberfläche n zwischen ihnen eine unendlich kleine Aenderung erfährt, nicht a ihren äusseren Seiten. Gesucht wird die Kraft, womit die Flüssigk auf die Platte AH in normaler Richtung wirkt. Ist dieselbe = positiv im Sinne HH_1, so kann durch die entgegengesetzte Kraft P (Fig. 2 im Sinne H_1H auf die Platte wirkend, das Gleichgewicht hergestellt wer falls diese Platte nur horizontal in normaler Richtung beweglich, die and A_1H_1 dagegen unbeweglich vorausgesetzt wird, und es wird die Gr

Fig. 26.



dieser Kraft P gefunden, indem man ausdrückt, dass für eine unendlich kleine normale Verschiebung $HI = \delta x$ der Platte AH im Sinne HH_1 die Summe der Arbeiten aller im Gleichgewicht befindlichen Kräfte = Null ist. Diese Arbeiten sind: die Arbeit der Kraft P

$$= - P\delta x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

ferner die Arbeit der Schwere und endlich die Molekulararbeiten, welche durch die Grössenänderung von Wandoberflächenschichten und von freier Oberflächenschicht der Flüssigkeit verursacht werden.

Da die Randlinien an beiden Platten nach wie vor horizontale Linien von der Länge b bleiben und auch die Randwinkel constant vorausgesetzt werden, so wird das Gewicht oder Volumen der gehobenen Flüssigkeit nach §. 61, Gl. (3) durch die vorausgesetzte virtuelle Verrückung nicht geändert; die Arbeit der Schwere besteht nur darin, dass der Querschnitt der zwischen den Platten gehobenen Flüssigkeit von AA_1HH_1 in

$$BB_1IH_1 = AA_1HH_1$$

übergeht. Diesen Uebergang kann man sich dadurch vermittelt denken, dass zunächst die Flüssigkeit, deren Querschnitt $ACHI$ ist, indem sie sich unendlich ausbreitet, bis zur Horizontalebene HH_1 niedersinkt, und dann wieder bis zum Querschnitt BB_1CA_1 gehoben wird. Die Arbeit der Schwere bei jenem Niedersinken ist bis auf eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung

$$= \frac{1}{2}\gamma b z^2 \delta x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

unter γ das specif. Gewicht der Flüssigkeit und unter z die Erhebungshöhe AH der Randlinie an der Seitenfläche der ersten Platte verstanden, welche der zweiten zugekehrt ist. Die Schwerearbeit bei der Erhebung der fraglichen unendlich kleinen Flüssigkeitsmenge von der Ebene HH_1 bis zum Querschnitte BB_1CA_1 ist derjenigen gleich zu setzen, welche einer solchen Erhebung der ganzen zwischen den Platten bei ihrem veränderten Abstande erhobenen Flüssigkeit entspricht, wobei die eine Randlinie um CB, die andere um A_1B_1 hinaufrückt, während die Gestalt der Oberfläche nur unendlich wenig sich ändert. Indem aber diese ganze gehobene Flüssigkeit nach §. 61 von zwei Kräften getragen wird, welche, in den Randlinien angreifend, nach CB und A_1B_1 gerichtet $= ab$ und a_1b sind, unter a und a_1 die im Allgemeinen verschiedenen Adhäsionsconstanten für die beiden Platten verstanden, muss auch die fragliche Schwerearbeit der entsprechenden Arbeitssumme dieser beiden Kräfte entgegengesetzt gleich, also

$$= - ab \,.\, CB - a_1 b \,.\, A_1B_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

sein. Was endlich die Molekulararbeiten betrifft, so ist mit Rücksicht auf die Bedeutung der Constanten β und α resp. α_1 nach §. 59 und §. 60 diejenige, welche der Neubildung von Wandoberflächenschicht $= b(BI - AH) = b.DB$ an der ersten und $b.A_1B_1$ an der zweiten Platte entspricht,

$$= \alpha b.DB + \alpha_1 b.A_1B_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4.$$

sowie diejenige, welche der Verwandlung von freier Oberflächenschicht $= b(AC - HI)$ in homogene Flüssigkeit entspricht,

$$= \beta b(AC - HI) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5.$$

Die Summe der Arbeiten (1) bis (5) = Null gesetzt giebt

$$-P\delta x + \frac{1}{2}\gamma b z^2 \delta x - \alpha b.CD + \beta b(AC - HI) = 0$$

oder mit $\alpha = \beta\cos\varphi$ nach §. 60, Gl. (1) und

$$HI = \delta x, \quad CD = \delta x\, cotg\,\varphi, \quad AC = \frac{\delta x}{\sin\varphi}$$

$$P = b\left(\frac{1}{2}\gamma z^2 - \beta\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\beta}{\sin\varphi} - \beta\right) = b\left(\frac{1}{2}\gamma z^2 + \beta\sin\varphi - \beta\right)$$

oder endlich mit $\qquad a^2 = 2\frac{\beta}{\gamma}$ nach §. 62, Gl. (1)

und wenn $\qquad h = a\sqrt{1 - \sin\varphi}$ nach §. 62, Gl. (3)

den Werth bedeutet, welchen z bei so grosser Entfernung der Platten haben würde, dass die Oberfläche AA_1 theilweise mit der Horizontalebene HH_1 zusammenfiele,

$$P = \frac{1}{2}\gamma b[z^2 - a^2(1 - \sin\varphi)] = \frac{1}{2}\gamma b(z^2 - h^2) \quad \ldots\ldots \quad 6.$$

Wenn das Verhalten der Flüssigkeit gegen beide Platten von gleicher Art ist, d. h. wenn α und α_1 einerlei Zeichen haben, der Randwinkel an beiden Platten spitz oder an beiden stumpf ist, so wird die Erhebung oder Senkung der Flüssigkeit an jeder Platte durch den Einfluss der anderen vergrössert; es ist dann $z^2 > h^2$, P positiv, d. h. die Flüssigkeit wirkt auf die Platten so, als ob dieselben sich gegenseitig anzögen. Umgekehrt verhält es sich, wenn α und α_1 entgegengesetzten Zeichens sind. Dieser Satz behält offenbar seine Gültigkeit auch bei anders gestalteten Körpern, wenn schon der Entwickelung eines Ausdrucks für die resultirende Horizontalkraft P sich unüberwindliche Schwierigkeiten entgegensetzen mögen.

II. Gleichgewicht der Luft.

§. 66. Allgemeine Bemerkungen.

Während nach den in §. 53 aufgestellten allgemeinen hydrostatischen Gesetzen die Möglichkeit des Gleichgewichts einer tropfbaren Flüssigkeit von constanter specif. Masse μ an die Bedingung der Existenz einer Kraftfunction, d. h. an die Bedingung geknüpft ist, dass die rechtwinkeligen Componenten X, Y, Z der beschleunigenden Massenkraft im Punkte (x, y, z) = den beziehungsweise nach x, y, z genommenen Differentialquotienten einer gewissen Function U der Coordinaten sind:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

also

$$X dx + Y dy + Z dz = dU,$$

wie es insbesondere dann der Fall ist, wenn die Richtungslinien der fraglichen Kräfte durch feste Punkte (Punkte von festen Lagen gegen die Coordinatenaxen) gehen und ihre Intensitäten Functionen der Abstände von diesen festen Punkten sind, ist das Gleichgewicht luftförmiger Flüssigkeiten zwar nicht nothwendig an diese Bedingung gebunden, indessen doch ist nur in diesem Falle von grösserem Interesse. Wird also auch hier die Existenz einer **Kraftfunction** vorausgesetzt, so sind nach §. 53

$$U = c,$$

unter c verschiedene Constante verstanden, die Gleichungen der **Niveauflächen**, und dieselben, charakterisirt durch den Umstand, dass die resultirende Massenkraft P in allen ihren Punkten normal zu ihnen gerichtet ist, sind zugleich **Flächen gleicher Pressung** p **und specifischer Masse** μ, **also auch gleicher Temperatur** t **und überhaupt gleichen Wärmezustandes.** Dieser letztere Umstand knüpft die dauernde Erhaltung des zu irgend einer Zeit stattfindenden Gleichgewichtes an die (streng genommen freilich selten erfüllte) Bedingung, dass die Temperatur entweder in der ganzen Masse dauernd gleich und somit Wärmeleitung ganz ausgeschlossen ist, oder dass letztere nur in normaler Richtung gegen die Niveauflächen und in allen Punkten derselben Niveaufläche mit gleicher und constanter Geschwindigkeit der Art stattfindet, dass die Flüssigkeitsschicht zwischen zwei unendlich nahe benachbarten Niveauflächen in irgend einer Zeit an die einerseits angrenzende Schicht ebenso viel Wärme abgiebt wie sie von der andererseits angrenzenden empfängt.

Was z. B. das eventuelle Gleichgewicht der Erdatmosphäre betrifft, so werde die Erde als eine aus concentrischen Schichten von gleichförmiger Dichtigkeit bestehende Kugel betrachtet, ihr Mittelpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten und ihre Rotationsaxe als Axe der z angenommen, während die Axen der x und der y in der Aequatorebene fest liegen. Dann ist für einen beliebigen Punkt (x, y, z) der Atmosphäre in der Entfernung $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vom Mittelpunkt, wenn f eine Constante und ω die constante Winkelgeschwindigkeit der Erde bedeutet,

$$X = -\frac{f}{r^2}\frac{x}{r} + \omega^2 x; \quad Y = -\frac{f}{r^2}\frac{y}{r} + \omega^2 y; \quad Z = -\frac{f}{r^2}\frac{z}{r} \; .$$

Es giebt also eine Kraftfunction, und zwar

$$U = \frac{f}{r} + \omega^2 \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{f}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \omega^2 \frac{x^2+y^2}{2} \; .$$

Die Niveauflächen sind Umdrehungsflächen mit der Erdaxe als gemeinschaftlicher Axe; ist φ die geographische Breite, d. h. der Winkel des Leitstrahls r mit der Aequatorebene, so sind ihre Gleichungen resp. die Gleichungen ihrer Meridianlinien in Polarcoordinaten:

$$U = \frac{f}{r} + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2\varphi = c \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Indem aber die Wärmemittheilung von aussen, insbesondere von der Sonne nicht ringsum gleichförmig und normal zu diesen Flächen, sondern einseitig stattfindet, kann sich thatsächlich die Erdatmosphäre niemals im Gleichgewicht befinden; wenn gleichwohl ein solches für gewisse Untersuchungen vorausgesetzt wird, so können die Resultate derselben stets nur auf angenäherte Gültigkeit Anspruch machen.

Für die Pressung p hat man nach §. 53, Gl. (9)

$$dp = \mu \, . \, dU.$$

Hierdurch und durch die Beziehung, welche je nach der Art der Flüssigkeit zwischen p, der specif. Masse μ und der Temperatur t resp. der absoluten Temperatur T stattfindet, ist (nach Elimination von μ) die Pressung als Function von U bestimmt, wenn die Temperatur als solche gegeben ist. Insbesondere für ein Gas oder Gasgemenge hat man, wenn R eine Constante und v das specif. Volumen bedeutet,

$$pv = RT \text{ oder } p = \mu g RT,$$

also

$$\frac{dp}{p} = \frac{dU}{gRT}; \quad lnp = \frac{1}{gR}\int\frac{dU}{T} + Const. \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Dabei ist g als Constante vorausgesetzt, nämlich als die Beschleunigung, welche einer bestimmten Masse (der Masse eines Cubikdecimeters Wasser im Zustande grösster Dichtigkeit) durch eine bestimmte Kraft (1 Kgr.) ertheilt wird.

Durch die Pressung in jedem Punkte ist auch der hydrostatische Druck auf eine ausgedehnte Fläche bestimmt, insbesondere auch der Druck auf die Oberfläche eines festen Körpers, der sich in einer im Gleichgewicht befindlichen luftförmigen Flüssigkeit befindet. Wenn dabei als Massenkraft nur die Schwerkraft in Betracht kommt (verstanden als relative Schwerkraft, wie sie als Resultante der Anziehungskraft der Erde und der ihrer Rotation entsprechenden Centrifugalkraft unmittelbar beobachtet wird), so gilt in Betreff des letztgenannten Druckes auf die Oberfläche eines eingetauchten, im Vergleich mit der Erde sehr kleinen Körpers, d. h. in Betreff des sogenannten Auftriebes oder Gewichtsverlustes desselben auch bei luftförmigen Flüssigkeiten das (nach der Bemerkung zu Ende von §. 56 allgemein gültige) Archimedische Princip, nach welchem dieser Auftrieb bezüglich auf Grösse und Richtungslinie dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit entgegengesetzt gleich ist, falls die letztere in derselben Weise ungleichförmig dicht gedacht wird, wie sie es sein müsste, um an der Stelle des Körpers mit der übrigen Flüssigkeit sich im Gleichgewicht zu befinden.

Gewöhnlich sind die Dimensionen klein genug, um, falls nur die Schwerkraft als Massenkraft wirksam ist, die Niveauflächen als horizontale Ebenen und auch bei luftförmigen Medien die specif. Masse μ und das specif. Gewicht $\gamma = \frac{1}{v} = g\mu$ ohne wesentlichen Fehler als gleich für alle Stellen des betrachteten Raumes voraussetzen zu dürfen. Der Auftrieb ist dann einfach $= \gamma V$, wenn V das Volumen des betreffenden Körpers; eine wichtige Anwendung findet dieser Ausdruck bei allen Wägungen, um durch Addition zum wirksamen oder scheinbaren Gewicht eines in irgend einem Medium gewogenen Körpers das wahre Gewicht desselben zu erhalten. Auch ist dann der Ueberschuss der Pressung in irgend einem Punkte über dieselbe in einem anderen, um h höher gelegenen Punkte einfach $= \gamma h$. Ein wichtiges Problem indessen, bei welchem diese einfache Annahme unzulässig ist, soll im folgenden §. näher besprochen werden.

§. 67. Barometrische Höhenmessung.

Sind A_0 und A zwei Punkte der Erdatmosphäre, deren geographische Längen und Breiten so wenig verschieden sind, dass die Richtungen der Schwerkraft in ihnen als parallel vorausgesetzt werden können, so soll aus den Barometerständen, welche an diesen Stellen gleichzeitig beobachtet werden, mit Hülfe der sonstigen zur Bestimmung des atmosphärischen Zustandes erforderlichen gleichzeitigen Beobachtungen auf den Höhenunterschied $= h$ jener Punkte A_0 und A geschlossen werden, d. h. auf den Unterschied ihrer Höhen $= z_0$ und z über der Meeresoberfläche; A wird dabei als der höher gelegene Punkt vorausgesetzt, so dass $h = z - z_0$ ist. Dazu dient die Gl. (3) des vorigen §., nach welcher

$$ln \frac{p_0}{p} = \frac{1}{g'R} \int_{z}^{z_0} \frac{dU}{T}$$

ist, wenn p_0 und p die Pressungen in A_0 und A bedeuten und wenn wegen der hier zu berücksichtigenden Veränderlichkeit der beschleunigenden Schwerkraft mit g' der besondere Werth derselben bezeichnet wird, welcher der Bestimmung der Constanten R zu Grunde liegt. Dabei ist ein Coordinatensystem vorausgesetzt, dessen Anfangspunkt in der Meeresoberfläche so liegt, dass die Punkte A_0 und A nur mässige Entfernungen von der vertical aufwärts gerichteten z-Axe haben. Ist α der Ausdehnungscoefficient der Luft, von deren Feuchtigkeit zunächst abgesehen werden soll, so ist auch

$$T = \frac{1}{\alpha} + t = \frac{1}{\alpha}(1 + \alpha t),$$

also

$$ln \frac{p_0}{p} = \frac{\alpha}{g'R} \int_{z}^{z_0} \frac{dU}{1 + \alpha t} = \frac{U_0 - U}{k(1 + \alpha t)} \quad \ldots\ldots\ldots$$

wo $\frac{g'R}{\alpha} = k$ gesetzt und für die zwischen beiden Stationen veränderliche

Was die Constante k betrifft, so wurde in §. 17 für reine, trockene atmosphärische Luft mit $\alpha = \frac{1}{273}$

$$R = \frac{10333}{1{,}2932 \,.\, 273} = 29{,}27$$

bestimmt, indem dabei nach Regnault das Gewicht eines Cubikmeters Luft = 1,2932 Kgr. gesetzt wurde bei 0° Temperatur und normalem Atmosphärendruck; der letztere

$$= 13596 \,.\, 0{,}76 = 10333 \text{ Kgr. pro Quadratm.}$$

ar definirt als das Gewicht einer Quecksilbersäule von 1 Quadratm. Grundläche und 0,76 Mtr. Höhe bei 0° Temperatur des Quecksilbers. Indem ber eine solche Säule einen verschiedenen Druck auf ihre Grundfläche usübt je nach dem örtlichen Werthe der beschleunigenden Schwerkraft, muss, um k als eine hiervon unabhängige wirkliche Constante zu finden, r g' die Beschleunigung des Bestimmungsortes jener Zahl 1,2932, d. h. Beschleunigung zu Paris = 9,809 gesetzt werden. Somit ergiebt sich

$$k = \frac{g'R}{\alpha} = \frac{9{,}809 \,.\, 10333}{1{,}2932} = 78376.$$

Ist nun g die Beschleunigung der Schwere an der (unter dem Festlande r ausgebreitet gedachten) Meeresfläche im Anfangspunkte der Coordiaten, r die Entfernung des letzteren vom Erdmittelpunkte, so sind die omponenten der Schwerkraft in der Höhe z über dem Meere

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g \frac{r^2}{(r+z)^2}$$

setzen, und ist also

$$dU = X dx + Y dy + Z dz = gr^2 \,.\, d \frac{1}{r+z}$$

$$U_0 - U = gr^2 \left(\frac{1}{r+z_0} - \frac{1}{r+z} \right) = gr^2 \frac{h}{R(R+h)},$$

enn mit $R = r + z_0$ die Entfernung des Punktes A_0 vom Erdmittelunkte bezeichnet wird. Somit ist nach Gl. (1)

$$ln \frac{p_0}{p} = \frac{gr^2}{k(1+\alpha t) R} \frac{h}{R+h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

d b_0 und b die Barometerstände an der unteren und oberen Station, ucirt auf die Temperatur 0° des Quecksilbers und auf die Normaltempeur der Skala und corrigirt mit Rücksicht auf die Capillardepression nach 63, so ist, weil ebendaselbst sich die Beschleunigungen der Schwere wie

$$\frac{1}{R^2} : \frac{1}{(R+h)^2} = (R+h)^2 : R^2$$

verhalten, das Pressungsverhältniss

$$\frac{p_0}{p} = \frac{b_0}{b}\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = \frac{b_0}{b}\left(1+\frac{h}{R}\right)^2,$$

folglich nach Gl. (2), wenn lg einen Logarithmus zur Basis 10 und $m = \frac{1}{ln\,10}$ den Modulus dieses gewöhnlichen Logarithmensystems bezeichnet.

$$lg\frac{b_0}{b} + 2lg\left(1+\frac{h}{R}\right) = \frac{mgr^2}{k(1+\alpha t)R}\,\frac{\frac{h}{R}}{1+\frac{h}{R}}$$

und daraus

$$h = \frac{k(1+\alpha t)}{mg}\left(\frac{R}{r}\right)^2\left[lg\frac{b_0}{b} + 2lg\left(1+\frac{h}{R}\right)\right]\left(1+\frac{h}{R}\right)$$

oder mit $\qquad k = 78376, \quad m = 0{,}434294$

und $\qquad g = 9{,}8058(1 - 0{,}0026\cos 2\psi),$

unter ψ die geographische Breite verstanden (siehe §. 2, Anmerkung).

$$h = \frac{18404(1+\alpha t)}{1-0{,}0026\cos 2\psi}\left(\frac{R}{r}\right)^2\left[lg\frac{b_0}{b} + 2lg\left(1+\frac{h}{R}\right)\right]\left(1+\frac{h}{R}\right) \ldots$$

An dieser Formel ist schliesslich noch eine Correction mit Rücksicht auf den Feuchtigkeitsgehalt der Luft anzubringen, nachdem sie bei Berechnung des Zahlencoefficienten 18404 nur einstweilen als ganz trocken vorausgesetzt worden war. Ist aber p' die Pressung des darin enthaltenen Wasserdampfes, so ist nach §. 17 diese feuchte Luft von der Gesammtpressung p im Verhältnisse

$$1 - \frac{3}{8}\frac{p'}{p} = 1 - \frac{3}{8}\varphi$$

leichter, als trockene Luft von gleicher Temperatur und Pressung. In demselben Verhältnisse muss die einer gewissen Differenz der Barometerstände b_0 und b entsprechende Höhendifferenz h grösser sein, und ist also schliesslich nach Gl. (3), wenn noch $t = \frac{t_0+t}{2}$ und $\alpha = \frac{1}{273}$ gesetzt wird.

$$h = \frac{18404\left(1+\frac{t_0+t}{546}\right)}{\left(1-\frac{3}{8}\varphi\right)(1-0{,}0026\cos 2\psi)}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \times$$

$$\times\left[lg\frac{b_0}{b} + 2lg\left(1+\frac{h}{R}\right)\right]\left(1+\frac{h}{R}\right) \;\ldots\ldots\ldots$$

Zur Vereinfachung dieser Formel können die nur sehr wenig von der Einheit verschiedenen Grössen

$$\frac{1}{1-\frac{3}{8}\varphi}=1+\frac{3}{8}\varphi;\quad \frac{1}{1-0{,}0026\cos 2\psi}=1+0{,}0026\cos 2\psi$$

gesetzt werden; auch ist

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2=\left(1+\frac{z_0}{r}\right)^2=1+\frac{2z_0}{r}$$

und deshalb

$$\left(\frac{R}{r}\right)^2\left(1+\frac{h}{R}\right)=1+\frac{2z_0+h}{r}$$

sowie auch

$$lg\left(1+\frac{h}{R}\right)=m\,.\,ln\left(1+\frac{h}{R}\right)=0{,}4343\,\frac{h}{r}$$

zu setzen. In Folge dieser Substitutionen wird

$$h=18404\left(1+\frac{t_0+t}{546}\right)\left(1+\frac{3}{8}\varphi\right)(1+0{,}0026\cos 2\psi)\times$$

$$\times\left(lg\frac{b_0}{b}+0{,}8686\,\frac{h}{r}\right)\left(1+\frac{2z_0+h}{r}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ (5).$$

In diesem Ausdrucke kommen die gesuchte Grösse h selbst und der Erdradius r, welcher streng genommen eine Function von ψ ist, in solcher Verbindung vor, dass dadurch das Resultat mit Rücksicht auf die Kleinheit der Brüche $\frac{h}{r}$ und $\frac{z_0}{r}$ nur in ganz untergeordneter Weise beeinflusst wird, weshalb für r die ungefähre Länge $=$ 6370000 Mtr. des mittleren Erdradius (Radius einer Kugel von gleichem Volumen mit der ellipsoidischen Erde) und für dieses h ein angenäherter Werth h' gesetzt werden darf, etwa

$$h'=18404\left(1+\frac{t_0+t}{546}\right)lg\,\frac{b_0}{b}\ .$$

Damit und mit $r=6370000$ wird

$$lg\,\frac{b_0}{b}+0{,}8686\,\frac{h}{r}=\left(1{,}00251+\frac{t_0+t}{217570}\right)lg\,\frac{b_0}{b}\ ,$$

und weil nun auch

$$\left(1+\frac{t_0+t}{546}\right)\left(1{,}00251+\frac{t_0+t}{217570}\right)=1{,}00251+\frac{t_0+t}{543{,}3}$$

$$=1{,}0025+\frac{t_0+t}{543}$$

gesetzt werden kann, erhält man bei Ordnung der Factoren nach abne-
mender Wichtigkeit:

$$h = 18404\, lg\, \frac{b_0}{b} \left(1{,}0025 + \frac{t_0 + t}{543}\right)\left(1 + \frac{3}{8}\varphi\right) \times$$
$$\times (1 + 0{,}0026 \cos 2\psi)\left(1 + \frac{2z_0 + h'}{r}\right) \dots\dots$$

Bei der logarithmischen Rechnung kann dann

$$lg\left(1 + \frac{2z_0 + h'}{r}\right) = 0{,}4343 \, . \, \frac{2z_0 + h'}{6370000} = \frac{2z_0 + h'}{14670000} \quad \dots$$

und h' = demjenigen Werth von h gesetzt werden, welcher ohne Rück-
sicht auf diesen letzten Factor nach Gl. (6) gefunden wird.

Die Werthe des die geographische Breite ψ betreffenden vorletzten
Gliedes im Ausdrucke von lgh, nämlich

$$lg(1 + 0{,}0026 \cos 2\psi) = f(\psi)$$

kann man bei einer hier völlig entsprechenden Genauigkeit von lgh bis
5 Decimalstellen aus der folgenden Tabelle entnehmen, welche die betref-
fenden Werthe für die ganzen Grade bis $\psi = 45^0$ in Einheiten der
Decimalstelle enthält; ist $\psi > 45^0$, etwa $\psi = 45^0 + x$, so ist f
$= -f(45^0 - x)$.

ψ	$f(\psi)$	ψ	$f(\psi)$	ψ	$f(\psi)$	ψ	$f(\psi)$	ψ	$f(\psi)$
0	114	9	109	18	92	27	67	36	35
1	114	10	107	19	90	28	64	37	31
2	114	11	106	20	87	29	60	38	[illegible]
3	114	12	104	21	85	30	57	39	24
4	113	13	103	22	82	31	54	40	[illegible]
5	112	14	101	23	79	32	50	41	[illegible]
6	112	15	99	24	76	33	46	42	12
7	111	16	97	25	73	34	43	43	[illegible]
8	110	17	95	26	70	35	39	44	[illegible]

Das Verhältniss φ kann man

$$\varphi = \frac{p'}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{b_0'}{b_0} + \frac{b'}{b}\right)$$

setzen, wenn b_0' und b' die (ebenso wie b_0 und b) reducirten Höhen
Quecksilbersäulen sind, welche die Pressung des Wasserdampfes an
unteren und oberen Station messen. Um dieselben zu finden, sind Psychro-
meter-Beobachtungen das einfachste und für den vorliegenden Zweck
ausreichende Mittel, bestehend in der Beobachtung der Temperaturen

und ϑ, welche Thermometer mit angefeuchteten Kugeln anzeigen, die neben den die Lufttemperaturen t_0 und t anzeigenden trockenen Thermometern aufgehängt sind. Sind dann nämlich β_0 und β die in derselben Einheit wie b_0 und b, b_0' und b' ausgedrückten Pressungen des gesättigten Wasserdampfes bei den Temperaturen ϑ_0 und ϑ, so ist bekanntlich*

$$b_0' = \beta_0 - k_0(t_0 - \vartheta_0)b_0$$

$$b' = \beta - k(t - \vartheta)b$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_0}{b_0} + \frac{\beta}{b}\right) - k_0\frac{t_0 - \vartheta_0}{2} - k\frac{t - \vartheta}{2}$$

oder auch etwas bequemer für die Rechnung, weil es nicht gerade auf das arithmetische, sondern eben nur auf irgend ein angemessenes Mittel hierbei ankommt,

$$\varphi = \frac{\beta_0 + \beta}{b_0 + b} - k_0\frac{t_0 - \vartheta_0}{2} - k\frac{t - \vartheta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Der Coefficient k_0 resp. k ist nach Regnault von den Umständen einigermassen abhängig, kann aber im Durchschnitt, wenn das feuchte Thermometer im Schatten und im Freien bei nur mässig bewegter Luft sich befindet, $= 0{,}0008$ gesetzt werden für ϑ_0 resp. $\vartheta > 0$, dagegen $= 0{,}00069$ für ϑ_0 resp. $\vartheta < 0$, wenn also das Wasser am feuchten Thermometer gefroren ist. Die den Temperaturen ϑ_0 und ϑ in Graden C. entsprechenden Werthe von β_0 und β in Millimetern Quecksilbersäulenhöhe können nach den Bestimmungen von Magnus der folgenden Tabelle entnommen werden.

ϑ	β	ϑ	β	ϑ	β	ϑ	β	ϑ	β
−14	1,52	−6	2,89	2	5,23	10	9,18	18	15,35
−13	1,65	−5	3,11	3	5,62	11	9,75	19	16,34
−12	1,80	−4	3,36	4	6,03	12	10,42	20	17,40
−11	1,95	−3	3,62	5	6,47	13	11,13	21	18,50
−10	2,11	−2	3,90	6	6,94	14	11,88	22	19,67
−9	2,28	−1	4,20	7	7,44	15	12,68	23	20,91
−8	2,47	0	4,52	8	7,96	16	13,52	24	22,21
−7	2,67	1	4,87	9	8,52	17	14,41	25	23,58

Bei einer Messung des „grossen Miesing“ im bayerischen Hochgebirge**

* Siehe u. A. Dr. A. Mousson's Physik auf Grundlage der Erfahrung, Bd. II. 2te Aufl., S. 159.

** Beobachtungen und Untersuchungen über die Genauigkeit barometrischer Höhenmessungen und die Veränderungen der Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre; von Dr. Carl Maximilian Bauernfeind. München, 1862.

war z. B.

$$z_0 = 815 \text{ Mtr.};\quad b_0 = 0{,}6916 \text{ Mtr.};\quad t_0 = 13{,}6^0;\quad \vartheta_0 = 12^0$$
$$\psi = 47^0\,40';\quad b = 0{,}6085 \;\;„\;;\quad t = 6{,}1^0;\quad \vartheta = 6^0;$$

also $\beta_0 = 10{,}42$ und $\beta = 6{,}94$ Millim.

Hiermit erhält man:

$$lg\,18404 \ldots\ldots = 4{,}26491$$
$$lg\,(lg\,b_0 - lg\,b) \ldots = 0{,}74468$$
$$lg\left(1{,}0025 + \frac{t_0 + t}{543}\right) = 0{,}01652$$
$$(k_0 = k = 0{,}0008);\qquad lg\left(1 + \frac{3}{8}\varphi\right) \ldots = 0{,}00206$$
$$3{,}02817$$
$$lg\,(1 + 0{,}0026\cos 2\psi) = -\,0{,}00011$$
$$lg\,h' = 3{,}02806$$
$$h' = 1066{,}7;\qquad \frac{2z_0 + h'}{14670000} \ldots\ldots = 0{,}00018$$
$$lg\,h = 3{,}02824$$

$h = 1067{,}2$ Mtr. Die trigonometrische Messung ergab $h = 1068{,}8$ Mtr.

Die obige Formel (6), welche der Verf. schon früher aus Veranla… der Bauernfeind'schen Untersuchungen und im Anschlusse an die E… wickelungen desselben hergeleitet hatte* (nur mit dem Unterschiede, … dort der constante Factor in Folge einer etwas anderen Annahme hin… lich g zu 18405 statt 18404 ermittelt wurde), stimmt sowohl mit … Formel von Bauernfeind, als auch mit einer später von Dr. Rühl… aufgestellten Formel** fast vollkommen überein, so dass wenigste… Abweichungen der nach diesen Formeln gefundenen Rechnungsresu… verschwindend klein sind im Vergleich mit anderen Fehlern, welch… Formeln und ihrer Benutzung auch abgesehen von den Fehlern der … strumente und ihrer Ablesungen anhaften. Diese Mängel der baro… trischen Höhenmessung beruhen theils auf periodischen Variati… der Thermometer- und Barometerstände an demselben Orte, theils … regelmässigen und zufälligen Störungen des vorausgesetzten Gleichge… zustandes der Atmosphäre.

In dieser letzteren Beziehung muss ohne Zweifel sowohl die T… ratur, als auch die Richtung des zwischen den beiden Stationen …

* Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1864, S. 225 u. f.

** Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die … sik der Atmosphäre; von Dr. Rich. Rühlmann. 1870.

schenden Windes von Einfluss sein, und zwar muss h nach Gl. (6) zu gross gefunden werden, wenn jene Luftströmung kälter ist, als die Schichten, in deren Bereich die Stationsthermometer sich befinden, und wenn ihre Richtung mit der Richtung $A_0 A$ einen spitzen Winkel bildet, dagegen zu klein in den umgekehrten Fällen; denn in den ersteren Fällen ist $\frac{t_0 + t}{2}$ grösser, als die mittlere Temperatur der Luftschicht zwischen den Stationen, resp. das Verhältniss $\frac{b_0}{b}$ grösser, als es im Gleichgewichtszustande sein würde. Diese Einflüsse rechnungsmässig vollkommen zu berücksichtigen ist theils der Natur der Sache nach unmöglich, theils wenigstens vorläufig aus Mangel an genügenden Erfahrungen unthunlich. Indessen können sie durch Beschränkung der Beobachtungen auf möglichst windstille Tage im Wesentlichen vermieden werden, so dass sie weniger wichtig sind, als die periodischen Schwankungen, welche die Thermometer- und Barometerstände unter allen Umständen und zwar um so deutlicher zeigen, je weniger sie durch jene zufälligen Störungen des atmosphärischen Gleichgewichtes beeinflusst und verdeckt werden.

Dabei ist eine tägliche und eine jährliche Periode zu unterscheiden. Erstere ist die am meisten hervortretende und zuerst von Ramond mit Zuverlässigkeit erkannt worden. Sie bewirkt (nach Rühlmann a. a. O.), dass die barometrisch bestimmten Höhen kurz vor der Zeit der höchsten Tagestemperatur, also meist gegen 1 Uhr Nachmittags ihr Maximum und 1 bis 2 Stunden vor Sonnenaufgang ihr Minimum erreichen; sie zeigt sich am deutlichsten an Tagen, an denen bei wolkenlosem Himmel eine regelmässige Bestrahlung durch die Sonne bei Tage und eine ungestörte Ausstrahlung der Bodenwärme gegen den kalten Himmelsraum stattfindet. Die Grösse dieser täglichen Periode, d. h. der Unterschied des Maximums und Minimums der berechneten Höhe h ist ausser von localen Verhältnissen (von dem Ein- und Ausstrahlungsvermögen, sowie von der specif. Wärme des Bodens) von der Jahreszeit abhängig der Art, dass jener Unterschied im Sommer am grössten ist, bis 0,02 h und mehr betragen kann, im Winter aber auf $^1/_3$ dieses Werthes herabsinkt.

Die jährliche Periode, deren Vorhandensein zuerst von Rühlmann, wie es scheint, bestimmt nachgewiesen wurde, bewirkt, dass durchschnittlich h im Sommer zu gross und im Winter zu klein gefunden wird; den Unterschied der Monatsmittel von h für Juli und Januar findet Rühlmann nach 6jährigen Beobachtungen in Genf und am St. Bernhard = 0,011 h, wobei der wahre Werth von h = 2070 Mtr. ist.

Die Ursache dieser periodischen Abweichungen der baro-metrisch bestimmten von den wahren Höhen h ist nach Rühlmann darin zu suchen, dass der Luftschicht zwischen beiden Stationen eine falsche mittlere Temperatur t und somit ein falsches specif. Gewicht zugeschrieben wird, wenn man jene Temperatur dem arithmetischen Mittel der Thermo-meterablesungen t_0 und t an beiden Stationen gleich setzt. Auch eine an-dere einfache Function von t_0 und t würde ihm zufolge den Fehler nicht corrigiren können, weil die fraglichen Thermometer auch selbst an den Stellen, wo sie sich befinden, die wahre Lufttemperatur im Allgemeinen nicht richtig anzeigen, sondern in höherem Grade, als gewöhnlich ange-nommen wird, von der Wärmestrahlung des Erdbodens und anderer Körper in der Umgebung beeinflusst werden. Wenn man die barometrische Höhen-formel umgekehrt dazu benutzt, aus der bekannten Höhendifferenz h zweier Stationen auf die wahre mittlere Temperatur t der Luft zwischen ihnen zu schliessen, wie es Rühlmann mit Hülfe der 6jährigen Beobachtungen in Genf und am St. Bernhard gethan hat, so ergiebt sich, dass die Luft bei Weitem nicht in dem Grade und nicht so rasch sich erwärmt oder abkühlt, als es die Thermometer anzuzeigen scheinen; sie nimmt nur wenig und zögernd Theil an den täglichen Schwankungen und in sehr vermindertem Grade an den jährlichen Schwankungen der von den Thermometern an-zeigten Temperaturen. Ist somit $\frac{t_0 + t}{2}$ bei Tage grösser, bei Nacht klei-ner, als die mittlere Lufttemperatur t, desgleichen das Tagesmittel von $\frac{t_0 + t}{2}$ im Sommer grösser, im Winter kleiner, als das Tagesmittel der wahren Lufttemperatur, so muss h nach der barometrischen Formel wegen des Factors $(1 + \alpha t)$ bei Tage und im Sommer durchschnittlich zu gross, bei Nacht und im Winter durchschnittlich zu klein gefunden werden.

Den Einfluss der Wärmestrahlung des Erdbodens auf die Thermo-meter hatte schon Bauernfeind hervorgehoben. Wenn er aber mit Rück-sicht darauf angiebt, dass 10 Uhr Vormittags und 4 Uhr Nachmittags die günstigsten Tageszeiten zu barometrischen Höhenmessungen seien, so ist dies wohl nur für die bestimmte Jahreszeit und für die besonderen Ver-hältnisse richtig, unter welchen seine Beobachtungen angestellt wurden. Mit Rücksicht auf die jährliche Periode und den Einfluss zufälliger Um-stände kann vielmehr ein einigermassen zuverlässiges Urtheil in dieser Beziehung nur aus mehrjährigen regelmässig fortgesetzten Beobachtungen gewonnen werden. Nach den Untersuchungen von Rühlmann, basirt vor-zugsweise auf die mehrerwähnten Beobachtungen in Genf und am St. Bern-

lard. sind die barometrischen Höhenmessungen im Durchschnitt mit den kleinsten Fehlern behaftet, wenn sie wenigstens in unseren Gegenden in den verschiedenen Monaten zu folgenden Tagesstunden angestellt werden.

Monat.	Vorm.	Nachm.	Monat.	Vorm.	Nachm.
Januar . . .	Mittag.		Juli	6	9
Februar . .	10	4	August . .	7	8
März	8	6	September	8	6
April	7	7	October . .	10	4
Mai	7	7	November .	11	2
Juni	6	9	December .	—	1

Wenn in der Nähe der Stationen A_0 und A, deren Höhenunterschied gefunden werden soll, wenigstens 3 andere Orte B, C, D liegen, deren Meereshöhen ebenso wie diejenige von A_0 bekannt sind und von welchen am besten der eine B unter A_0, der zweite C zwischen A_0 und A, der dritte D über A liegt, so würde ein noch zuverlässigeres Resultat dadurch erhalten sein, dass gleichzeitig mit den Barometer-, Thermometer- und Psychrometer-Beobachtungen bei A_0 und A (am besten zu den so eben angeführten Tageszeiten) auch dergl. bei B, C und D angestellt werden. Aus den bekannten Höhenunterschieden der Stationen B und C, C und D liessen sich dann vermittels der Höhenformel die wahren mittleren Temperaturen der betreffenden Luftschichten BC und CD berechnen. Unter der Voraussetzung, dass die wahre Lufttemperatur proportional der Höhenzunahme abnimmt, würden diese mittleren Temperaturen zugleich die wahren Lufttemperaturen auf halber Höhe zwischen B und C, C und D sein, und würde daraus auf Grund derselben Voraussetzung auf die wahren Lufttemperaturen bei A_0 und A geschlossen werden können, welche schliesslich, für t_0 und t in Gl. (6) substituirt, die gesuchte Höhe h berechnen lassen. Die Zulässigkeit jener Annahme, dass die wahre Lufttemperatur proportional der Höhenzunahme abnimmt, wurde von Rühlmann aus den Bauernfeind'schen Messungen am Miesing, wobei von 3 Stationen B, C, D die eine C fast genau auf halber Höhe zwischen B und D lag, dadurch nachgewiesen, dass er auf Grund der trigonometrisch bekannten Höhen dieser Stationen die mittlere Temperatur der Luftschicht BD immer fast genau = dem arithmetischen Mittel der mittleren Lufttemperaturen der Schichten BC und CD fand.

Barometrische Höhenmessungen, wenn sie auf einmaligen Beobachtungen an den betreffenden Stationen beruhen, bleiben immer noch abhängig von zufälligen Störungen des atmosphärischen Gleichgewichtes. Um sie auch

hiervon unabhängig und ihre Genauigkeit mit derjenigen vergleichbar zu machen, welche einer sorgfältigen trigonometrischen Messung zukommt, müssten ihr wiederholte und lange Zeit, wo möglich Jahre lang fortgesetzte Beobachtungen zu Grunde gelegt werden. Die Vorzüge, wodurch die Methode sich besonders auszeichnet, Einfachheit der Hülfsmittel und Schnelligkeit der Ausführung, würden dadurch freilich verloren gehen.

Der praktische Gebrauch der Höhenformel kann übrigens durch Hülfstabellen erleichtert werden, in welcher Hinsicht hier auf die genannten Schriften von Bauernfeind und von Rühlmann verwiesen werden mag.

§. 68. Bestimmung des specifischen Gewichts der Körper.

In §. 66 wurde bemerkt, dass das Archimedische Princip, betreffend den Gewichtsverlust, nämlich den Ueberschuss des wahren über das scheinbare oder wirksame Gewicht des in irgend einem flüssigen oder luftförmigen Medium befindlichen Körpers, u. A. bei allen Wägungen eine wichtige Anwendung finde. Die nähere Besprechung der Theorie der Wägungen gehört in den von den mechanischen Instrumenten handelnden Abschnitt im zweiten Bande dieses Werkes; nachdem indessen schon im Vorhergehenden wiederholt vom specif. Gewicht (Gewicht der Volumeneinheit) der Körper die Rede sein musste, mag hier als Beispiel der Anwendung des Archimedischen Princips die Methode seiner Bestimmung mit Hülfe der gewöhnlichen Wage im Wesentlichen erläutert werden. Dieselbe ist nicht nur von rein wissenschaftlicher, sondern nicht selten auch von technischer Wichtigkeit, da die betreffenden Bestimmungen im physikalischen Laboratorium sich zumeist auf einfache Körper und chemische Verbindungen in reinem Zustande beziehen, die specif. Gewichte der mehr oder weniger mit nebensächlichen Beimischungen versehenen Rohmaterialien und der technischen Producte aber häufig nicht aus physikalischen Tabellen entnommen werden können, sondern vom Techniker selbst bestimmt werden müssen. —

1) Es sei für einen festen Körper

P sein unbekanntes wahres Gewicht,

s sein gesuchtes specif. Gewicht bei 0^0,

α sein mittlerer Volumen-Ausdehnungscoefficient für das Temperaturintervall von 0^0 bis t^0 (§. 23).

Der Körper wird zunächst in der Luft gewogen, und es sei dabei

p das wahre Gewicht,

σ das specif. Gewicht bei 0°,

α der mittlere Volumen-Ausdehnungscoefficient für das Temperaturintervall von 0° bis t^0 irgend eines der Gewichtstücke, welche zur Herstellung des Gleichgewichtes auf die andere Wagschale S_2 gelegt werden.

Bei der Wägung sei

t die Temperatur der Luft, des Körpers und der Gewichtstücke,

λ das specif. Gewicht der Luft, mit Rücksicht auf ihre Temperatur, den Barometerstand und, sofern es nöthig scheint, ihren Feuchtigkeitszustand nach §. 17 zu bestimmen. Wird dann zur Abkürzung

$$1 + at = b, \quad 1 + \alpha t = \beta$$

gesetzt, so ist das Volumen des Körpers bei $t^0 = P\frac{b}{s}$, das Gewicht der verdrängten Luft $= \lambda P\frac{b}{s}$, also das wirksame (die Wage belastende) Gewicht des Körpers $= P\left(1 - \lambda\frac{b}{s}\right)$; ebenso die Summe der wirksamen Gewichte der Gewichtstücke $= \Sigma p\left(1 - \lambda\frac{\beta}{\sigma}\right)$ und somit dem Gleichgewicht an der Wage entsprechend:

$$P\left(1 - \lambda\frac{b}{s}\right) = \Sigma p\left(1 - \lambda\frac{\beta}{\sigma}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Nun wird der Körper im Wasser gewogen, d. h. unter die Wagschale S_1 gehängt, auf welcher er lag, so dass er jetzt im Wasser schwebt ohne das Gefäss zu berühren; auf dieselbe Schale S_1 sind dann weitere Gewichte p' aufzulegen (deren specifische Gewichte bei 0° und mittlere Ausdehnungscoefficienten von 0° bis t^0 wieder mit σ und α bezeichnet seien), um ohne Änderung der die Schale S_2 belastenden Gewichte p die Wage auf's Neue zum Einspielen zu bringen. Dabei ist vorausgesetzt, dass das Aufhängungsmittel für die Wägung des Körpers in Wasser (ein möglichst dünner Draht, eine möglichst leichte Kette etc. je nach der Schwere des Körpers) schon bei der ersten Wägung unter die Schale S_1 gehängt und, ebenso weit in das Wasser eintauchend wie bei der zweiten Wägung, durch entsprechende Gegengewichte auf S_2 austarirt worden war, so dass es in diesem Zustande nebst seinen Gegengewichten als Bestandtheil der Wage selbst betrachtet und in den Gleichungen ausser Betracht bleiben kann. Ist nun

t' die auch dem Körper sich mittheilende Temperatur und

γ' das entsprechende, nach §. 22 zu bestimmende specif. Gewicht des Wassers,

ist ferner der Zustand der Luft derselbe geblieben wie bei der ersten

Wägung, so ist mit $1 + \alpha t = \beta$, wie zuvor, und mit

$$1 + \alpha' t' = b',$$

unter α' den mittleren Volumen-Ausdehnungscoefficienten des Körpers von 0 bis t' verstanden,

$$P\left(1 - \gamma' \frac{b'}{s}\right) + \Sigma p' \left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right) = \Sigma p \left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$

Damit die Voraussetzung eines bei beiden Wägungen gleichen Luftzustandes genügend zutreffe, sind dieselben binnen so kurzer Frist auszuführen, dass der Körper nur eben genügend Zeit hat, bei der Wägung in Wasser die Temperatur t' desselben anzunehmen. Ist dann der Zustand der Luft durch Thermometer, Barometer und Psychrometer (§. 67) unmittelbar vor der ersten und nach der zweiten Wägung beobachtet worden, so können den beiden Gleichungen (1) und (2) die arithmetischen Mittel dieser Beobachtungswerthe zu Grunde gelegt werden. Durch Subtraction dieser Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{P}{s}(\gamma' b' - \lambda b) = \Sigma p' \left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3$$

Die zweite Wägung kann auch auf folgende Weise ausgeführt werden. Auf die Schale S_1 wird ein Gefäss mit Wasser gestellt und durch Gegengewicht auf der Schale S_2 die Wage zum Einspielen gebracht, während von oben her ein an einem festen Punkte A aufgehängter Draht oder eine Kette in das Wasser herabreicht ohne das Gefäss zu berühren. An diesem Aufhängungsmittel wird dann der zu prüfende Körper befestigt und dasselbe aufs Neue in das Wasser eingesenkt bis zu derselben Stelle wie vorher, so dass der Körper ohne Berührung des Gefässes sich ganz unter Wasser befindet. Das wahre Gewicht des Körpers, welches in der Luft $= P\left(1 - \lambda \frac{b}{s}\right)$ ist, wird unter Wasser von der Temperatur t', sofern diese bis auch dem Körper sich mittheilt, auf $P\left(1 - \gamma' \frac{b'}{s}\right)$ reducirt, also um

$$\frac{P}{s}(\gamma' b' - \lambda b)$$

vermindert, und indem der feste Punkt A oder das Aufhängungsmittel um diesen Betrag entlastet wird, wird die Schale S_1 um denselben belastet; zur Herstellung des Gleichgewichtes müssen also Gewichte p' auf der anderen Schale S_2 hinzugefügt werden, welche wieder der Gl. (3) entsprechen.

Diese Abänderung des Verfahrens der Wägung des Körpers in Wasser

in das Wasser eines Gefässes (eines Troges) auf der Wagschale einsenken, als unten daran anhängen lassen, besonders wenn statt der gewöhnlichen gleicharmigen Wage in solchen Fällen eine Brückenwage benutzt wird.*

Aus Gl. (1) und (3) ergiebt sich nun

$$\frac{s - \lambda b}{\gamma' b' - \lambda b} = \frac{\Sigma p \left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right)}{\Sigma p' \left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right)}$$

$$s = \frac{\Sigma p \left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right)}{\Sigma p' \left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right)} (\gamma' b' - \lambda b) + \lambda b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

und wenn alle Gewichtstücke (etwa mit Ausnahme der kleinsten, deren Gewichtsverluste in der Luft sehr geringen Einfluss auf das Resultat haben) von einerlei Art sind, so dass ihre specif. Gewichte und Ausdehnungscoefficienten einander gleich gesetzt werden können,

$$s = \frac{\Sigma p}{\Sigma p'} (\gamma' b' - \lambda b) + \lambda b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Da γ' viel grösser ist, als λ, so kann man auch mit meist genügender Annäherung, um so genauer, je weniger t und t' verschieden sind,

$$\frac{s}{b'} = \frac{\Sigma p}{\Sigma p'} (\gamma' - \lambda) + \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

setzen; die linke Seite ist das specif. Gewicht des Körpers bei der Temperatur t'.

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass man das Ausdehnungsgesetz des Körpers bei wachsender Temperatur kennt. Wäre dies nicht der Fall, so würde s gefunden, indem die zweite Wägung in Wasser von 0° ausgeführt wird, so dass $b' = 1$ ist, während $\lambda b = \lambda$ gesetzt werden kann, wenn die Lufttemperatur bei beiden Wägungen nur wenig von 0° verschieden ist, wer auch b als Factor von λ mit einem ungefähren Werth des Ausdehnungscoefficienten genügend berechnet werden kann, welcher in den meisten Fällen bekannt ist. Uebrigens kann auch das Verfahren selbst dazu dienen, das Ausdehnungsgesetz des Körpers mitzubestimmen. Setzt man z. B. (§. 23, 2 und 3) seinen Ausdehnungscoefficienten für die Temperatur $t = a_0$

* Nach einer Notiz der Comptes rendus vom Jahre 1856, Septemberheft, ist z. B. ein solches Verfahren seit 1835 in der Geschützgiesserei zu Strassburg nach Vorschrift des ehemaligen Directors dieser Anstalt, Oberstlieutenant Albertin, in Gebrauch zur Bestimmung des specif. Gewichts der Geschützrohre.

$+2a_1t$, also den Mittelwerth a für das Intervall von 0° bis $t^0 = a_0 + a_1t$ so dass

$$b = 1 + (a_0 + a_1t)t; \quad b' = 1 + (a_0 + a_1t')t'$$

ist, so enthalten die Gleichungen (4) bis (6) die 3 Unbekannten s, a_0 und a_1, welche daraus gefunden werden können, wenn die Wägung in Wasser bei wenigstens 3 verschiedenen, möglichst weit aus einander liegenden Temperaturen t' ausgeführt wird. —

2) Um das specifische Gewicht einer anderen Flüssigkeit zu bestimmen, kann man einen festen Hülfskörper, für welchen P und s unbekannt sein dürfen, ausser in Wasser auch in dieser anderen Flüssigkeit wiegen. Ist dann t'' die Temperatur derselben, δ'' ihr entsprechendes specif. Gewicht, und werden mit p'' die wahren Gewichte der dabei (an Stelle von p' bei der Wägung in Wasser) gebrauchten Gewichtstücke bezeichnet, so ist, wenn wieder t' die Temperatur, γ' das specif. Gewicht des Wassers, t die Temperatur, λ das specif. Gewicht der Luft bedeutet, deren Zustand bei beiden Wägungen als gleich vorausgesetzt wird, analog Gl. (4):

$$\frac{P}{s}(\delta''b'' - \lambda b) = \Sigma p''\left(1 - \lambda\frac{\beta}{\sigma}\right) \text{ mit } b'' = 1 + a''t'',$$

also

$$\frac{\delta''b'' - \lambda b}{\gamma'b' - \lambda b} = \frac{\Sigma p''\left(1 - \lambda\frac{\beta}{\sigma}\right)}{\Sigma p'\left(1 - \lambda\frac{\beta}{\sigma}\right)}$$

und daraus, wenn alle Gewichtstücke von einerlei Art sind,

$$\delta'' = \frac{\Sigma p''}{\Sigma p'}\left(\gamma'\frac{b'}{b''} - \lambda\frac{b}{b''}\right) + \lambda\frac{b}{b''} \text{ . . . . (7)}$$

Um auch vom Ausdehnungscoefficienten des festen Hülfskörpers unabhängig zu werden, hat man $t' = t''$ zu wählen, so dass $\frac{b'}{b''} = 1$ ist, während $\frac{b}{b''}$ entweder mit dem wenigstens ungefähr zumeist bekannten Ausdehnungscoefficienten des fraglichen Körpers hinlänglich genau berechnet oder gar auch $= 1$ gesetzt werden kann; im letzteren Falle wird

$$\delta'' = \frac{\Sigma p''}{\Sigma p'}(\gamma' - \lambda) + \lambda \text{ . . . . (8)}$$

Man findet auf diese Weise zunächst nur das specif. Gewicht der Flüssigkeit für die bestimmte Temperatur t''; setzt man es aber = einer Temperaturfunction, welche n constante Coefficienten enthält, so können dieselben gefunden werden, indem das specif. Gewicht der Flüssigkeit für

wenigstens n verschiedene, möglichst weit aus einander liegende Temperaturen t'' bestimmt wird. —

3) Das specifische Gewicht eines luftförmigen Körpers kann mit Hülfe eines durch einen Hahn verschliessbaren Glasballons bestimmt werden, welcher 1) mit Luft von atmosphärischer Pressung, 2) mit möglichst verdünnter (oder auch mit verdichteter) Luft, 3) mit dem zu prüfenden Gase oder Dampf gefüllt gewogen wird. Wenn wieder der Zustand der äusseren Luft bei diesen verschiedenen Wägungen als gleich vorausgesetzt wird, so ist auch das wirksame Gewicht $= B$ des Ballons (Ueberschuss eines wahren Gewichts über das im geschlossenen Zustande von ihm verdrängte Gewicht der atmosphärischen Luft) und das Volumen $= V$ seines Hohlraumes (abgesehen von dem geringen Einflusse einer verschiedenen inneren Pressung) in allen drei Fällen gleich. Bezeichnen also p, p' und p'' die wahren Gewichte der Gewichtstücke, welche auf der anderen Wagschale beziehungsweise bei der ersten, zweiten und dritten Wägung das Gleichgewicht herstellen, und ist λ bei der erten, λ' bei der zweiten Wägung das specif. Gewicht der Luft im Inneren des Ballons, bei der dritten aber μ'' das gesuchte specif. Gewicht der anderen Luftart für die betreffende und besonders zu beobachtende Pressung und Temperatur, so hat man

$$B + \lambda V = \Sigma p\left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right)$$

$$B + \lambda' V = \Sigma p'\left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right)$$

$$B + \mu'' V = \Sigma p''\left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right)$$

also durch Elimination der Unbekannten B und V

$$\frac{\lambda - \mu''}{\lambda - \lambda'} = \frac{\Sigma p\left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right) - \Sigma p''\left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right)}{\Sigma p\left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right) - \Sigma p'\left(1 - \lambda \frac{\beta}{\sigma}\right)}$$

und daraus, wenn die grösseren Gewichtstücke alle von gleicher Art sind,

$$\mu'' = \lambda - (\lambda - \lambda') \frac{\Sigma p - \Sigma p''}{\Sigma p - \Sigma p'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Die Anwendung der vorstehend erklärten Methoden setzt voraus, dass die specif. Gewichte des Wassers und der Luft für verschiedene Zustände bekannt sind. Ihre eigene Bestimmung, welche übrigens auf ähnlichen Grundsätzen beruht und nur mit Rücksicht auf ihre fundamentale Bedeu-

tung für andere Bestimmungen einer grösseren Genauigkeit durch möglichste Berücksichtigung aller Nebenumstände bedarf, ist kein technisches Problem, sondern Sache des Physikers. Auch in Betreff anderer Methoden zur Bestimmung der specifischen Gewichte muss hier auf die Lehrbücher der Physik verwiesen werden. Es mag nur noch angeführt werden, dass die specif. Gewichte σ (Gramm pro Cubikcentim.) und die mittleren Volumen-Ausdehnungscoefficienten α von Gewichtstücken aus Gusseisen, Messing und Platin durchschnittlich mit folgenden Werthen in Rechnung gebracht werden können:

Gusseisen: $\sigma = 7,2$; $\alpha = 0,000033$,
Messing: $\sigma = 8,4$; $\alpha = 0,000056$,
Platin: $\sigma = 21,3$; $\alpha = 0,000026$.

B. Bewegung der Flüssigkeiten.

§. 69. Uebersicht der Aufgaben und ihrer Behandlung.

Die im Folgenden zu untersuchenden Bewegungen von Flüssigkeiten sind theils strömende, theils oscillirende Bewegungen, von denen die letzteren jedoch nur als Wellenbewegung des Wassers technische Wichtigkeit haben.

Strömende Bewegungen, d. h. solche, welche dauernd in gleichem Sinne stattfinden, pflegen durch feste Wände begrenzt und hinsichtlich ihrer Gesetze bedingt zu werden, so dass es angemessen ist, je nach der Art dieser Wände oder Leitflächen verschiedene Fälle zu unterscheiden. Bei der Bewegung in Gefässen und Röhren, d. h. in solchen Leitungen, durch welche die Flüssigkeit rings umschlossen wird, so dass sie ohne freie Oberfläche (ausser am Anfang und am Ende der ganzen Leitung) sich strömend bewegt, kann dieselbe wässerig oder luftförmig sein, und es sind dabei namentlich die beiden Fälle des Ausflusses aus Gefässmündungen und der Bewegung in längeren Röhren zu betrachten. Bei luftförmigen Flüssigkeiten beschränkt sich hierauf die Untersuchung, da diese ihre überhaupt nur durch einschliessende Wände eine bestimmt angebbare Begrenzung erhalten; was aber die wässerigen Flüssigkeiten betrifft, so ist die Bewegung des Wassers in Canälen von nicht geringerer Wichtigkeit, d. h. in oben offenen Leitungen, längs deren ganzer Länge die Oberfläche des strömenden Wassers theils freie, theils Wand-

freier **Wasserstrahlen**, namentlich in Beziehung auf die Steighöhe eines in der Luft vertical aufsteigenden, sogen. springenden Strahls.

In allen Fällen strömender Bewegung ist der **Beharrungszustand** oder die **permanente Bewegung** von besonderer Wichtigkeit, charakterisirt durch die Unveränderlichkeit des äusseren und inneren, d. h. des Bewegungs- und Wärmezustandes in jedem bestimmten Punkt des Raumes, so dass der Zustand nur von Ort zu Ort, nicht aber an demselben Orte mit der Zeit veränderlich ist; mit Rücksicht auf die etwa eigene Bewegung des Gefässes, der Röhre, des Canals, überhaupt der festen Leitung (bezüglich auf die Erde) ist dabei unter einem bestimmten Punkt des Raumes stets ein solcher zu verstehen, welcher eine bestimmte Lage gegen die Leitung (bei freien Wasserstrahlen gegen die Erde) besitzt, mit welcher auch das jeweilige System von Coordinatenaxen fest verbunden zu denken ist.

Zu den Aufgaben der Hydraulik gehört endlich die Untersuchung des **gegenseitigen Drucks zwischen Flüssigkeiten und festen Körpern bei ihrer relativen Bewegung**; bezüglich auf den festen Körper kann derselbe theils als belastender oder beschleunigender Druck, theils als sogenannter Widerstand des Mittels in Betracht kommen. Dabei sind wieder verschiedene Fälle je nach der Begrenzung der Flüssigkeit zu unterscheiden, welche entweder ein isolirter freier Strahl sein oder den festen Körper allseitig einschliessen oder auch als wässerige Flüssigkeit mit freier Oberfläche nur unterhalb derselben einen theilweise eingetauchten Körper umgeben kann. —

Zur Lösung dieser verschiedenen Aufgaben sind nach §. 12 im Allgemeinen 7 Grössen als Functionen der Coordinaten x, y, z und der Zeit t zu bestimmen: die Geschwindigkeitscomponenten u_x, u_y, u_z, das specif. Volumen v, die Pressung p, die Temperatur und das innere Arbeitsvermögen. Zur Verfügung sind dabei die drei Differentialgleichungen, welche dem Gleichgewicht zwischen den auf ein Massenelement wirkenden Massen- und Flächenkräften und den Reactionskräften gegen seine Beschleunigung entsprechen (sie mögen die **Fundamentalgleichungen** heissen), die Continuitätsgleichung, eine Gleichung bezüglich auf die Wärmeleitung im Inneren der Flüssigkeit, die Zustandsgleichung derselben und die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens. Die 5 ersten dieser Gleichungen sind partielle Differentialgleichungen und allgemein gültig, die beiden letzten sind für verschiedene Flüssigkeiten verschieden; in den 4 ersten sind die Temperatur und das innere Arbeitsvermögen, in den 3 letzten die Geschwindigkeitscomponenten nicht enthalten. Die Integrationen müssten mit Rücksicht auf die **Grenzbedingungen** bezüglich auf Zeit und Raum, d. h.

mit Rücksicht auf den gegebenen Anfangszustand und auf die Ober-flächenbedingungen versucht werden. Letztere betreffen theils die Gestalt der Oberfläche, theils den äusseren Druck an derselben, theils den etwaigen Wärmeaustausch zwischen der Flüssigkeit und anderen Körpern.

Entsprechend der den theoretischen Gleichungen zu Grunde liegenden Vorstellung (§. 52), dass jede relative Bewegung im Inneren der Flüssigkeit nur durch entsprechende Deformationen der Flüssigkeitselemente, worunter hier immer Massenelemente im Sinne von §. 1 verstanden werden sollen, vermittelt wird (vorbehaltlich der Berücksichtigung solcher Bewegungen, welche sich dieser Vorstellung in der Rechnung entziehen, durch empirische Coefficienten), muss für jedes Flüssigkeitselement an der Oberfläche die Geschwindigkeit tangential an dieselbe gerichtet sein. Ist also

$$f(x, y, z, t) = 0$$

die gegebene Gleichung eines Theils der Oberfläche, der im Allgemeinen mit der Zeit veränderlich sein kann, so müssen dem Differential derselben die Incremente

$$dx = u_x dt, \quad dy = u_y dt, \quad dz = u_z dt$$

entsprechen, wenn u_x, u_y, u_z die Geschwindigkeitscomponenten eines materiellen Punktes oder Flüssigkeitselementes an diesem Theil der Oberfläche bedeuten, woraus die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad 1$$

hervorgeht; für eine feste Wand ist $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

schuss der Temperatur des äusseren Körpers über die der Flüssigkeit zunächst dem Flächenelement dF bedeutet; dQ und Δt können dabei gleichzeitig positiv oder negativ sein. Bei den technischen Anwendungen ist eine solche Wärmemittheilung an der Oberfläche im einen oder anderen Sinne oft nicht sowohl ein nebensächlicher und allenfalls zu vernachlässigender Umstand, als vielmehr Zweck der betreffenden Anlage (Wasser-, Luft- und Dampfheizungen, Kesselheizungen, Winderwärmungsapparate u. s. w.), und sie pflegt dann durch eine feste materielle Wand von einer gewissen Dicke vermittelt zu werden, welche auf der anderen Seite von einer anderen Flüssigkeit berührt wird. Ist dann Δt der (positive oder negative) Ueberschuss der Temperatur dieser letzteren über die der betrachteten Flüssigkeit zunächst der Wand an der Stelle des Elementes dF, so kann man setzen:

$$dQ = k\,\Delta t\,dF\,dt \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3),$$

worin k einen **Wärmedurchgangscoefficienten** bedeutet, welcher von den Wärmeübergangscoefficienten an beiden Oberflächen der Wand, von ihrem Leitungscoefficienten λ (§. 9), von ihrer Dicke und event. von ihrer Krümmung abhängt; auch etwaige Wärmestrahlungen pflegen bei seiner Bestimmung zugleich mit berücksichtigt zu werden. Diese Bestimmung gehört zu den Aufgaben des nächsten Abschnitts, welcher von der Heizung handelt; hier wird k als eine gegebene Grösse betrachtet.

Die Lösungen der verschiedenen oben angedeuteten Aufgaben der Hydraulik auf Grund der angeführten Gleichungen und Grenzbedingungen bleiben schliesslich zum Zweck der technischen Anwendungen noch durch empirische **Coefficienten** (§. 52) zu corrigiren mit Rücksicht auf die Abweichungen der dabei in Betracht kommenden Flüssigkeiten von dem in den theoretischen Gleichungen vorausgesetzten idealen Zustande vollkommener Flüssigkeit und mit Rücksicht auf solche Bewegungswiderstände, welche in jenen Gleichungen und in den analytischen Grenzbedingungen nicht zum Ausdruck gebracht werden konnten, wobei ferner zu berücksichtigen ist, dass durch diese Widerstände nicht nur lebendige Kraft verloren, sondern auch entsprechende Wärme gewonnen, also die Temperatur beeinflusst wird. Auch abgesehen hiervon lässt übrigens schon der analytische Charakter der fraglichen Gleichungen sofort erkennen, dass ihre Verwendung zur Lösung der betreffenden Aufgaben, zumal in einer für den technischen Gebrauch geeigneten Form, stets mehr oder weniger vereinfachende Annahmen nöthig macht.

Wenn Mittheilung oder Entziehung von Wärme an der Oberfläche und Wärmeentwickelung durch Bewegungswiderstände, deshalb auch Wärme-



leitung im Inneren nur in untergeordnetem Grade stattfindet, so kann ein Vereinfachung namentlich dadurch herbeigeführt werden, dass eine gewisse Beziehung zwischen der Pressung p und dem specif. Volumen v von vorn herein angenommen wird, insbesondere z. B. die Gleichung

$$pv^m = Const.,$$

unter m eine Constante verstanden, welche, wenn die Zustandsänderung als bei constanter Temperatur stattfindend vorausgesetzt werden kann, für tropfbare Flüssigkeiten $= \infty$ (also $v = Const.$, p unabhängig von v), für Gase $= 1$ zu setzen ist, oder bei Zustandsänderungen ohne Mittheilung resp. Entziehung von Wärme für Gase $= n$, d. h. $=$ dem Verhältniss der specif. Wärmen bei constanter Pressung und bei constantem Volumen (§. 20), für Dämpfe und (näherungsweise und innerhalb gewisser Grenzen) für Gemische von Dampf und gleichartiger tropfbarer Flüssigkeit (§. 4 und §. 35) $=$ einem anderweitigen constanten Werth zu setzen ist. Hierdurch sind die Temperatur und das innere Arbeitsvermögen von der Untersuchung ausgeschlossen, und sind die drei Geschwindigkeitscomponenten nebst den Grössen p, v durch die vorausgesetzte Beziehung zwischen den letzteren und durch die 4 ersten der oben genannten 7 Gleichungen (durch die Fundamentalgleichungen und die Continuitätsgleichung) mit Rücksicht auf die gegebenen Grenzbedingungen bestimmt. Zur Entwickelung ihrer Ausdrücke in endlicher Form können weitere Vereinfachungen durch die vorläufige Abstraction von den inneren Reibungen (von den Gliedern mit R in den 3 ersten der allgemeinen Gleichungen) und durch gewisse Annahmen in Betreff des Gesetzes, nach welchem sich die Geschwindigkeitscomponenten mit den Coordinaten ändern, herbeigeführt werden. Letzteres wird auch besonders dann nöthig, wenn wegen erheblicher Wärmeleitung und Wärmeentwickelungen durch Bewegungswiderstände die zuerst genannte Vereinfachung unzulässig ist, die Gesetzmässigkeit der Temperaturänderungen vielmehr wesentlich mit untersucht werden muss; eine willkürliche, wenn nur im Allgemeinen den Verhältnissen angepasste Annahme in Betreff des Aenderungsgesetzes der Geschwindigkeiten ist dann zudem um so mehr gerechtfertigt, als dieses Gesetz durch den Einfluss der Wärme und der Widerstände mittelbar oder unmittelbar in einer solchen Weise be-

falls das System der festen Leitflächen, worauf die Bewegung der Flüssigkeit als relative Bewegung bezogen wird und womit die Coordinatenaxen der x, y, z fest verbunden sind, eine eigene Bewegung bezüglich auf die Erde hat. Von Wichtigkeit ist dabei namentlich der Fall, dass diese Bewegung in einer **Rotation um eine feste Axe** besteht. Wird dann die z-Axe in der Rotationsaxe angenommen, und ist ϑ der constante Winkel, den sie mit der Richtung von g bildet, ist ferner ω die im Allgemeinen veränderliche Winkelgeschwindigkeit im Sinne von der positiven x-Axe durch den rechten Winkel zur positiven y-Axe, und wird die x-Axe so angenommen, dass sie zur Zeit $t = 0$ die Richtung der zur z-Achse senkrechten Componente $= g \sin \vartheta$ hat, zur Zeit t also mit ihr im Sinne von ω den Winkel

$$\int_0^t \omega \, dt$$

bildet, so sind die Componenten von g nach den Axen der x, y, z beziehungsweise

$$= g \sin \vartheta \cos \int_0^t \omega \, dt, \quad - g \sin \vartheta \sin \int_0^t \omega \, dt, \quad g \cos \vartheta.$$

Ist ferner $AB = r$ das Loth von dem materiellen Punkte $A (x, y, z)$ der Flüssigkeit auf die z-Axe, und ist β der Winkel zwischen der Richtung BA und der positiven x-Axe (immer verstanden im Sinne von ω, nämlich von der positiven x-Axe gegen die positive y-Axe hin), so lässt sich die erste Ergänzungskraft der relativen Bewegung pro Masseneinheit zerlegen in die Normalcomponente $= \omega^2 r$ mit dem Richtungswinkel β und in die Tangentialcomponente $= \frac{d\omega}{dt} r$ mit dem Richtungswinkel $= \beta - \frac{\pi}{2}$ gegen die x-Axe; wegen

$$r \sin \beta = y$$

$$r \sin \left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = - x$$

sten Ergänzungskraft

$$\text{xe} = \omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y,$$

$$\text{xe} = \omega^2 y - \frac{d\omega}{dt} x,$$

$$\text{ke} = 0.$$

te senkrechte Componente der relativen
n Punktes A und α ihr Richtungswinkel

mit der x-Axe, so ist die zweite Ergänzungskraft der relativen Bewegu
pro Masseneinheit $= 2\omega u_{xy}$ und ihr Richtungswinkel mit der x-Ax
$= \alpha - \frac{\pi}{2}$, da ihre Richtung erhalten wird, indem die Richtung von u_{xy}
in der zur z-Axe senkrechten Ebene um $\frac{\pi}{2}$ entgegengesetzt dem Sinne v
ω gedreht wird. Wegen

$$u_{xy} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = u_{xy} \sin\alpha = u_y$$

$$u_{xy} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = - u_{xy} \cos\alpha = - u_x$$

sind also die Componenten dieser zweiten Ergänzungskraft nach den Ax
der x, y, z

$$= 2\omega u_y, \quad -2\omega u_x \quad \text{und } 0.$$

Im Ganzen sind somit die Componenten der beschleunigenden Masse
kraft im vorliegenden Falle:

$$\left.\begin{aligned}
X &= g \sin\vartheta \cos\int_0^t \omega dt + \omega^2 x + \frac{d\omega}{dt} y + 2\omega u_y \ldots \\
Y &= - g \sin\vartheta \sin\int_0^t \omega dt + \omega^2 y - \frac{d\omega}{dt} x - 2\omega u_x \\
Z &= g \cos\vartheta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots$$

Ist die Winkelgeschwindigkeit ω constant, so ist

$$\int_0^t \omega dt = \omega t \text{ und } \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

I. Allgemeine Sätze.

§. 70. Widerstandslose Bewegung einer Flüssigkeit für den Fall d Existenz einer Kraftfunction und einer Geschwindigkeitsfunction.

Die Geschwindigkeitscomponenten, welche im vorigen §. mit u_x, u_y,
bezeichnet wurden, seien der Einfachheit wegen mit u, v, w bezeichnet
während die specif. Masse μ anstatt des specif. Volumens benutzt w
um in Verbindung mit der Pressung p den inneren Zustand zu charakteri
siren. Dann hat man nach §. 5, Gl. (6) und (7) mit $R = 0$, d. h. bei A
straction von der inneren Reibung, die Fundamentalgleichun

$$
\left.\begin{aligned}
X-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\\
Y-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\\
Z-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ (1)
$$

nd die Continuitätsgleichung

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial(\mu u)}{\partial x}+\frac{\partial(\mu v)}{\partial y}+\frac{\partial(\mu w)}{\partial z}=0\ \ldots\ldots\ldots\ (2),$$

elche für $\mu = Const.$ (für eine incompressible Flüssigkeit von constanter emperatur) die einfachere Form annimmt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2, a).$$

Mit Rücksicht auf die gegebenen Grenzbedingungen sind durch die eichungen (1) und (2) und durch die Beziehung zwischen p und μ, elche hier als gegeben vorausgesetzt wird, diese letzteren Grössen nd die Geschwindigkeitscomponenten — im Falle μ = einer gegebenen onstanten durch die Gleichungen (1) und (2, a) die Grössen p, u, v, w — s Functionen von x, y, z, t bestimmt.

In Betreff der Kraftcomponenten X, Y, Z werde angenommen, dass ie den beziehungsweise nach x, y, z genommenen Differentialquotienten iner gewissen Function gleich seien, welche wie in §. 53 die Kraftfunction heisse und mit U bezeichnet sei, hier aber eine Function nicht nur on x, y, z, sondern im Allgemeinen auch von t sein kann. Es sei also

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad Z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

ist. Die Fundamentalgleichungen (1) erhalten hierdurch die Formen:*

$$\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

und lassen sich auf eine Gleichung reduciren, indem sie beziehungsweise mit dx, dy, dz multiplicirt, addirt und integrirt werden; dadurch ergiebt sich

$$\text{mit}\quad \frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz=dp$$

$$U-\int\frac{dp}{\mu}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\cdot\cdot\quad 5$$

Indem die Integration nur in Beziehung auf x, y, z ausgeführt wurde, wäre noch eine willkürliche Function von t als Integrationsconstante hinzuzufügen, welche aber in φ so einbegriffen werden kann, dass sie als Summand in dem Gliede $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ enthalten ist. Durch diese Gleichung 5 und durch die Continuitätsgleichung

---

* Es ist bemerkenswerth, dass aus ihnen im Falle $\mu = Const.$ die innere Reibung auch dann verschwindet, wenn nicht $R = 0$ gesetzt wird. Mit Rücksicht auf dieselbe wäre dann nämlich in der ersten der Gleichungen (1) a:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu . \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0 \; \ldots \; (6),$$

welche für $\mu = Const.$ die Form

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (6, a)$$

annimmt, sind in Verbindung mit den Grenzbedingungen im Specialfalle $\mu = Const.$ die Grössen p und φ, im allgemeinen Falle mit Rücksicht auf die gegebene Beziehung zwischen p und μ diese beiden Grössen und φ, durch φ in beiden Fällen dann auch die Geschwindigkeitscomponenten $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ bestimmt.

Besteht eine Grenzbedingung darin, dass

$$f(x, y, z, t) = 0$$

die Gleichung eines gewissen Theils der Oberfläche gegeben ist, so muss nach Gl. (1) im vorigen §. für alle Punkte dieses Theils der Oberfläche die Function φ der Gleichung entsprechen:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \; \ldots\ldots\ldots \; (7).$$

Für eine feste Wand $\left(\frac{\partial f}{\partial t} = 0\right)$ sind $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ proportional den Cosinus der Winkel zwischen der Normalen und den Axen. Ist also dn ein Element dieser Normalen mit den Projectionen dx, dy, dz auf den Axen, so kann Gl. (7) geschrieben werden:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{d\varphi}{dn} = 0 \; \ldots\ldots\ldots \; (8).$$

die Geschwindigkeiten, mit welchen die Verlängerungen der Kanten *Aa* *Ab*, *Ac*,

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

die Winkelgeschwindigkeiten, mit welchen die Verkleinerungen der Wink[el] an jenen Kanten augenblicklich stattfinden. Die Ortsänderung des Flüssi[g]keitselementes lässt sich in 3 Translationen mit den Geschwindigkeit[en] u, v, w nach den Richtungen *Aa*, *Ab*, *Ac* und in 3 Rotationen um die Kanten zerlegen, deren Winkelgeschwindigkeiten $= \alpha, \beta, \gamma$ seien. Da n[un] nach §. 5

$\frac{\partial w}{\partial y}$ die Winkelgeschwindigkeit von *Ab* um *Aa* im Sinne *bc*,

$\frac{\partial v}{\partial z}$ " " " *Ac* " " " " *cb*

ist, so ist $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$ die mittlere Winkelgeschwindigkeit, mit welch[er] sich die Punkte des Flüssigkeitselementes augenblicklich um *Aa* im Sin[ne] *bc* drehen, also

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\beta, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\gamma \ldots$$

Der Umstand, dass die Bedingungen (4) in einem gewissen Augenbli[ck] erfüllt sind, kommt hiernach darauf hinaus, dass die Flüssigkeitselem[ente] in diesem Augenblick nicht rotiren, und die beständige Erfüllung je[ner] Bedingungen, also die Existenz einer Geschwindigkeitsfunct[ion] setzt eine beständig rotationslose Bewegung der Flüssigkei[ts]elemente voraus.

Von praktischer Wichtigkeit wird indessen diese Voraussetzun[g] durch die schon von **Lagrange** gemachte Bemerkung, dass sie unter [den] übrigens hier zu Grunde liegenden Voraussetzungen (Existenz einer Kr[aft]function und Fehlen von Bewegungswiderständen bei gegebener Beziehu[ng] zwischen p und μ) beständig zutrifft, wenn es in irgend ein[em] Augenblick der Fall ist, wenn insbesondere die Bewegung v[om] Zustande der Ruhe ausgeht. Um dies nachzuweisen, sei

$$\int \frac{dp}{\mu} = H,$$

wobei H mit Rücksicht auf die gegebene Beziehung zwischen p und μ e[ine] (bis auf einen unbestimmten constanten Summanden) bekannte Funct[ion] von p oder von μ und

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial x},\quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial H}{\partial y},\quad \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial H}{\partial z}$$

ist. Wenn dann die zweite der Gleichungen (1) nach z, die dritte nach y differenzirt wird und beide Resultate von einander subtrahirt werden, so ist nach Gl. (3) und wegen

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial z}=\frac{\partial^2 H}{\partial z \partial y}$$

$$\begin{aligned}0 = &\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial z}\\ &+u\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+w\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\\ &-u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}-v\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}-w\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addition der identischen Gleichung

$$0=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}$$

und Division durch 2 mit Rücksicht auf die Gleichungen (9)

$$0=\frac{\partial \alpha}{\partial t}+u\frac{\partial \alpha}{\partial x}+v\frac{\partial \alpha}{\partial y}+w\frac{\partial \alpha}{\partial z}-\beta\frac{\partial u}{\partial y}-\gamma\frac{\partial u}{\partial z}+\alpha\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Die Grösse α, verstanden als Winkelgeschwindigkeitscomponente eines bestimmten Flüssigkeitselementes (Massenelementes der Flüssigkeit), von welchem ein Punkt zur Zeit t im Raumpunkte (x, y, z) liegt, ist eine mittelbare Function nur von t, indem auch x, y, z bei dieser Auffassung Functionen von t sind, und es ist

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}+u\frac{\partial \alpha}{\partial x}+v\frac{\partial \alpha}{\partial y}+w\frac{\partial \alpha}{\partial z}=\frac{d\alpha}{dt}$$

= dem vollständigen Differentialquotienten von α nach t; damit lässt sich die letzte Gleichung schreiben:

$$\frac{d\alpha}{dt}+\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Wenn man aber entsprechend der Bedeutung von $\frac{d\alpha}{dt}$ auch

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}+u\frac{\partial \mu}{\partial x}+v\frac{\partial \mu}{\partial y}+w\frac{\partial \mu}{\partial z}=\frac{d\mu}{dt}$$

setzt, so ist nach der Continuitätsgleichung (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(10),$$

womit die obige Gleichung auch geschrieben werden kann:

$$\frac{d\alpha}{dt} - \frac{\alpha}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\frac{\alpha}{\mu}}{dt} &= \frac{\alpha}{\mu}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\gamma}{\mu}\frac{\partial u}{\partial z} \\ \text{Ebenso ist}\quad \frac{d\frac{\beta}{\mu}}{dt} &= \frac{\alpha}{\mu}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\gamma}{\mu}\frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{d\frac{\gamma}{\mu}}{dt} &= \frac{\alpha}{\mu}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\beta}{\mu}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\gamma}{\mu}\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 11.$$

Aus der Form dieser Gleichungen, durch welche die Aenderungen der auf dasselbe Flüssigkeitselement bezogenen Grössen $\frac{\alpha}{\mu}, \frac{\beta}{\mu}, \frac{\gamma}{\mu}$ als lineare homogene Functionen dieser Grössen selbst ausgedrückt sind, ist ersichtlich, dass, wenn in irgend einem Augenblicke diese Grössen = Null sind, also $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist, alsdann dasselbe auch nach Verlauf des Zeitelementes dt, also immer der Fall ist; d. h. **ein Flüssigkeitselement, welches einmal nicht rotirt, kommt nie in Rotation.** —

In Betreff der Existenz einer Kraftfunction mag beispielsweise der im vorigen §. hervorgehobene Fall geprüft werden, dass die Coordinatenaxen, auf welche die Bewegung der Flüssigkeit bezogen wird, um die z-Axe mit einer im Allgemeinen veränderlichen Winkelgeschwindigkeit ω rotiren, während ausser den dadurch bedingten Ergänzungskräften der relativen Bewegung nur die beschleunigende Schwerkraft mit constanter Grösse und Richtung als Massenkraft in Betracht kommt. Nach den daselbst angeführten Ausdrücken (4) der Kraftcomponenten X, Y, Z ist

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{d\omega}{dt} + 2\omega\frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = 2\omega\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{d\omega}{dt} - 2\omega\frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = -2\omega\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0.$$

Die Bedingungen (3) für die Existenz einer Kraftfunction sind also

$$\omega\frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \omega\frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad \frac{d\omega}{dt} + \omega\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad 12.$$

Sie sind jedenfalls erfüllt, wenn $\omega = 0$ ist. Wenn aber ω ...

$= 0$ ist, so müsste nach den beiden ersten dieser Bedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13),$$

l. h. in allen Punkten irgend einer mit der z-Axe parallelen Geraden die ...genblickliche Geschwindigkeit normal zu derselben oder parallel zur xy-...bene gleich gross und gleich gerichtet sein; die Flüssigkeit müsste in ...erade fadenförmige Massenelemente parallel der z-Axe zerlegt werden ...nnen, welche sich so bewegen, dass sie beständig gerade und mit der ...Axe parallel bleiben. Längs einem solchen Flüssigkeitsfaden müsste die ...eschwindigkeitscomponente w einem gewissen Gesetze folgen, das durch ...e dritte der Bedingungen (12) in Verbindung mit der Continuitäts-...leichung (10) bestimmt ist, nämlich

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt}\, ln\frac{\omega}{\mu} \quad \ldots\ldots\ldots (14).$$

...ren ω und μ constant, so müsste auch

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

...n, was eine constante Länge jener Flüssigkeitsfäden erfordern würde. ... den Canälen einer innen- oder ausseuschlächtigen Turbine z. B. könnte ...h das Wasser in solcher Weise bewegen, wenn jene Canäle durch zwei ...gruente Umdrehungsflächen mit der Turbinenaxe als gemeinschaftlicher ...e ausser durch die mit derselben parallelen cylindrischen Schaufelflächen ...renzt werden.

Wenn übrigens, falls die Bedingungen (13) erfüllt sind, zugleich eine ...chwindigkeitsfunction existiren sollte, so müsste mit Rücksicht auf die ...ichungen (4) auch

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

... die augenblickliche Geschwindigkeitscomponente w im Sinne der z-Axe ... alle Punkte irgend einer dazu senkrechten Ebene gleich gross sein. ...Falle $\omega = Const.$ und $\mu = Const.$, also $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ müsste folglich w ...er ganzen Masse gleich, z. B. $=$ Null sein, wie es bei der vorerwähn-... Bewegung des Wassers in den Canälen einer innen- oder ausseuschläch-...n Turbine dann möglich ist, wenn die beiden congruenten Umdrehungs-...en, welche die Canäle begrenzen, parallele Ebenen sind. Man erkennt ... dass im Falle der relativen Bewegung einer Flüssigkeit bezüglich auf

ein selbst in Bewegung befindliches System von Leitflächen die Möglichkeit genauer Erfüllung der Bedingungen, worauf die Gleichungen (5 und (6) beruhen, an sehr specielle Voraussetzungen geknüpft ist.

§. 71. Wirbellinien und Wirbelfäden.

Wenn eine Geschwindigkeitsfunction nicht besteht und deshalb die Flüssigkeitselemente im Allgemeinen in Rotation begriffen sind, wenn aber übrigens die Voraussetzungen des vorigen §. (Existenz einer Kraftfunction und Fehlen von Bewegungswiderständen bei gegebener Beziehung zwischen p und μ) erfüllt sind, somit auch die unter diesen Voraussetzungen daselbst entwickelten Gleichungen (11) gelten, so wird die Einsicht in den Bewegungszustand der Flüssigkeit und die Gesetzmässigkeit seiner Aenderungen in bemerkenswerther Weise unterstützt durch die Begriffe der Wirbellinien und Wirbelfäden, welche von Helmholtz* zunächst für incompressible Flüssigkeiten aufgestellt wurden, deren Gesetze sich aber nach Kirchhoff leicht auf beliebige Flüssigkeiten ausdehnen lassen.

Es seien A und A_1 zwei unendlich nahe materielle Punkte, etwa die Massenmittelpunkte benachbarter Flüssigkeitselemente E und E_1. Zur Zeit t seien

x, y, z die Coordinaten des Punktes A,

u, v, w seine Geschwindigkeitscomponenten, also die Componenten der Translationsgeschwindigkeit des Elementes E,

α, β, γ die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit ϱ dieses Elementes, nämlich seine Winkelgeschwindigkeiten um Axen, welche durch A gehend mit den Coordinatenaxen parallel sind,

μ seine specifische Masse,

$x+\xi, y+\eta, z+\zeta$ die Coordinaten des Punktes A_1,

$\sigma = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ die unendlich kleine Entfernung AA_1.

Sind dann $d\xi, d\eta, d\zeta$ die Aenderungen von ξ, η, ζ im folgenden Zeitelement dt, also $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ die augenblicklichen relativen Geschwindigkeiten von A_1 gegen A nach den Axen der x, y, z, so hat man, da letzteren auch als die Aenderungen von u, v, w zu betrachten sind, wo

---

* Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Crelle's Journal für reine u. angew. Math. Bd. 55, S. 25.

den unendlich kleinen Incrementen ξ, η, ζ von x, y, z entsprechen,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{d\eta}{dt} &= \xi \frac{\partial v}{\partial x} + \eta \frac{\partial v}{\partial y} + \zeta \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \eta \frac{\partial w}{\partial y} + \zeta \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (1).$$

Diese Gleichungen sind von derselben Form wie die Gleichungen (11) im vorigen §. und sie werden mit ihnen identisch, wenn, unter ε eine unendlich kleine Constante verstanden,

$$\xi = \varepsilon \frac{\alpha}{\mu}, \quad \eta = \varepsilon \frac{\beta}{\mu}, \quad \zeta = \varepsilon \frac{\gamma}{\mu} \dots\dots\dots\dots (2)$$

gesetzt wird entsprechend dem Falle, dass der materielle Punkt A_1 in der Rotationsaxe des Elementes E liegt ($\xi : \eta : \zeta = \alpha : \beta : \gamma$). Aus der Identität der beiden Systeme von Gleichungen folgt dann aber, dass auch die Aenderungen von ξ, η, ζ im Zeitelement dt den Aenderungen von $\frac{\alpha}{\mu}$, $\frac{\beta}{\mu}$, $\frac{\gamma}{\mu}$ proportional sind, so dass, wenn die Gleichungen (2) zur Zeit t bestehen, dasselbe auch zur Zeit $t + dt$ u. s. f., also immer der Fall ist. D. h. **wenn ein materieller Punkt A_1 einmal in der Rotationsaxe eines unendlich nahen Flüssigkeitselements E liegt, so ist dasselbe beständig der Fall**, wie auch die Richtung jener Rotationsaxe sich ändern mag. Wenn man, von irgend einem Punkte A ausgehend, eine krumme Linie $AA_1A_2A_3\dots$ construirt denkt, deren Richtungen AA_1, A_1A_2, $A_2A_3\dots$ in einem gewissen Augenblicke in allen Punkten A, A_1, $A_2\dots$ mit den Rotationsaxen der Flüssigkeitselemente E, E_1, $E_2\dots$ zusammenfallen, für welche A, A_1, $A_2\dots$ die Massenmittelpunkte (oder überhaupt correspondirende Punkte) sind, und wenn eine solche Linie nach **Helmholtz** eine **Wirbellinie** genannt wird, so kann der obige Satz auch so ausgesprochen werden:

Eine Wirbellinie wird beständig von denselben materiellen Punkten gebildet.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) erhält man für die Rotationsgeschwindigkeit ϱ eines Flüssigkeitselementes den Ausdruck:

$$\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{\mu}{\varepsilon}\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \frac{\mu\sigma}{\varepsilon} \dots\dots (3),$$

woraus ersichtlich, dass **die Rotationsgeschwindigkeit eines Flüssigkeitselementes beständig dem Product seiner specifischen Masse**

und seiner Entfernung von einem im Sinne der Rotationsaxe also der betreffenden Wirbellinie, ihm unendlich nahe gele-genen materiellen Punkte proportional ist.

Diesem Satze lässt sich ein anderer Ausdruck geben mit Hülfe de Begriffs der Wirbelfäden. Denkt man sich nämlich durch alle Punkt des Umfangs einer unendlich kleinen Fläche die betreffenden Wirbellini gezogen, so bilden dieselben eine Fläche, welche einen fadenförmigen Rau von unendlich kleinem Querschnitt, einen von Helmholtz so genannte Wirbelfaden umschliesst. Ein solcher besteht, während seine Gestalt i Allgemeinen stetig veränderlich ist, dem Obigen zufolge beständig aus de selben Flüssigkeitselementen. An irgend einer Stelle und in irgend eine Augenblick sei ω sein Querschnitt, μ seine specifische Masse und σ d Längenelement einer Wirbellinie zwischen bestimmten materiellen Punkt derselben, also auch die augenblickliche Länge eines von stets dersel Materie erfüllten Fadenelementes, so dass

$$\mu\omega\sigma = Const.$$

ist, wodurch Gl. (3) übergeht in

$$\omega\varrho = Const. \dots\dots\dots\dots$$

Das Product aus dem Querschnitt und der Rotationsgeschwi digkeit eines Wirbelfadens bleibt also an jeder Stelle unverä dert.

Von diesem Product lässt sich ferner nachweisen, dass es auch demselben Augenblick für alle Querschnitte eines Wirbelfadens gleich i Dazu dient nach Holmholtz die Betrachtung des dreifachen Integrals

$$S = \iiint\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \quad \dots\dots\dots$$

welches, zunächst über einen beliebig begrenzten Theil der Flüssigkeit au gedehnt gedacht, durch partielle Integration jedes Gliedes in

$$S = \iint\alpha\,dy\,dz + \iint\beta\,dz\,dx + \iint\gamma\,dx\,dy$$

umgeformt werden kann, wobei die einzelnen Doppelintegrale über d ganze Oberfläche jenes Flüssigkeitstheils auszudehnen sind, also α, β, γ d Winkelgeschwindigkeitscomponenten für irgend einen Punkt x, y, z di Oberfläche und $dy\,dz$, $dz\,dx$, $dx\,dy$ die Projectionen eines Elementes $d\omega$ d selben auf die Coordinatenebenen bedeuten, letztere verstanden in d Sinne, dass sie positiv oder negativ gesetzt werden, jenachdem die ub auswärts oder überall einwärts gerichtete Normale spitze oder stum

Winkel (n,x), (n,y), (n,z) mit den Coordinatenaxen bildet. Es ist also

$$\frac{dy\,dz}{dO} = cos\,(n,x); \quad \frac{dz\,dx}{dO} = cos\,(n,y); \quad \frac{dx\,dy}{dO} = cos\,(n,z)$$

und somit auch

$$S = \int dO\,[\alpha\,cos(n,x) + \beta\,cos(n,y) + \gamma\,cos(n,z)]$$

oder, wenn (ϱ,x), (ϱ,y), (ϱ,z) die Winkel bedeuten, welche die Axe der Rotationsgeschwindigkeit ϱ mit den Coordinatenaxen bildet, so dass

$$\alpha = \varrho\,cos(\varrho,x); \quad \beta = \varrho\,cos(\varrho,y); \quad \gamma = \varrho\,cos(\varrho,z)$$

ist, und wenn mit (ϱ,n) der Winkel zwischen der Rotationsaxe und der Normalen im Flächenelement dO bezeichnet, also

$$cos(\varrho,x)\,cos(n,x) + cos(\varrho,y)\,cos(n,y) + cos(\varrho,z)\,cos(n,z) = cos(\varrho,n)$$

gesetzt wird, auch

$$S = \int dO\,.\,\varrho\,cos\,(\varrho,n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

die Integration immer ausgedehnt gedacht über die ganze Oberfläche O der Flüssigkeitsmasse, auf welche die Grösse S bezogen wird. Wird nun als diese Flüssigkeitsmasse insbesondere das Stück eines Wirbelfadens zwischen irgend zwei Querschnitten ω und ω_1 angenommen, für welche die Rotationsgeschwindigkeiten $= \varrho$ und ϱ_1 seien, so ist $cos(\varrho,n)$ für den ersten Querschnitt $= +1$, für den zweiten $= \mp 1$, für die Mantelfläche überall $= 0$, folglich nach Gl. (6)

$$S = \pm(\omega\varrho - \omega_1\varrho_1).$$

Nach Gl. (9) im vorigen §. ist aber

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right) = 0,$$

also nach Gl. (5) auch $S = 0$ und somit

$$\omega\varrho = \omega_1\varrho_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

d. h. w. **Das Product aus dem Querschnitt und der Rotationsgeschwindigkeit eines Wirbelfadens ist also in der ganzen Länge desselben gleich und unveränderlich während der Bewegung und Deformation des Fadens.** Hat dieses Product einen endlichen Werth, so könnte der Wirbelfaden im Inneren der Flüssigkeit nur endigen wo $\omega = 0$, $\varrho = \infty$ oder $\omega = \infty$, $\varrho = 0$, woraus zu schliessen, dass in einer Flüssigkeit von endlicher Ausdehnung die Wirbelfäden entweder in sich zurücklaufen oder bis zur Oberfläche reichen müssen.

§. 72. Strömende Bewegung längs gegebenen Bahnen.

Bei den technischen Aufgaben, welche sich auf strömende Bewe-gungen (§. 69) beziehen, pflegen diese der Art durch Leitflächen beding zu sein, dass man (abgesehen von Stosswiderständen, überhaupt von and- Bewegungswiderständen, als der inneren Reibung und der Reibung an d- Leitflächen) die Geschwindigkeitsrichtungen an allen Stellen, somit a- die von den materiellen Punkten durchlaufenen Bahnen als gegeben b- trachten, d. h. a priori annehmen kann entsprechend der Configuration d- Leitflächen, die einen Theil dieser Bahnen enthalten. Ist dann auch n- die Beziehung zwischen der Pressung p und der specifis- Masse μ gegeben, so dass letztere als eine gegebene Function v- betrachtet werden kann, so reducirt sich die Aufgabe darauf, die Pr- sung und die Geschwindigkeit als Functionen der Zeit und - Coordinaten des betreffenden Raumpunktes zu bestimmen: d- Geschwindigkeit (nach den Bezeichnungen der beiden vorhergehenden Pa- graphen $= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$) sei hier mit u bezeichnet.

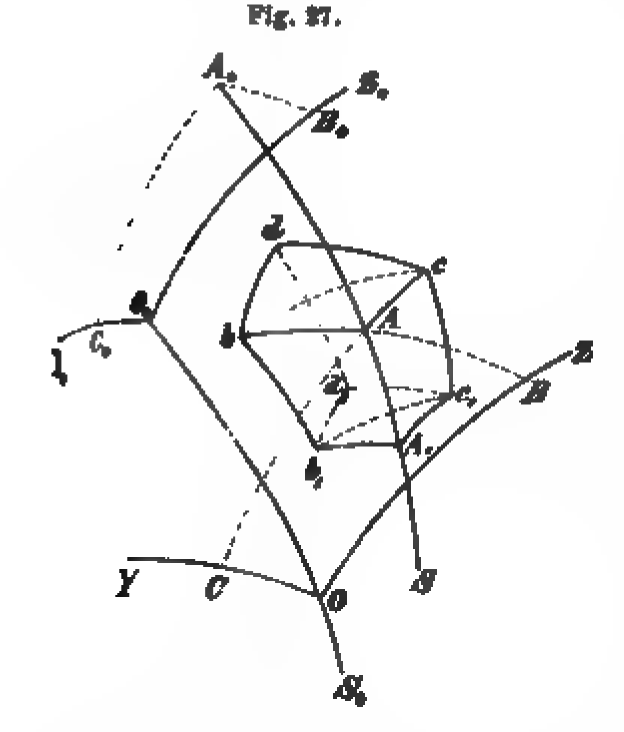
Dabei ist es in der Regel vortheilhaft, die bisher vorausgesetz- rechtwinkeligen und geradlinigen Coordinaten durch ein anderes C- natensystem zu ersetzen, welches dem gegebenen System von Bahnen a- gepasst ist. Ein System von Flächen F, welche die Querschnitte h- mögen, werde so angenommen, dass alle Bahnen und somit auch die L- flächen rechtwinkelig von ihnen geschnitten werden. Ferner sollen in j- Querschnitte zwei Systeme sich rechtwinkelig schneidender Curven a- nommen werden, welche beziehungsweise die Krümmungscurven - die Normalcurven heissen mögen und dadurch bestimmt seien, das- irgend einen Punkt A eines Querschnittes F die Krümmungscurve - Krümmungshalbmesser für den Punkt A der betreffenden Bahn b- wird, folglich die Normalcurve von der auf dem Krümmungshalbm- senkrechten Normale der Bahn, ihrer sogenannten Binormale.

Sind dann O_0S_0 die Bahn, O_0Y_0 die Krümmungscurve und O_0Z_0 - Normalcurve, welche durch einen bestimmten Punkt O_0 des von der F- sigkeit erfüllten Raumes hindurchgehen, und ist A_0 der Punkt, in w- der Querschnitt $Y_0O_0Z_0$ von der durch einen beliebigen anderen Pu- des Raumes gehenden Bahn geschnitten wird, so ist die Lage d- Punktes A bestimmt durch den Bogen $O_0O = s_0$, welchen der dur- gehende Querschnitt F von O_0S_0 abschneidet, und durch die Bögen - $= y_0$ und $O_0B_0 = z_0$, welche von O_0Y_0 und O_0Z_0 durch die -

aus gezogene Normal- und Krümmungscurve abgeschnitten werden. Ist ferner OY die Krümmungscurve, OZ die Normalcurve durch O im Querschnitte F, und wird erstere von der durch A gehenden Normalcurve in C, letztere von der Krümmungscurve durch A in B geschnitten, so sind durch s_0, y_0, z_0 auch die Bögen $A_0A = s$, $BA = y$, $CA = z$ bestimmt und umgekehrt, so dass auch diese letzteren Bögen s, y, z als die Coordinaten des Punktes A betrachtet werden können, wie es hier geschehen soll.

Die Bewegung in der Bahn A_0A finde statt im Sinne von A_0 gegen A, und es seien (Fig. 27) $AA_1 = ds$, $Ab = dy$, $Ac = dz$ unendlich kleine, somit als gerade Linien zu betrachtende Elemente der Bahn, der Krümmungscurve und der Normalcurve, genommen beziehungsweise im Sinne A_0A, BA und CA. Ein unendlich kleines Raumelement $= dV$ werde dann begrenzt durch die Normalebenen bAc und $b_1A_1c_1$ in den Punkten A und A_1 der Bahn, durch die Normalebenen A_1Ac und b_1bd in den Punkten A und b der Krümmungscurve, und durch die Normalebenen A_1Ab und c_1cd in den Punkten A und c der Normalcurve;

Fig. 27.



die entsprechenden Seitenflächen des polyedrischen Volumelementes seien in derselben Reihenfolge

$$= f_s \text{ und } f_s + df_s, \quad = f_y \text{ und } f_y + df_y, \quad = f_z \text{ und } f_z + df_z.$$

Bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen nächst höherer Ordnung können die um A herumliegenden Seitenflächen = den Producten ihrer von A ausgehenden (zu einander senkrechten) Seiten, die übrigen = den Producten ihrer beziehungsweise von A_1, von b und von c ausgehenden

lich kleine Grössen zweiter

d) gesetzt werden. Die er-

$; = ds\,dy.$

mmungshalbmesser der Bahn

mung im Sinne Ab; Ab und

lem Winkel $\frac{ds}{\varrho}$, während Ac

und A_1c_1 parallel, nämlich beide normal zur Schmiegungsebene A_1Ab der Bahn sind.

Ferner seien ϱ' und ϱ'' die Krümmungshalbmesser für den Punkt A der Normalschnitte des Querschnitts F, welche beziehungsweise die Krümmungscurve und die Normalcurve in A berühren, also die Elemente Ab und Ac mit ihnen gemein haben, beide Krümmungshalbmesser positiv gesetzt für den Fall einer im Sinne AA_1 concaven Krümmung; AA_1 und bb_1 convergiren dann von Ab aus unter dem Winkel $\frac{dy}{\varrho'}$, AA_1 und cc_1 von A aus unter dem Winkel $\frac{dz}{\varrho''}$.

Endlich mögen Ac und bd von Ab aus unter dem Winkel $\frac{dy}{r'}$, Ab und cd von Ac aus unter dem Winkel $\frac{dz}{r''}$ divergiren, so dass negative Werthe von r' und r'' einer Convergenz im betreffenden Sinne entsprechen würden; diese Winkel sind die Contingenzwinkel der Curven, in denen sich die Krümmungscurve und die Normalcurve auf die Berührungsebene des Querschnitts F im Punkte A projiciren.

Auf Grund dieser Bezeichnungen ergiebt sich

$$f_s + df_s = \overline{A_1b_1} \, . \, \overline{A_1c_1} = dy\left(1 - \frac{ds}{\varrho'}\right) dz \left(1 - \frac{ds}{\varrho''}\right) =$$

$$= f_s\left(1 - \frac{ds}{\varrho'} - \frac{ds}{\varrho''}\right)$$

$$f_y + df_y = \overline{bb_1} \, . \, \overline{bd} = ds \left(1 - \frac{dy}{\varrho'}\right) dz \left(1 + \frac{dy}{r''}\right) = f_y\left(1 - \frac{dy}{\varrho'} + \frac{dy}{r''}\right)$$

$$f_z + df_z = \overline{cc_1} \, . \, \overline{cd} = ds\, dy \left(1 + \frac{dz}{r'}\right) = f_z \left(1 + \frac{dz}{r'}\right)$$

und folglich wegen

$$dV = f_s\, ds = f_y\, dy = f_z\, dz$$

$$df_s = -\left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}\right) dV; \quad df_y = \left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{\varrho'}\right) dV; \quad df_z = \frac{1}{r'}\, dV.$$

Um nun die inneren Reibungen auszudrücken, welche auf die Oberfläche der in dem Raumelement dV augenblicklich enthaltenen Flüssigkeit nach den Richtungen AA_1, Ab und Ac von der umgebenden Flüssigkeit ausgeübt werden, kann man zunächst bemerken, dass nach §. 5 und weil die Geschwindigkeitscomponenten in A nach den Richtungen AA_1, Ab und Ac hier $= u$, Null und Null sind, jene inneren Reibungen

nach den Richtungen AA_1	Ab	Ac
in $f_s = -2R\frac{\partial u}{\partial s} f_s$	$-R\frac{\partial u}{\partial y} f_s$	$-R\frac{\partial u}{\partial z} f_s$
in $f_y = -R\frac{\partial u}{\partial y} f_y$	—	—
in $f_z = -R\frac{\partial u}{\partial z} f_z$	—	—

sind. Die entsprechenden Kräfte für die gegenüber liegenden Seitenflächen sind mit Weglassung des constanten Factors R:

$2\left(\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}ds\right)(f_s+df_s)$	$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial y}ds\right)(f_s+df_s)$	$\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial z}ds\right)(f_s+df_s)$
$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right)(f_y+df_y)$	—	—
$\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz\right)(f_z+df_z)$	—	—

Von den 3 Kräften in der Seitenfläche ($f_s + df_s$) hat aber die erste die Richtung der Tangente im Punkte A_1 der Bahn, die zweite die Richtung A_1b_1, die dritte die Richtung A_1c_1. Ihre Componenten beziehungsweise nach den Richtungen AA_1, Ab und Ac sind zwar den betreffenden Kräften selbst gleich zu setzen; indessen liefert die erste von ihnen noch eine Componente nach Ab, die zweite noch eine Componente nach AA_1, und nur die dritte keine weitere Componente, weil A_1c_1 parallel Ac ist. Die obige Kraft in der Seitenfläche ($f_y + df_y$) hat die Richtung bb_1; sie giebt nach AA_1 eine ihr selbst gleich zu setzende Componente, ausserdem noch eine solche nach Ab. Endlich giebt die Kraft in der Seitenfläche ($f_z + df_z$), deren Richtung cc_1 ist, eine ihr selbst gleich zu setzende Componente nach AA_1 nebst einer anderen nach Ac. Werden also nun die Kräfte in der letzten Zusammenstellung (nach Multiplication mit dem Factor R) als die betreffenden Componenten nach den Richtungen AA_1, Ab und Ac betrachtet, so kommen schliesslich noch die folgenden 4 Componenten hinzu, in deren Ausdrücken die unendlich kleinen Bestandtheile höherer Ordnung weggelassen sind.

nach der Richtung AA_1		Ab	Ac
in ($f_s + df_s$):	$-R\frac{\partial u}{\partial y} f_s \frac{ds}{\rho}$	$2R\frac{\partial u}{\partial s} f_s \frac{ds}{\rho}$	—
in ($f_y + df_y$):	—	$-R\frac{\partial u}{\partial y} f_y \frac{dy}{\rho'}$	—
in ($f_z + df_z$):	—	—	$-R\frac{\partial u}{\partial z} f_z \frac{dz}{\rho''}$

Wenn man jetzt die Kraftgrössen für jede der 3 Richtungen AA_1, Ab, Ac summirt, und die Summen bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Glieder von höherer, als der 3ten Ordnung durch

$$dV = f_s\, ds = f_y\, dy = f_z\, dz$$

dividirt, so erhält man die Componenten der inneren Reibung pro Volumeneinheit im Sinne der Bahn $= R_s$, der Krümmungscurve $= R_y$ und der Normalcurve $= R_z$:

$$R_s = R\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2\frac{df_s}{dV}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{df_y}{dV}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{df_z}{dV}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y}\right.$$

$$R_y = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial y} + \frac{df_z}{dV}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{1}{\rho'}\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$R_z = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial z} + \frac{df_s}{dV}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho''}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

oder mit Rücksicht auf die obigen Ausdrücke von df_s, df_y und df_z:

$$R_s = R\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right)\frac{\partial u}{\partial s} + \left(\frac{1}{r''} - \frac{2}{\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{r'}\frac{\partial u}{\partial z}\right]$$

$$R_y = R\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial y} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial u}{\partial s} - \left(\frac{2}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

$$R_z = R\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial z} - \left(\frac{1}{\rho'} + \frac{2}{\rho''}\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die nach denselben 3 Richtungen genommenen Componenten der Pressung, welche auf die in dem betrachteten Raumelement dV augenblicklich enthaltene Flüssigkeit pro Volumeneinheit derselben von der angrenzenden Flüssigkeit ausgeübt wird, sind von der Gestalt des vorausgesetzten Raumelementes offenbar unabhängig, weil die Pressung in demselben Punkte nach allen Richtungen gleich ist. Sie ergeben sich am einfachsten unter Voraussetzung eines rechtwinkelig parallelepipedischen Elementes $dV =$ $ds\,dy\,dz$, und zwar

$$= -\frac{\partial p}{\partial s}, \quad -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Für das bei Berechnung der inneren Reibung vorausgesetzte polyedrische Raumelement hätte man z. B. die Pressung im Sinne AA_1, insoweit sie von den Pressungen auf die Seitenflächen f_s und $(f_s + df_s)$ herrührt,

$$= pf_s - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}ds\right)(f_s + df_s) = -\frac{\partial p}{\partial s}dV - p\,df_s$$

$$= -\frac{\partial p}{\partial s}dV + p\left(\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right.\ldots$$

dazu kämen aber noch zwei Componenten, herrührend von den Pressungen auf die Seitenflächen $(f_y + df_y)$ und $(f_z + df_z)$,

$$= - p f_y \frac{dy}{\varrho'} - p f_z \frac{dz}{\varrho''} = - p \left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}\right) dV,$$

so dass die Summe $= - \frac{\partial p}{\partial s} dV$ wird u. s. f.

Wenn nun noch die Componenten der beschleunigenden Massenkraft nach den Richtungen der Bahn, der Krümmungscurve und der Normalcurve mit K_s, K_y und K_z bezeichnet werden, so sind also die resultirenden Kraftcomponenten nach diesen Richtungen pro Masseneinheit:

$$K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{\partial p}{\partial s}\right); \quad K_y + \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{\partial p}{\partial y}\right); \quad K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

Sie müssen den betreffenden Beschleunigungscomponenten gleich sein, also beziehungsweise $= \frac{du}{dt}, \frac{u^2}{\varrho}$ und Null, wobei die Bahnbeschleunigung auch

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ist oder, indem die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ = Null sind,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2).$$

Somit ergeben sich die Fundamentalgleichungen hier in der Form:

$$\left.\begin{aligned} K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{\partial p}{\partial s}\right) &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} \\ K_y + \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{\partial p}{\partial y}\right) &= \frac{u^2}{\varrho} \\ K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (3).$$

Die Continuitätsgleichung folgt daraus, dass der Zuwachs (algebraisch verstanden), den die im Raumelement dV enthaltene Flüssigkeitsmasse μdV im Zeitelement dt erfährt, d. h. die Grösse $\frac{\partial \mu}{\partial t} dt dV$ auch gleich sein muss dem Ueberschuss der Flüssigkeitsmasse, welche im Zeitelement dt durch die Seitenfläche f_s in jenes Raumelement einfliesst, über diejenige, welche gleichzeitig durch die gegenüber liegende Seitenfläche ausfliesst, also

$$-f_s\mu u dt - (f_s + df_s)\left[\mu u + \frac{\partial(\mu u)}{\partial s}ds\right]dt = -\left[\frac{\partial(\mu u)}{\partial s}dV + \mu u df_s\right]$$

Daraus ergiebt sich mit Rücksicht auf den Ausdruck von df_s

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial s} = \mu u\left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Unter den Grenzbedingungen ist besonders bemerkenswerth die Rücksicht auf die äussere Reibung an den Leitflächen. Dieselbe, pr. Flächeneinheit einer Leitfläche mit R' bezeichnet, ist der relativen Geschwindigkeit u, mit welcher die Flüssigkeit an der betreffenden Stelle dieser Fläche strömt, gerade entgegengesetzt gerichtet; ihre Grösse ist eine (empirisch zu bestimmende) Function von u, die ausserdem von der Oberflächenbeschaffenheit der fraglichen Wand und von der Art sowie vom inneren Zustande der Flüssigkeit abhängen kann. Ist nun ds' ein Element der Curve, in welcher eine solche Leitfläche von einem Querschnitt F geschnitten wird, so haben die längs den gegebenen Bahnen hinströmenden Flüssigkeitsfäden, die im Inneren bei der vorigen Betrachtung viereckigen Elementarquerschnitte f_s hatten, an der Leitfläche rechtwinkelig-dreieckige Querschnitte bAc (Fig. 27), deren Hypothenusen bc [illegible] und deren Katheten $Ab = dy$, $Ac = dz$ sind. Betrachtet man ein Element eines solchen dreieckigen Grenzfadens von der Länge AA_1 [illegible] welches zwischen zwei unendlich nahe benachbarten Querschnitten F [illegible] halten ist, und bildet die Summe aller Kräfte (incl. der Reactionen gegen die Beschleunigung), welche nach der Richtung AA_1 auf das F[illegible] keitselement wirken, so reducirt sich diese Kräftesumme, die $=$ N[illegible] muss, auf unendlich kleine Glieder von höherer, als der zweiten O[illegible] mit Ausnahme der inneren Reibungen in den Seitenflächen A_1Ac [illegible]

$$= -R\frac{\partial u}{\partial y}f_y \text{ und } -R\frac{\partial u}{\partial z}f_z$$ sowie der äusseren Reibung in der Seitenfläche $bcb_1c_1 = -R'ds\,ds'$, welche nur unendlich klein [illegible] sind und deren Summe deshalb für sich $=$ Null sein muss. Daraus [illegible] sich mit $f_y = ds\,dz$ und $f_z = ds\,dy$ die folgende an [illegible] Leitfläche zu erfüllende Bedingung:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dz}{ds'} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dy}{ds'} + \frac{R'}{R} = 0 \quad \ldots\ldots$$

Die Benutzung der obigen Gleichungen, von denen [illegible] einer constanten specifischen Masse μ, also [illegible] tropfbaren Flüssigkeit von gleichförmiger und [illegible]

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4, a)$$

reducirt, wird namentlich erschwert durch den analytischen Charakter der Ausdrücke von R_s, R_y und R_z, die indessen in speciellen Fällen sich wesentlich vereinfachen können.

Wenn insbesondere bei constanter specif. Masse die Querschnitte eben, also $\frac{1}{\varrho'}$ und $\frac{1}{\varrho''} = 0$ sind, somit nach Gl. (4, a) auch $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ ist, so sind nach Gl. (1) R_y und $R_z = 0$. Ueberhaupt können die zur Bahn senkrechten Componenten der inneren Reibung mit um so geringerem Fehler an einer gewissen Stelle vernachlässigt werden, je geringer daselbst die Veränderlichkeit der specifischen Masse und die Krümmung des Querschnitts ist.

Bei ebenen Querschnitten sind die Bahnen äquidistante Curven. Sind die ebenen Querschnitte alle derselben Geraden parallel, die Bahnen also ebene äquidistante Curven, so sind die Krümmungs- und Normalcurven zwei Systeme sich rechtwinkelig schneidender Geraden, also auch $\frac{1}{r'}$ und $\frac{1}{r''} = 0$, so dass im Falle $\mu = Const.$

$$R_y = R_z = 0; \quad R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{2}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \ldots \quad (6)$$

wird. Wenn insbesondere die Bahnen parallele Gerade, also die Querschnitte parallele Ebenen sind, so ist auch noch $\frac{1}{\varrho} = 0$. Als Krümmungs- und Normalcurven können in einem solchen Falle die Durchschnittslinien der Querschnitte mit irgend zwei Systemen darauf senkrechter und einander rechtwinkelig schneidender Cylinderflächen angenommen werden, z. B. mit einer Schaar von Kreiscylinderflächen und einem durch die gemeinschaftliche Axe gelegten Ebenenbüschel. Ist dann r der Radius eines solchen Kreiscylinders, so ist $r'' = r$, übrigens $r' = \infty$ wie zuvor, wenn die Strahlen als Krümmungscurven, die Parallelkreise als Normalcurven angenommen werden, also

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

und wenn die Geschwindigkeit in allen Punkten eines Parallelkreises als gleich gelten kann,

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

§. 73. Permanente Strömung längs gegebenen Bahnen.

Wenn die im vorigen §. betrachtete strömende Bewegung permanent ist, was voraussetzt, dass die Massenkräfte und die Grenzbedingungen un-abhängig von der Zeit gegeben sind, so ist

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

und wenn wieder die specif. Masse μ eine gegebene Function von p is so reducirt sich die Aufgabe darauf, die Pressung p und die Geschwi-digkeit u als Functionen der Coordinaten des betreffend Raumpunktes zu bestimmen. Bei Voraussetzung des im vorigen §. e klärten Coordinatensystems dienen dazu in Verbindung mit den Grenzb dingungen die Differentialgleichungen (3) und (4) daselbst, also hier d Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} K_s + \frac{1}{\mu}\left(R_s - \frac{\partial p}{\partial s}\right) &= u\,\frac{\partial u}{\partial s} \\ K_y + \frac{1}{\mu}\left(R_y - \frac{\partial p}{\partial y}\right) &= \frac{u^2}{\varrho} \\ K_z + \frac{1}{\mu}\left(R_z - \frac{\partial p}{\partial z}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{\mu u}\,\frac{\partial(\mu u)}{\partial s} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

von denen die letzte auch durch eine einfachere Gleichung ersetzt wer kann. Sind nämlich A_0 und A die Durchschnittspunkte der Querschni F_0 und F mit irgend einer Bahn, und ist f_0 ein den Punkt A_0 ent tendes unendlich kleines Element von F_0, so bilden die Bahnen, w durch alle Punkte des Umfangs von f_0 hindurchgehen, die Mantelf eines fadenförmigen Raumes von gegebener Gestalt, so dass, wenn d vom Querschnitt F in dem Flächenelement f geschnitten wird, das V hältniss

$$\alpha = \frac{f}{f_0}$$

als eine gegebene Function der Coordinaten s, y, z des Punktes A trachtet werden kann. Die Continuitätsbedingung im Beharrungszusta besteht nun darin, dass, indem die Flüssigkeitsmasse in jenem fade migen Raum zwischen den Querschnitten f_0 und f beständig gleich ist, die in der Zeiteinheit durch f ausfliessende Masse, d. h.

$$\mu f u = \mu_0 f_0 u_0 \quad \text{oder} \quad \alpha \mu u = \mu_0 u_0 \;\ldots\ldots$$

sein muss, wenn μ und μ_0 die specif. Massen, u und u_0 die Geschwindigkeiten in A und A_0 oder in f und f_0 bedeuten.

Die Grösse α ist bedingt durch die Krümmungen der Querschnitte zwischen F_0 und F in ihren Durchschnittspunkten mit der Bahn A_0A; aus Gl. (3) folgt nämlich

$$\frac{1}{\mu u}\frac{\partial(\mu u)}{\partial s}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s}=0,$$

also nach Gl. (2)

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s}+\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

in welcher Gleichung statt $\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}$, d. h. statt der Summe der Krümmungen der die Krümmungscurve und die Normalcurve (§. 72) berührenden Normalschnitte auch die Summe der Krümmungen beliebiger in demselben Punkte sich rechtwinkelig schneidender Normalschnitte des betreffenden Querschnitts F gesetzt werden kann.

Wenn man die erste der Gleichungen (1) mit $\frac{1}{g}$ = der Masse von 1 Kgr. multiplicirt und mit $\gamma=\mu g$ das specifische Gewicht, ferner mit d die partiellen Differentiale bezüglich auf s bezeichnet, also

$$\frac{\partial p}{\partial s}ds=dp;\quad \frac{\partial u}{\partial s}ds=du$$

setzt, so kann jene Gleichung in der Form geschrieben werden:

$$\frac{dp}{\gamma}+\frac{u\,du}{g}=\left(\frac{K_s}{g}+\frac{R_s}{\gamma}\right)ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

oder mit $\frac{dp}{\gamma}=d\frac{p}{\gamma}-pd\frac{1}{\gamma}$

$$d\left(\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}\right)=pd\frac{1}{\gamma}+\left(\frac{K_s}{g}+\frac{R_s}{\gamma}\right)ds \quad \ldots\ldots (6).$$

Daraus folgt durch Integration längs dem Bogen $A_0A=s$ der betreffenden Bahn:

$$\left(\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}\right)-\left(\frac{p_0}{\gamma_0}+\frac{u_0^2}{2g}\right)=E+M+\int_0^s\frac{R_s}{\gamma}ds \quad \ldots (7),$$

in welcher Gleichung p_0, γ_0, u_0 die Werthe von p, γ, u im Punkte A_0 und

$$E=\int pd\frac{1}{\gamma};\quad M=\int\frac{K_s}{g}ds$$

beziehungsweise die Expansionsarbeit und die Arbeit der Massenkräfte pro 1 Kgr. auf dem Wege A_0A bedeuten. Die Summen aus Druckhöhe und Geschwindigkeitshöhe unterscheiden sich also für irgend zwei Punkte einer Bahn um die Summe aus der Expansionsarbeit und den Arbeiten der Massenkräfte und der inneren Reibungen pro 1 Kgr. auf dem Wege vom einen zum andern jener beiden Punkte.

Die Expansionsarbeit E ist eine Function von p_0 und p gemäss der gegebenen Beziehung zwischen μ oder γ und p; die Arbeit der inneren Reibung auf dem Wege A_0A ist im Allgemeinen nur empirisch und zwar als Function von u, s und α auszudrücken. Durch die Gleichungen (3) und (7) sind dann zwei der Grössen p, p_0, u, u_0 bestimmt, wenn die beiden anderen gegeben sind. Die beiden letzten der Gleichungen (1) bestimmen das Aenderungsgesetz der Pressung in den Querschnitten, womit dann mit Rücksicht auf die Gleichungen (3) und (7) auch das Aenderungsgesetz der Geschwindigkeiten in denselben zusammenhängt; dabei ist es bemerkenswerth, dass je weniger ein Querschnitt gekrümmt und γ daselbst veränderlich ist, je kleiner also R_y und R_z sind (§. 72), und je weniger ferner die Bahnen beim Durchgang durch jenen Querschnitt gekrümmt sind, desto mehr sich die Pressung in letzterem nur nach hydrostatischen Gesetzen ändert. Nach den zwei letzten der Gleichungen (1) ist dann nämlich

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu K_y \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu K_z \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

Zur Möglichkeit einer permanenten Bewegung ist erforderlich, dass die Componenten K_x, K_y, K_z der beschleunigenden Massenkraft als blosse Functionen der Coordinaten gegeben sind, dass also die resultirende beschleunigende Kraft K in jedem Punkte (x, y, z) eine unveränderliche Grösse und Richtung gegen das (mit dem System der Leitflächen verbundene) Coordinatensystem hat. Wenn das letztere selbst in Bewegung begriffen ist, während übrigens die Flüssigkeitselemente nur der Schwerkraft unterworfen sind, so ist K die Resultante aus g und den betreffenden Ergänzungskräften der relativen Bewegung (§. 2); damit sie der obigen Bedingung entspreche, muss, wenn die eigene Bewegung des Coordinatensystems mit einer Rotation verbunden ist, diese mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine verticale Axe stattfinden, die dabei selbst eine Translationsbewegung mit constanter verticaler Beschleunigung f (positiv, wenn abwärts gerichtet) haben kann. Die Arbeit M der Massenkräfte pro

1 Kgr. längs dem Bogen $A_0 A$ einer Bahn, die von der zweiten Ergänzungskraft der relativen Bewegung stets unabhängig ist, hat dann den Ausdruck:

$$M = \left(1 - \frac{f}{g}\right) h + \frac{\omega^2}{g} \int_{r_0}^{r} r\,dr = \left(1 - \frac{f}{g}\right) h + \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2) \ldots (9),$$

unter r_0 und r die Entfernungen der Punkte A_0 und A von der (gegen das Coordinatensystem fest liegenden) Rotationsaxe, und unter h die Höhe des Punktes A_0 über dem Punkte A verstanden.

Ist $\omega = 0$, so kann die constante Translationsbeschleunigung f eine beliebige unveränderliche Richtung haben, und ist dann

$$M = h - \frac{f}{g} s' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

unter s' die Projection von $A_0 A$ auf die Richtung von f und zwar algebraisch verstanden, so dass s' positiv oder negativ ist, jenachdem die Richtung $A_0 A$ mit der Richtung von f einen spitzen oder stumpfen Winkel bildet.

Wird von der Schwere abstrahirt, so kann das Coordinatensystem, also das System der Leitflächen um eine beliebig gerichtete Axe mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω rotiren und zugleich eine Translationsbewegung mit constanter Beschleunigung f im Sinne jener Axe haben; es ist dann

$$M = -\frac{f}{g} s' + \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2) \ldots\ldots\ldots (11),$$

wobei s' dieselbe Bedeutung hat wie in Gl. (10).

II. Strömende Bewegung in Gefässen und Röhren.

§. 74. Voraussetzungen und Bezeichnungen.

Bei der strömenden Bewegung von Flüssigkeiten in Röhren, wovon der Ausfluss aus Gefässen als ein besonderer Fall zu betrachten ist, können zwar die Bahnen der materiellen Punkte in der Regel, wenigstens an gewissen Stellen, als durch die Gestalt der Röhre gegeben betrachtet werden und zwar um so grösserer Annäherung, je enger die Röhre und je regelmässiger und einfacher sie gestaltet ist; die bei der Entwickelung der allgemeinen Formeln zur Untersuchung einer solchen Bewegung in den §§. 72 und 73 gemachte Voraussetzung, dass die Beziehung zwischen Pressung und specifischer Masse a priori gegeben sei, ist aber in manchen Fällen nicht zu-

lässig, besonders wenn es sich um Gase oder Dämpfe handelt und wenn eine wesentliche Wärmeleitung durch die Rohrwand hindurch stattfindet oder wenn bei erheblichen Bewegungswiderständen die dadurch bedingte Verwandlung von Arbeit in Wärme nicht unberücksichtigt bleiben darf. Dadurch wird die schon unter jener vereinfachenden Voraussetzung bedeutende Schwierigkeit, das Aenderungsgesetz des äusseren und inneren Zustandes von Punkt zu Punkt eines Querschnitts (d. h. nach §. 72 einer Fläche, welche die Bahnen rechtwinkelig schneidet) rationell zu bestimmen, erheblich gesteigert, und sieht man sich deshalb zumeist genöthigt, eine anderweitige Vereinfachung dadurch herbeizuführen, dass man den augenblicklichen äusseren und inneren Zustand in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts nur als mittleren, für alle Punkte desselben als gleich vorausgesetzten Zustand in Rechnung bringt.

Nach den Erörterungen in §. 72 und §. 73 ist diese Voraussetzung, was die Pressung betrifft, um so weniger fehlerhaft, je weniger die Querschnitte und die Bahnen gekrümmt sind, vorausgesetzt dass auch nach hydrostatischen Gesetzen sich die Pressung nur wenig von Punkt zu Punkt eines Querschnitts ändert, was um so weniger der Fall sein wird, je kleiner er ist, je kleiner besonders (mit Rücksicht auf die Wirkung der Schwere) der Höhenunterschied irgend zweier seiner Punkte und je kleiner das specifische Gewicht der Flüssigkeit ist. Die Gleichsetzung der Geschwindigkeit für alle Punkte eines Querschnitts involvirt freilich ausserdem die Abstraction von den im Sinne der Bahnen wirksamen Componenten der inneren Reibung, die auch bei kleinen ebenen Querschnitten und geraden Bahnen von wesentlichem Einflusse sein können; dieser Einfluss muss dann zusammen mit dem der äusseren Reibung und der sonstigen Bewegungswiderstände auf empirische Weise berücksichtigt werden.

Dabei ist es nicht ausgeschlossen, bezüglich auf die Form der Ausdrücke, durch welche jene Einflüsse berücksichtigt werden sollen, möglichst rationelle Erwägungen, insbesondere die Formeln der §§. 72 und 73 für die innere Reibung in gewissen einfachen Fällen zu Grunde zu legen, wie es im Folgenden mehrfach geschehen wird, indem nur die Zahlencoefficienten der fraglichen Ausdrücke unbedingt und um so mehr nur erfahrungsmässig zu bestimmen sind, als sie den mancherlei Vernachlässigungen und theoretisch unergründlichen Umständen zugleich Rechnung tragen müssen. Auch bleibt es vorbehalten, auf den Einfluss der Centrifugalkraft bei gekrümmten Bahnen oder der Schwerkraft bei Querschnitten von erheblicher Verticalausdehnung in gewissen Fällen schon in den theoretischen Formeln

bezüglich auf das Aenderungsgesetz des äusseren und inneren Zustandes von Punkt zu Punkt eines Querschnitts Rücksicht zu nehmen. Wenn aber vorläufig davon abgesehen und die obige Voraussetzung einer schichtenweisen Bewegung, nämlich eines gleichen äusseren und inneren Zustandes in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts oder einer Flüssigkeitsschicht zwischen zwei unendlich nahe benachbarten Querschnitten zu Grunde gelegt wird, so sei

p die specifische Pressung,

v das specifische Volumen $\left(= \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{g\mu}\right.$, wenn γ das specif. Gewicht oder μ die specif. Masse bedeutet),

T die absolute Temperatur der Flüssigkeit,

U ihr specifisches inneres Arbeitsvermögen,

u ihre Geschwindigkeit

in allen Punkten eines Querschnitts F.

Unter der Mittellinie der Röhre werde der Ort der Schwerpunkte aller Querschnitte F verstanden, und es sei s die Bogenlänge dieser Mittellinie von einem bestimmten Punkte S_0 derselben (dem Schwerpunkte eines bestimmten Querschnitts F_0) bis zum Schwerpunkte S des beliebigen Querschnitts F. Die obigen Grössen p, v, T, U, u, welche sich auf den inneren und äusseren Zustand in irgend einem (durch s bestimmten) Querschnitte beziehen, sind dann Functionen von s und von der Zeit t, und es besteht die allgemeine Aufgabe darin, diese Functionen unter gegebenen Umständen zu bestimmen, insbesondere bei gegebener Gestalt der Röhre, bei gegebenen Massenkräften und Bewegungswiderständen, bei gegebener Wärmemittheilung durch die Rohrwand und überhaupt mit Rücksicht auf die gegebenen Grenzbedingungen.

Ist dabei die Bewegung nicht permanent, so ist sie doch in vielen Fällen der Anwendung nur so langsam veränderlich, dass der augenblickliche Zustand in irgend einem Querschnitte ohne merklichen Fehler demjenigen gleich gesetzt werden kann, welcher unter übrigens gleichen und unverändert bleibenden Umständen bei permanenter Bewegung daselbst stattfinden würde. Der ohnehin für die Technik wichtigste Fall einer permanenten Bewegung wird deshalb im Folgenden zuerst in Untersuchung gezogen; p, v, T, U, u sind dabei nur Functionen von s, und wenn man ferner mit G das unveränderliche Gewicht der in jeder Zeiteinheit durch jeden Querschnitt strömenden Flüssigkeit bezeichnet wird, so kann die Fundamentalaufgabe, die demnächst durch Vertauschung von gegebenen und gesuchten Grössen verhältnissmässig leicht sehr vieler Modificationen

fähig ist, dahin ausgesprochen werden, dass die Grössen p, v, T, U, u als Functionen von s, also für jeden Querschnitt F bestimmt werden sollen, wenn sie für einen Querschnitt (z. B. für $s = 0$) gegeben und wenn ferner gegeben sind: die Art der Flüssigkeit, die Constante G, die Gestalt der Röhre, die Massenkräfte (eventuell von einer gegebenen eigenen Bewegung der Röhre mit abhängend), die Widerstände und die Wärmemittheilung durch die Rohrwand.

a. Permanente Bewegung.

§. 75. Allgemeine Gleichungen.

Zur Lösung der zu Ende des vorigen §. genannten allgemeinen Aufgabe sind 5 Gleichungen erforderlich zwischen p, v, T, U, u und s resp. solchen Grössen, welche als Functionen von s oder als Constante gegeben sind. Eine erste Gleichung, die hier die Stelle der Continuitätsgleichung vertritt und als solche bezeichnet werden mag, erhält man durch zweifachen Ausdruck des in 1 Sec. durch einen Querschnitt F strömenden Flüssigkeitsvolumens:

$$Fu = Gv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zwei weitere Gleichungen ergeben sich aus der allgemeinen Gleichung der lebendigen Kraft:

$$dL = dM + dP - dR - dS + dE \qquad (\S.\ 6,\ \text{Gl.}\ 7)$$

und aus der allgemeinen Wärmegleichung:

$$dU = WdQ + dR + dS - dE \qquad (\S.\ 11,\ \text{Gl.}\ \ldots)$$

oder aus der durch Verbindung beider hervorgehenden Gleichung des Arbeitsvermögens:

$$d(L + U) = dM + dP + WdQ \qquad (\S.\ 11,\ \text{Gl.}\ \ldots)$$

Werden dieselben auf die Zustandsänderung bezogen, welche die den Querschnitt F im Zeitelement dt durchströmende Flüssigkeitsschicht, deren Gewicht $= Gdt$ ist, in diesem Zeitelement erfährt, während dessen ihr Schwerpunkt das Bogenelement ds der Mittellinie durchläuft, so ist die entsprechende Aenderung der lebendigen Kraft dieser Schicht:

$$dL = \frac{Gdt}{g}\, d\,\frac{u^2}{2} = Gdt\,\frac{u\,du}{g},$$

ihre Expansionsarbeit: $dE = Gdt\,.\,pdv$

und die Summe der Arbeiten der Pressungen, welche auf die hintere und

die vordere Fläche der Schicht von den angrenzenden Schichten ausgeübt werden (die Arbeit der auf den Rand der Schicht von der Rohrwand ausgeübten Pressung ist = Null):

$$dP = Fp\dot{u}dt - [Fpu + d(Fpu)]dt = -d(Fpu)dt$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (1)

$$dP = -Gdt.d(pv).$$

Diese Ausdrücke mögen für dL, dE und dP in den obigen Gleichungen substituirt, und die letzteren durch Gdt dividirt werden. Wenn dann die Grössen dU, dM, dQ, dR und dS jetzt auf 1 Kgr. der Flüssigkeitsschicht und das Bahnelement $d\mathfrak{s}$ ihres Schwerpunktes bezogen werden, und die Summe $dR + dS$ mit dB bezeichnet wird, so ergiebt sich pro 1 Kgr. Flüssigkeit und für das Bogenelement ds der Mittellinie resp. für das Rohrelement zwischen den Querschnitten, deren Schwerpunkte die Endpunkte jenes Bogenelementes ds sind, die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$\frac{udu}{g} = dM - d(pv) - dB + pdv$$

$$\text{oder} \quad \frac{udu}{g} + vdp = dM - dB \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

ferner die Wärmegleichung:

$$dU + pdv = WdQ + dB \;\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

und die Gleichung des Arbeitsvermögens:

$$\frac{udu}{g} + dU + d(pv) = dM + WdQ \;\ldots\ldots\ldots (4).$$

Darin bedeuten also jetzt:

dU die Aenderung des inneren Arbeitsvermögens,

dM die Arbeit der Massenkräfte,

dB die durch die Bewegungswiderstände verbrauchte, in Wärme verwandelte Arbeit und

dQ die durch die Rohrwand mitgetheilte (positive oder negative) Wärmemenge

pro 1 Kgr. einer Flüssigkeitsschicht und für das Bahnelement $d\mathfrak{s}$ ihres Schwerpunktes, also für das Bogenelement ds der Mittellinie.

Indem von den Gleichungen (2), (3), (4) jede aus den beiden anderen durch Addition oder Subtraction hervorgeht, so hat man in den obigen Gleichungen (1) bis (4) einstweilen 3 Beziehungen zwischen den Grössen v, T, U, u und s, welche allgemein für jede Art von Flüssigkeit gelten. Die somit weiter noch nöthigen zwei Gleichungen sind von der Art der

Flüssigkeit abhängig, dagegen unabhängig von der Bewegung, d. h. von u; es sind die Zustandsgleichung (§. 8) und die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens (§. 11). Bei einer homogenen Flüssigkeit ist erstere eine Beziehung zwischen p, v und T, letztere im Allgemeinen eine solche zwischen p, v, T und U. Bei einem continuirlichen Gemisch von gesättigtem Dampf und gleichartiger tropfbarer Flüssigkeit kommt zwar noch eine weitere Variable y (die Dampfmenge in 1 Kgr. des Gemisches) in die fraglichen zwei Gleichungen vor, wogegen dann aber die Beziehung zwischen p und t als 6te Gleichung zur Verfügung ist; oder man kann auch letztere zusammen mit derjenigen, welche durch Elimination von y zwischen der Zustandsgleichung und der Gleichung des inneren Arbeitsvermögens erhalten wird, als die beiden letzten der 5 Gleichungen betrachten, welche zur Bestimmung der Grössen p, v, T, U, u als Functionen von s unter gegebenen Umständen erforderlich sind. —

Wenn die Massenkräfte ausser von der eigenen Bewegung des Gefässes oder der Röhre nur von der Schwere herrühren, so gelten für ihre Arbeit $= M$ pro 1 Kgr. und für einen beliebigen Bogen $S_0S =$ s der Mittellinie die in §. 73, Gl. (9) bis (11) für verschiedene Fälle angegebenen Ausdrücke, in denen nur die dort auf irgend einen Punkt A einer beliebigen Bahn bezogenen Grössen hier auf irgend einen Punkt S der Mittellinie zu beziehen sind. Ist

f die Beschleunigung des Punktes S der Mittellinie,

ϱ der Winkel, den die Richtung von f,

ψ der Winkel, den die Richtung der beschleunigenden Schwerkraft $= g$ mit der im Sinne der Bewegung genommenen Richtung der Mittellinie im Punkte S bildet, so kann auch allgemein gesetzt werden:

$$dM = \left(\cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varrho\right) ds \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Die permanente Bewegung erfordert, dass der Ausdruck $\left(\cos\psi - \frac{f}{g}\cos\varrho\right)$ unabhängig von der Zeit, also eine blosse Function von s sei. Das ist z. B. der Fall, wenn die Bewegung des Gefässes oder der Röhre in einer Rotation mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine verticale Axe und in einer Translationsbewegung mit constanter verticaler Beschleunigung φ besteht; dabei kann auch, wenn $\omega =$ Null ist, die Richtung von φ, oder wenn von der Schwere abstrahirt wird, die gemeinsame Richtung der Rotationsaxe und der Beschleunigung φ beliebig sein. Unter Umständen werden indessen die Gesetze der permanenten Bewegung auch auf solche

Fälle übertragen, in denen $\frac{dM}{ds}$ eine periodische Function der Zeit ist, sofern es sich dabei lediglich um Mittelwerthe für einen viele Perioden umfassenden Zeitraum handelt, z. B. bei der Bewegung des Wassers in den Canälen einer Turbine, deren Rotationsaxe nicht vertical ist.

Was die Wärmemittheilung durch die Rohrwand betrifft, so ist der Fall bemerkenswerth, dass dieselbe von einer anderen Flüssigkeit herrührt, welche die Rohrwand von aussen berührt und selbst in strömender Bewegung längs derselben begriffen sein kann. Ist

T' die absolute Temperatur dieser Flüssigkeit an der Stelle, wo die im Inneren der Röhre durch den Querschnitt F strömende Flüssigkeit die Temperatur T hat, ist ferner

dF' das Element der inneren Rohrwandfläche zwischen den Querschnitten, deren Schwerpunktsabstand das Bogenelement ds der Mittellinie ist, und ist

k der Wärmetransmissions-Coefficient der Rohrwand an der betreffenden Stelle, d. h. die Wärmemenge, welche durch dieselbe im Beharrungszustande pro 1 Quadratm. ihrer inneren Wandfläche und für jeden Grad Temperaturdifferenz der beiderseits angrenzenden Flüssigkeiten in 1 Sec. übertragen wird,

so ist die Wärmemenge, welche in 1 Sec. durch das betreffende Element der Rohrwand wirklich übertragen, also den unterdessen vorbeifliessenden G Kgr. der inneren Flüssigkeit mitgetheilt wird,

$$GdQ = k(T' - T)dF' \qquad (6).$$

Darin ist F' eine durch die gegebene Gestalt der Röhre bestimmte Function von s, und mit Rücksicht auf den Beharrungszustand muss auch T' als blosse Function von s vorausgesetzt werden. Der Coefficient k hängt ab (wie später im dritten Abschnitt dieses Buches näher ausgeführt werden soll) von den Coefficienten λ_1 des Wärmeüberganges an der äusseren und inneren Rohrwand (§. 9, Gl. 3) und vom Leitungscoefficienten λ des Materials derselben (§. 9, Gl. 1), ferner von der Dicke und von der Krümmung der Rohrwand, und kann ausserdem noch von T' und T abhängig, also eine mittelbare Function von s sein. Wenn die äussere Flüssigkeit, zwischen welcher die Wärme mit der inneren Flüssigkeit ausgetauscht wird, nicht ringsum, sondern nur theilweise die Rohrwand berührt (wie z. B. das Wasser eines Dampfkessels als äussere Flüssigkeit nur einen Theil der Wand eines aussen am Kessel entlang geführten Heizcanals berührt, ein Fall, in welchem die Heizgase als innerlich strömende Flüssigkeit eine Temperatur $T > T'$ haben, also dQ negativ ist), so ist in Gl. (6) entweder

unter dF' der betreffende Theil des Elements der inneren Rohrwandfläch[illegible] oder k entsprechend kleiner genommen als Mittelwerth für jenes gan[illegible] Wandelement zu verstehen; letzteres ist im Allgemeinen nöthig, wenn a[illegible] den verschiedenen Stellen im Umfang eines Querschnitts die Wärme[illegible] theilung in verschiedenem Grade stattfindet.

§. 76. Hydraulische Bewegungswiderstände.

Die Bewegungswiderstände pflegen in der Hydraulik durch [illegible] gleichung mit der Schwerkraft als sogenannte **Widerstandshöhen** [illegible] Rechnung gebracht zu werden. Unter der Widerstandshöhe für die [illegible] wegung der Flüssigkeit vom Querschnitte F_0 bis zum Querschnitte F [illegible] Röhre wird nämlich die Höhe verstanden, von welcher 1 Kgr. der Flü[illegible] keit niedersinken müsste, damit ihre Schwere eine Arbeit = derjen[illegible] verrichte, welche durch die Bewegungswiderstände in der Rohrstrecke [illegible] F_0 bis F pro 1 Kgr. hindurch strömender Flüssigkeit verbraucht [illegible] diese Widerstandshöhe ist also = der Arbeit, welche in den Gleichu[illegible] (2) und (3) des vorigen §. mit B bezeichnet wurde, oder für ein Län[illegible] element der Röhre = der dort mit dB bezeichneten Arbeit. Setzt ma[illegible]

$$B = \zeta \frac{u^2}{2g} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots$$

unter u die mittlere Geschwindigkeit im Endquerschnitt F der betreff[illegible] Rohrstrecke F_0F verstanden, so heisst ζ der **Widerstandscoeffi[illegible]** für diese Strecke; derselbe ist also das Verhältniss der Widerstandsh[illegible] zu der Geschwindigkeitshöhe, die derjenigen Geschwindigkeit entspr[illegible] mit welcher die Flüssigkeit von der betreffenden Rohrstrecke abf[illegible] Zuweilen wird auch der Widerstandscoefficient = ζ' auf die Geschw[illegible] keit u' in irgend einem anderen Querschnitt F' bezogen, in welchem [illegible] dann aber $\zeta' = B : \frac{u'^2}{2g}$ ausdrücklich als der auf diesen Querschnitt [illegible]

[illegible]schwindigkeit bezogene Widerstandscoefficient zu bezeichne[illegible] [illegible]jenige Widerstand insbesondere, welcher auf dem ganzen [illegible] [illegible]cht gezogenen Wege einer Flüssigkeit hemmend einwirkt, [illegible] [illegible]ht, dass die Endgeschwindigkeit u kleiner ist, als sie ohne hydr[illegible] [illegible]iderstände unter übrigens gleichen Umständen sein würde, [illegible] [illegible]urch den Widerstandscoefficienten ζ häufig auch durch den [illegible] [illegible]eschwindigkeitscoefficienten in Rechnung gebracht. Der[illegible]

$= \varphi$ bedeutet das Verhältniss der effectiven Endgeschwindigkeit u zu demjenigen Werth $= u'$, den dieselbe ohne hydraulische Widerstände unter übrigens gleichen Umständen haben würde, nämlich bei gleicher Arbeit der Massenkräfte, gleicher Wärmemittheilung und gleicher Gesammtänderung der Pressung (von p_0 bis p). Eine einfache Beziehung zum Widerstandscoefficienten ζ hat übrigens dieser Coefficient φ nur dann, wenn das specif. Volumen constant ist, wie bei tropfbaren Flüssigkeiten angenommen werden kann; dann ist

$$\frac{u'^2}{2g} = \frac{u^2}{2g} + B = (1 + \zeta)\frac{u^2}{2g},$$

nämlich nach Gl. (2) im vorigen §.

$$= M - \int_{p_0}^{p} v\,dp = M + \int_{p}^{p_0} v\,dp = M + v\,(p_0 - p),$$

und somit

$$\varphi = \frac{u}{u'} = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}\,;\quad \zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \,\ldots\ldots\ldots (2).$$

Bei Gasen und Dämpfen wird durch die in Wärme sich umsetzende Widerstandsarbeit das Aenderungsgesetz von v, also das Integral $\int_{p}^{p_0} v\,dp$ beeinflusst, und zwar vergrössert, so dass auch $(1 + \zeta)u^2 > u'^2$ oder $\zeta > \frac{1}{\varphi^2} - 1$ ist.* —

In Beziehung auf die sie bedingenden Umstände können die Bewegungswiderstände unterschieden werden in solche, welche immer längs der ganzen Leitung stetig einwirken, und in solche, welche nur unter Umständen an gewissen Stellen vorkommen. Die ersteren, welche unter der Bezeichnung des allgemeinen Leitungswiderstandes zusammengefasst werden mögen, rühren her von der inneren und äusseren Reibung; die entsprechende Widerstandshöhe pro Längeneinheit der Röhre wird später unter specielleren Voraussetzungen näher besprochen werden. Die eventuell an gewissen Stellen vorkommenden besonderen Widerstände werden durch örtliche Aenderungen des Querschnitts oder durch Richtungsänderungen der Mittellinie verursacht, wobei es der Fall sein mag, dass solche Richtungsänderungen der Röhre hauptsächlich mittelbar, nämlich dadurch den Widerstand bedingen, dass sie unmittelbar auch eine Quer-

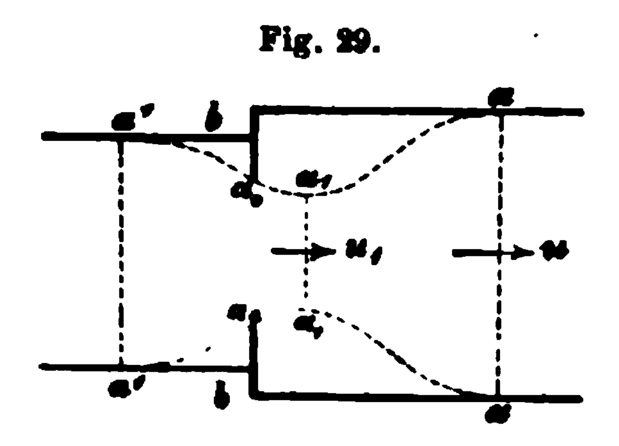
* Vergl. Zeuner: „Neue Darstellung der Vorgänge beim Ausströmen der Gase und Dämpfe aus Gefässmündungen." Der Civilingenieur, 1871, S. 86.

schnittsänderung zur Folge haben, indem mit der Krümmung der Bahnen, in welchen die Flüssigkeitstheilchen strömen, eine so bedeutende Abnahme der Pressung im Sinne gegen die Krümmungsmittelpunkte hin verbunden sein kann (siehe die zweite der Gleichungen (1) in §. 73 bei kleinem Werth von ϱ), dass dadurch eine örtliche Trennung des Flüssigkeitsstroms von der Rohrwand veranlasst wird: siehe die nebenstehende Figur 28, in welcher die punktirte Linie bei a die innere Begrenzung des Flüssigkeitsstroms, ab seinen örtlich verkleinerten Querschnitt andeutet. In dem hier bei a zwischen Rohrwand und Flüssigkeitsstrom liegenden Raum ist die Flüssigkeit nur in wirbelförmiger Bewegung begriffen.

Fig. 28.

Ein durch die Erfahrung genügend bewährter angenäherter Ausdruck der betreffenden Widerstandshöhe lässt sich für alle solche Fälle aufstellen, in welchen eine der Art plötzliche Querschnittsvergrösserung des Flüssigkeitsstroms stattfindet, dass derselbe die Röhre an der fraglichen Stelle nicht vollkommen ausfüllt, vielmehr von einer Flüssigkeitsmasse begrenzt wird, die sich in wirbelförmiger Bewegung an Ort und Stelle befindet, wobei es indessen nicht ausgeschlossen ist, dass zwischen dieser unregelmässig wirbelnden und jener regelmässig strömenden Flüssigkeit ein beständiger theilweiser Austausch an ihrer Berührungsfläche stattfindet. Für die Gültigkeit des Ausdrucks ist es dabei zwar einerlei, ob die plötzliche Querschnittsvergrösserung des Flüssigkeitsstroms durch eine gegebene Aenderung der Richtung (wie bei Fig. 28) oder des Querschnitts der Röhre selbst als primäre Ursache bedingt wird; einen praktischen Werth hat er jedoch nur im letzteren, durch Fig. 29 angedeuteten Falle.

Fig. 29.



In dieser Figur, welche den Längenschnitt einer als geradlinig vorausgesetzten, mit einer plötzlichen Querschnittsänderung verbundenen Rohrstrecke vorstellt, ist wieder durch die punktirten Linien $a'a_0a_1a$ die Begrenzung des Flüssigkeitsstroms angedeutet, insoweit derselbe in Folge jener plötzlichen Querschnittsänderung sich von der Rohrwand trennt, wenn die Bewegung im Sinne der Pfeile stattfindet. Es ist dabei angenommen, dass sich der Rohrquerschnitt plötzlich von $a'a'$ zu a_0a_0 verkleinert und dann zu aa vergrössert, so dass der Querschnitt des Flüssigkeitsstroms sich nach dem Durchgange durch a_0a_0 zunächst noch weiter bis a_1a_1 verkleinern wird, bevor er sich zu aa erweitert. Indessen ist diese letztere, für den fraglichen Widerstand hauptsäch-

sächlich massgebende Querschnittsvergrösserung von a_1a_1 bis aa nicht nothwendig an die besondere Voraussetzung der Figur gebunden; insbesondere kann auch

$$a'a' > a_0a_0 = aa \quad \text{oder} \quad a'a' = a_0a_0 < aa$$

sein, in welch' letztem Falle a_1a_1 mit a_0a_0 zusammenfiele.

Die Querschnitte $a_1a_1 = F_1$ und $aa = F$ des Flüssigkeitsstroms können als eben, die Bahnen der materiellen Punkte daselbst als parallel und geradlinig angenommen werden, falls die Röhre bei aa prismatisch ist; bei Abstraction von Massenkräften sind dann gleichförmige Pressungen in diesen Querschnitten vorauszusetzen (§. 73), welche beziehungsweise mit p_1 und p bezeichnet seien.* Die mittleren Geschwindigkeiten und specifischen Volumina für dieselben Querschnitte F_1 und F seien $= u_1$ und u, v_1 und v. In dem Raum a_0a_1ab herrschen unregelmässige Wirbel, welche an keiner Stelle mit einer bestimmten und angebbaren vorwiegenden Bewegungsrichtung verbunden sind, so dass die Pressung in diesem ganzen Raume als gleich, also = der Pressung p_1 im Querschnitte $a_1a_1 = F_1$ vorausgesetzt werden muss, während sie in den Querschnitten, welche zwischen a_0a_0 und a_1a_1 sowie zwischen a_1a_1 und aa liegen, am Umfange auch $= p_1$, nach der Mitte zu aber in Folge der Divergenz und Krümmung der Bahnen davon verschieden sein wird. Unter diesen Umständen ist der resultirende äussere Druck, welcher auf die Oberfläche der zwischen den Querschnitten F_1 und F augenblicklich enthaltenen strö-

* Von vorn herein erscheint es zwar nicht nöthig, dass die im kleinsten Querschnitte a_1a_1 parallelen Bahnen daselbst auch geradlinig, d. h. unendlich wenig gekrümmt werden, wie es dann der Fall wäre, wenn die Flüssigkeit durch die Oeffnung a_0a_0 frei ausflösse und nach der Contraction von a_0a_0 bis a_1a_1 diesen letzteren Querschnitt behielte. Der Umstand aber, dass erfahrungsmässig die innere Contraction beim Einfluss in eine cylindrische Ansatzröhre (§. 86) nicht merklich von der äusseren Contraction bei freiem Ausflusse unter sonst gleichen Umständen verschieden ist, lässt auf ein in beiden Fällen fast gleiches Aenderungsgesetz der Querschnitte von a_0a_0 bis a_1a_1 schliessen und vermuthen, dass auch in dem allgemeineren Falle der Fig. 29 die Voraussetzung einer bei a_1a_1 vorübergehend verschwindend kleinen Bahnkrümmung nicht merklich fehlerhaft ist. Wenn aber auch letzteres bei sehr bedeutender Wiedererweiterung des Flüssigkeitsstromes von a_1a_1 bis aa der Fall wäre, so würde dadurch doch die nachfolgende Betrachtung nicht bedeutend gestört werden, weil dann die Gesammtpressung in dem verhältnissmässig kleinen Querschnitte a_1a_1 auch nur einen kleinen Theil des äusseren Drucks ausmachen würde, der auf die Oberfläche der zwischen a_1a_1 und aa enthaltenen strömenden Flüssigkeit im Sinne ihrer mittleren Strömungsrichtung im Ganzen ausgeübt wird.

menden Flüssigkeit im Sinne der Bewegung ausgeübt wird,

$$P = (p_1 - p)F.$$

Wesentlich anders sind die Verhältnisse, wenn die Querschnittsver-grösserung des Flüssigkeitsstroms unmittelbar durch eine zwar schnelle aber stetige Erweiterung der Röhre von a_1a_1 bis aa bedingt wird de Art, dass zwar auch diese ebenen Querschnitte der Röhre zugleich als di mit gleichförmigen Pressungen p_1 und p behafteten Querschnitte F_1 und des Flüssigkeitsstroms betrachtet werden können, der letztere aber ununter-brochen in Berührung mit der Rohrwand bleibt. Die Pressung, welch dann in diesem zwischen F_1 und F liegenden Theil der Rohrwandfläch herrscht, ist wesentlich von deren Gestalt, also von dem Gesetz abhäng nach welchem die Erweiterung der Röhre stattfindet; sie entzieht sich ein rationellen Beurtheilung, und es lässt sich nur behaupten, dass ihr Mitte werth $p_2 > p_1$ sein müsse. Sofern nämlich durch die Rohrwand in dies Falle der Flüssigkeitsstrom verhindert wird, sich bis zu einer Flüssigkeits-masse von lediglich wirbelnder Bewegung und somit gleichförmiger Pres-sung p_1 auszudehnen, muss diesem Zwange nothwendig ein Ueberschu der fraglichen Pressung über p_1 entsprechen. Wenn also jetzt der res-tirende äussere Druck auf die Oberfläche der zwischen F_1 und F entha tenen strömenden Flüssigkeit im Sinne der Bewegung

$$P = p_1F_1 + p_2(F - F_1) - pF = (p' - p)F \quad \ldots\ldots$$

gesetzt wird, so ist mit p_2 zugleich auch $p' \overline{>} p_1$. Dieser Fall einer m oder weniger schnellen, zu einer Trennung des Flüssigkeits-stroms von der Rohrwand im Allgemeinen aber nicht Veran-lassung gebenden Querschnittserweiterung erscheint somit als allgemeinere; ist auch der für ihn geltende Ausdruck der Widerstands B mit der unbestimmten Pressung p' nothwendig selbst unbestimmt, mag er doch vorläufig vorausgesetzt werden, um demnächst durch die Sub-stitution $p' = p_1$ zu dem bestimmten, durch Fig. 29 dargestellten Grenz-falle einer plötzlichen, d. h. schnellstmöglichen, nämlich mit Trennung von der Rohrwand verbundenen Querschnittsvergrö-serung des Flüssigkeitsstroms überzugehen.

Zur Gewinnung einer Beziehung zwischen den Pressungen p, p_1 und den Geschwindigkeiten u, u_1 werde auf die Flüssigkeitsmasse, die zwischen den ebenen Querschnitten F_1 und F augenblicklich enthalten ist, das me-chanische Princip des Antriebs oder des Impulses angewendet, nach welchem bekanntlich die Aenderung der Bewegungsgrösse eines Massensystems nach irgend einer Richtung für jedes Zeitelement gleich ist dem entsprechenden

Antrieb der nach dieser Richtung genommenen resultirenden äusseren Kraft (Product aus Kraft und Zeitelement). Mit Rücksicht auf die Permanenz der Bewegung ist aber die Aenderung, welche die Bewegungsgrösse jener zwischen F_1 und F augenblicklich enthaltenen Flüssigkeitsmasse im Sinne von u_1 und u im folgenden Zeitelement dt erfährt, = dem Ueberschuss der Bewegungsgrösse, womit in diesem Zeitelement die Flüssigkeitsschicht von der Masse $\frac{G\,dt}{g}$ durch den Querschnitt F geht, über diejenige, womit sie den Querschnitt F_1 passirt; bei Abstraction von äusseren Massenkräften, deren Einfluss für die kleine Rohrstrecke von F_1 bis F hier vernachlässigt werden kann, mit Rücksicht also nur auf den äusseren Druck an der Oberfläche, hat man somit nach jenem Princip und nach Gl. (3):

$$\frac{G\,dt}{g}(u - u_1) = P\,dt = (p' - p)F\,dt$$

der wegen $G = \frac{Fu}{v}$ nach §. 75, Gl. (1)

$$p - p' = \frac{u(u_1 - u)}{gv} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Nun ist nach §. 75, Gl. (2) mit $dM = 0$ die Widerstandshöhe

$$= \int_u^{u_1}\frac{u\,du}{g} - \int_{p_1}^{p} v\,dp = \frac{u_1^2 - u^2}{2g} - (pv - p_1v_1) + \int_{v_1}^{v} p\,dv =$$

$$= \frac{u_1^2 - u^2}{2g} - (p - p')v - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv$$

nd wenn darin nach Gl. (4)

$$\frac{u_1^2 - u^2}{2g} - (p - p')v = \frac{u_1^2 - u^2 - 2u(u_1 - u)}{2g} = \frac{(u_1 - u)^2}{2g}$$

esetzt wird, so folgt

$$B = \frac{(u_1 - u)^2}{2g} - p'v + p_1v_1 + \int_{v_1}^{v} p\,dv \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

abei bedeutet das p hinter dem Integralzeichen nicht die Pressung im uerschnitte F, sondern diejenige Pressung, welche dem augenblicklichen Werth des von v_1 in v übergehenden specifischen Volumens entspricht.

Unter übrigens gleichen Umständen ist für den Grenzfall

$p' = p_1 = min.$ die Widerstandshöhe am grössten, und zwar

$$B = \frac{(u_1 - u)^2}{2g} + p_1(v_1 - v) + \int_{v_1}^{v} p\,dv \ldots\ldots\ldots$$

Insbesondere für tropfbare Flüssigkeiten und überhaupt, wenn $v_1 - v = 0$ gesetzt werden darf, ergiebt sich

$$B = \frac{(u_1 - u)^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d. h. die Widerstandshöhe = der Geschwindigkeitshöhe, welche der plötzlichen Abnahme der Geschwindigkeit entspricht, und der Widerstandscoefficient:

$$\zeta = B : \frac{u^2}{2g} = \left(\frac{u_1}{u} - 1\right)^2 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2 \ldots\ldots\ldots$$

§. 77. Vereinigung von Flüssigkeitsströmen.

Die Vereinigung verschiedener Flüssigkeitsströme zu einem resultirenden gemischten Strom ist besonders in solchen Fällen von technischem Interesse, in welchen einer oder ein Theil jener Ströme dazu dienen soll, die übrigen zu befördern oder gar zu ermöglichen, in Folge der inneren Reibung und der Druckverminderung, die sie in der Vereinigungskammer, d. h. in dem Raume verursachen, in welchem das Zusammenfliessen und die Mischung der Ströme stattfindet. Indem solche Vorrichtungen (wie namentlich die Wasserstrahlpumpe von Thomson, die Dampfstrahlpumpe von Giffard, das Wasserstrahlgebläse, der Dampfstrahlaspirator, insbesondere die Blasrohrvorrichtung der Locomotiven) zur Kategorie der Arbeitsmaschinen, nämlich der Fördermaschinen für Flüssigkeiten gehören, werden sie später im vierten Bande dieses Werkes näher zu besprechen sein. Hier sollen zunächst nur die allgemeinen Gleichungen aufgestellt werden, die sich auf den Beharrungszustand der Vereinigung beliebig vieler solcher Flüssigkeitsströme beliebiger Art beziehen, und zwar unter den folgenden Voraussetzungen:

1) Die einzelnen Ströme sollen alle in derselben Richtung AX in die Vereinigungskammer einfliessen, in welcher am anderen Ende derselben der aus ihrer Mischung resultirende Strom abfliesst.

2) In den kleinsten Querschnitten aller der contrahirten Strahlen, welche im Allgemeinen die einzelnen Flüssigkeitsströme in die Vereinigungs-

kammer eintreten, herrsche die gleiche Pressung $= p'$, und ebenso gross sei der Druck an der gesammten Oberfläche der strömenden Flüssigkeit in der Vereinigungskammer (ausser etwa wo die Normale dieser Oberfläche und somit der Normaldruck auf dieselbe rechtwinklig gegen AX gerichtet ist) bis zu dem als eben und senkrecht zu AX vorausgesetzten Querschnitt F, durch welchen nach eben vollendeter Mischung der resultirende Strom die Vereinigungskammer verlässt; im Querschnitt F sei die Pressung $= p$. Diese Voraussetzung hinsichtlich der Pressung p' ist streng genommen und nothwendig nur dann erfüllt, wenn die strömende Bewegung in der Vereinigungskammer (analog dem im vorigen §. betrachteten und durch Fig. 29 daselbst angedeuteten Falle) sich nicht bis zu ihrer Wand erstreckt, vielmehr die strömende Flüssigkeit hier von einem Raum umgeben wird, in welchem nur unregelmässige wirbelförmige Bewegungen der darin befindlichen Flüssigkeit herrschen, die somit nach keiner Richtung vorwiegend eine Pressungsänderung bedingen.

3) Während der Vereinigung der Ströme sei die Arbeit äusserer Massenkräfte, desgleichen eine etwaige Wärmetransmission durch die Wand der Vereinigungskammer zu vernachlässigen.

Es sei nun G das Gewicht des pro Sec. durch den Querschnitt F strömenden Flüssigkeitsgemisches, u die Geschwindigkeit, v das specif. Volumen, U das specif. innere Arbeitsvermögen desselben (diese Grössen, namentlich u, event. als Mittelwerthe für die verschiedenen Punkte von F verstanden); desgl. sei für einen beliebigen (den m^{ten}) der in die Vereinigungskammer einmündenden Ströme das pro Sec. zuströmende Flüssigkeitsgewicht $= G_m$, und im kleinsten Querschnitte F_m die Geschwindigkeit $= u_m$, das specif. Volumen $= v_m$ und das specif. innere Arbeitsvermögen $= U_m$. Dann ist für den vorausgesetzten Beharrungszustand

$$G = \Sigma G_m \text{ mit } G = \frac{Fu}{v} \text{ und } G_m = \frac{F_m u_m}{v_m} \quad \ldots\ldots\ (1)$$

entsprechend der Continuitätsgleichung (1) in §. 75 für einen einzelnen Strom. Da ferner die äussere Kraft, welche auf die von den Querschnitten F_m bis zum Querschnitte F sich erstreckende strömende Flüssigkeit im Sinne AX, also im Sinne der Geschwindigkeiten u_m und u wirkt, gemäss der Voraussetzung unter 3) = dem Oberflächendruck auf dieselbe nach dieser Richtung, also nach der Annahme unter 2) $= (p' - p)F$ ist, so hat man nach dem Princip des Antriebs, bezogen auf die Richtung AX und auf 1 Secunde,

$$\frac{G}{g}u - \Sigma\frac{G_m}{g}u_m = \frac{1}{g}\Sigma G_m(u - u_m) = (p' - p)F$$

$$p - p' = \frac{1}{gF} \Sigma G_m (u_m - u) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

entsprechend der Gl. (4) des vorigen §. für einen einzelnen Strom, wobei $G_m = G_1 = G = \frac{Fu}{v}$ und $u_m = u_1$ ist.* Endlich ist nach der Gleichung des Arbeitsvermögens (§. 75, Gl. 4), wenn dieselbe mit G_m multiplicirt, bezüglich auf den Mischungsvorgang von F_m bis F integrirt und für alle Ströme summirt wird, mit Rücksicht auf die Voraussetzung unter 3) und weil auch die algebraische Summe der zwischen den einzelnen Strömen gegenseitig mitgetheilten Wärmemengen = Null ist,

$$\Sigma G_m \left(\frac{u_m^2 - u^2}{2g} + U_m - U + p'v_m - pv \right) = 0$$

oder wegen $\frac{u_m^2 - u^2}{2g} = \frac{(u_m - u)^2}{2g} + \frac{u}{g}(u_m - u)$

und weil nach Gl. (2)

$$p'v_m - pv = p'(v_m - v) - \frac{v}{gF} \Sigma G_m (u_m - u)$$

$$= p'(v_m - v) - \frac{u}{g}\left(\frac{1}{G} \Sigma G_m u_m - u\right)$$

ist, auch

$$\Sigma G_m \left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + U_m - U + \frac{u}{g}\left(u_m - \frac{1}{G} \Sigma G_m u_m\right)\right] = 0$$

oder endlich wegen

$$\Sigma G_m \frac{u}{g}\left(u_m - \frac{1}{G} \Sigma G_m u_m\right) = \frac{u}{g}\left(\Sigma G_m u_m - \Sigma G_m u_m \cdot \frac{\Sigma G_m}{G}\right) = 0$$

$$\Sigma G_m \left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + U_m - U \right] = 0 \quad \ldots \ldots (3)$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) in Verbindung mit den Zustandsgleichungen und den Gleichungen des inneren Arbeitsvermögens der betreffenden Flüssigkeiten enthalten, wie sich später zeigen wird, die Lösung der verschiedenen auf das Zusammenfliessen von Flüssigkeitsströmen bezüglichen Aufgaben, sofern dabei die hier zu Grunde liegenden Voraussetzungen als hinlänglich zutreffend zu betrachten sind, eventuell mit der

---

* Eine mit Gl. (2) identische und durch dieselbe Betrachtung erhaltene Gleichung wurde von Rankine (Proceedings of the Royal Society, 1870) als Fundamentalgleichung für die Combination beliebig vieler Flüssigkeitsströme aufgestellt. Siehe auch: „Der Civilingenieur“, 1871, S. 297.

Vorbehalt solcher Modificationen, die durch eine etwaige Abweichung der thatsächlich stattfindenden von den hier vorausgesetzten Umständen bedingt werden.

Durch die Benutzung der Gleichung des Arbeitsvermögens und der aus dem Princip des Antriebs gefolgerten Gl. (2) anstatt der Gleichung der lebendigen Kraft oder der Wärmegleichung (§. 75, Gl. 2 und 3) ist die in diesen letzteren vorkommende Grösse B umgangen worden. Doch lässt sich jetzt diese Grösse B, nämlich hier die Arbeit oder lebendige Kraft, welche als solche bei der Vereinigung der Ströme pro Sec. verloren und in Wärme verwandelt wird, leicht umgekehrt mit Hülfe der einen oder anderen jener Gleichungen (2) und (3) in §. 75 bestimmen; aus der letzteren folgt nämlich durch Multiplication mit G_m, Integration bezüglich auf den ganzen Mischungsvorgang und Summation für alle Ströme mit Rücksicht darauf, dass $\Sigma G_m Q = 0$ ist,

$$B = \Sigma G_m \left(U - U_m + \int_{v_m}^{v} p\,dv\right),$$

unter p in dem die Expansionsarbeit pro 1 Kgr. darstellenden Integral hier nicht die bestimmte Pressung im Querschnitte F, sondern die veränderliche Pressung beim Uebergange des specif. Volumens der betreffenden Flüssigkeit von v_m zu v verstanden. Die Substitution des der Gl. (3) entnommenen Werthes von $\Sigma G_m (U - U_m)$ liefert schliesslich

$$B = \Sigma G_m \left[\frac{(u_m - u)^2}{2g} + p'(v_m - v) + \int_{v_m}^{v} p\,dv\right] \dots\dots (4)$$

entsprechend dem Ausdrucke (6) des vorigen §. für die Widerstandshöhe eines einzelnen Stroms bei einer mit örtlicher Trennung von der Rohrwand verbundenen plötzlichen Querschnittsveränderung desselben. Wenn insbesondere keine Volumänderung mit der Vereinigung der Ströme verbunden ist, so folgt

$$B = \Sigma G_m \frac{(u_m - u)^2}{2g} \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

= der Summe der lebendigen Kräfte, die den verlorenen resp. gewonnenen Geschwindigkeiten entsprechen, da für einzelne Ströme auch $u_m < u$ sein kann.

1. Permanente Bewegung des Wassers.

§. 78. Fundamentalgleichungen.

Das Wasser gilt hier als Repräsentant irgend einer **tropfbaren Flüssigkeit**, deren **specifisches Volumen** v als **unveränderlich gegeben vorausgesetzt** wird. Ausserdem wird im Folgenden von **einer etwaigen Veränderlichkeit der Temperatur** T **abstrahirt**. Das durch v und T bestimmte specif. innere Arbeitsvermögen U ist dann auch eine Constante, und es bleiben von den 5 Grössen p, v, T, U, u (§. 75) nur p und u als Functionen von s zu bestimmen. Dazu dienen (ausser den Grenzbedingungen) die **Continuitätsgleichung** und die **Gleichung der lebendigen Kraft**. Erstere (§. 75, Gl. 1) kann hier wegen $v = Const.$ geschrieben werden:

$$Fu = F_0 u_0 = V \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1,$$

unter u_0 die mittlere Geschwindigkeit im Anfangsquerschnitt F_0 und unter V das pro Secunde durch jeden Querschnitt strömende constante Wasservolumen verstanden. Aus der Gleichung der lebendigen Kraft

$$\frac{u\,du}{g} + v\,dp = dM - dB \qquad (§. 75, Gl. 2)$$

folgt durch Integration vom Querschnitt F_0 bis zum Querschnitt F resp. längs dem Bogen $S_0S = s$ der Mittellinie, dessen Endpunkte S_0 und S die Schwerpunkte von F_0 und F sind, und wenn statt des specif. Volumens hier das specif. Gewicht $\gamma = \frac{1}{v}$ in die Rechnung eingeführt wird,

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + M - B$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (7) in §. 73, wenn dieselbe unter der Voraussetzung $\gamma = Const.$, also $E = 0$, auf die Bahn S_0S als Mittel der unendlich vielen von F_0 bis F sich erstreckenden Bahnen A_0A bezogen und die mittlere Widerstandsarbeit pro 1 Kgr. Wasser mit $-B$ bezeichnet wird.

Als **wirksame Massenkräfte werden hier stets nur die Schwerkraft** (mit constanter Grösse und Richtung) **und event. bei eigener Bewegung des Gefässes oder der Röhre die betreffende Ergänzungskraft vorausgesetzt**. Ist also k die Arbeit der letzteren pro 1 Kgr. auf dem Wege $S_0S = s$, nämlich

$$k = -\frac{1}{g}\int_0^s f \cos\varrho\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2$$

nach §. 75, Gl. (5), wenn f die Beschleunigung eines Punktes der Mittellinie und ϱ den Winkel bedeutet, den sie mit der im Sinne der Bewegung genommenen Richtung der Mittellinie bildet, und ist ferner h die Höhe des Punktes S_0 über dem Punkte S, so ist die Arbeit der Massenkräfte pro 1 Kgr.

$$M = h + k$$

und somit die obige Gleichung der lebendigen Kraft für die Rohrstrecke F_0F

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h + k - B \;\ldots\ldots\ldots (3).$$

Für den Zustand der relativen Ruhe des Wassers in der Röhre wäre mit $u = 0$ und $u_0 = 0$ auch $B = 0$, also nach Gl. (3) der Ueberschuss der Druckhöhe im Querschnitt F über dieselbe im Querschnitt F_0

$$\left(\frac{p - p_0}{\gamma}\right) = h + k,$$

welche Grösse die hydrostatische Ueberdruckhöhe der Rohrstrecke F_0F genannt werden kann im Gegensatze zur hydraulischen Ueberdruckhöhe derselben $= \frac{p - p_0}{\gamma}$ im Falle der Bewegung; der Ueberschuss der ersten über die zweite, also die Grösse

$$H = h + k + \frac{p_0 - p}{\gamma} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

womit Gl. (3) auch kürzer geschrieben werden kann:

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - B \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

heisse die wirksame Druckhöhe für die Rohrstrecke F_0F. Sie ist derjenige Theil ihrer hydrostatischen Ueberdruckhöhe, welcher auf die Erhaltung der Bewegung in dieser Rohrstrecke verwendet, nämlich nach Gl. (5) theils zur Bewältigung der Widerstände als Widerstandshöhe B (verlorene Druckhöhe) verbraucht, theils in Geschwindigkeitshöhe $= \frac{u^2 - u_0^2}{2g}$ (lebendige Druckhöhe) umgesetzt wird. Ist ζ der Widerstandscoefficient für die fragliche Strecke, φ der entsprechende Geschwindigkeitscoefficient, so folgt auch aus Gl. (5) mit Rücksicht auf §. 76, Gl. (1) und (2)

$$u = \sqrt{\frac{u_0^2 + 2gH}{1 + \zeta}} = \varphi\sqrt{u_0^2 + 2gH} \;\ldots\ldots\ldots (6).$$

Die beiden Gleichungen (1) und (5) oder (6) unter Berücksichtigung der Bedeutung von H nach Gl. (4) bilden die Grundlage zur Lösung aller Auf-

gaben, welche die permanente Bewegung des Wassers unter den hier zu Grunde liegenden Voraussetzungen betreffen und welche sich theils auf den Ausfluss aus Gefässen, theils auf die Bewegung in längeren Röhren beziehen.

α. Ausfluss des Wassers aus Gefässen.

§. 79. Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge.

Die in einem Gefässe enthaltene Wassermenge werde durch ent- sprechenden Zufluss constant erhalten, während durch eine Oeffnung im Boden oder in der Seitenwand des Gefässes beständig Wasser ausfliesst, indem dann dieser Ausfluss dauernd unter gleichen Umständen in gleicher Weise stattfindet, ist er ein Fall permanenter Bewegung. Die Ausfluss- öffnung oder **Mündung** befindet sich entweder als einfache **Wandöffnung** unmittelbar in der Gefässwand oder am Ende eines **Mundstücks**, d. h. einer Ansatzröhre, welche hier einstweilen als so kurz vorausgesetzt wird, dass der allgemeine Leitungswiderstand derselben zu vernachlässigen oder in den besonderen Widerstand (§. 76) einzubegreifen ist, der durch eine plötzliche Querschnittsänderung des Wasserstroms in der Ansatzröhre ver- ursacht werden kann. Indem diese Mündung $= A$ als eine ebene, von der inneren Wandfläche des Gefässes resp. des Mundstücks rings umgrenzte Fläche verstanden wird, ist sie im Allgemeinen nicht ein Querschnitt des Wasserstroms in dem mit dieser Bezeichnung bisher verbundenen Sinne, d. h. sie wird von den Bahnen der Wassertheilchen im Allgemeinen nicht unter rechten, sondern unter solchen Winkeln geschnitten, welche in Folge des seitlichen Zuflusses zur Mündung nach deren Rande hin immer spitzer werden. Mit dieser schrägen Richtung nimmt auch zugleich die Krümmung der Bahnen nach dem Rande der Mündung zu, die Pressung in der Mündung somit ab bis zu derjenigen Pressung $= p$, die in dem die Mündung um- gebenden äusseren Raume an dieser Stelle herrscht. Die Folge dieser Um- stände ist im Allgemeinen eine Querschnittsverkleinerung, eine **Contrac- tion des Wasserstrahls** nach dem Austritt aus der Mündung; erst in einer gewissen, mit den Dimensionen der Mündung vergleichbaren kleinen Entfernung von derselben sind die Bahnen mit genügender Annäherung als parallele gerade Linien zu betrachten. In dem entsprechenden **kleinsten Querschnitt des contrahirten Strahls** $= F$, der somit eine ebene Fläche ist, und dessen Verhältniss zur Mündung

$$\frac{F}{A} = \alpha$$

der **Contractionscoefficient** genannt wird, kann die mittlere Pressung $=$ dem äusseren Druck p gesetzt werden. Die mittlere Geschwindigkeit $= u$ in diesem Querschnitt F soll als die **Ausflussgeschwindigkeit** verstanden werden, die nach den Formeln des vorigen §. zu berechnen ist, wenn gegeben sind: der äussere Druck $= p_0$ an der freien Oberfläche im Gefäss und $= p$ an der Mündung, die unveränderliche Lage jener freien Wasseroberfläche gegen das Gefäss und ihre Grösse $= F_0$, wodurch auch die Oberflächengeschwindigkeit $u_0 = \frac{F}{F_0} u$ des Wassers im Verhältniss zur Ausflussgeschwindigkeit bestimmt ist, endlich event. die Art der eigenen Bewegung des Gefässes. Schliesslich ist dann die **Ausflussmenge**, worunter hier immer das pro Sec. ausfliessende Wasservolumen verstanden wird,

$$V = Fu = \alpha A u = \alpha\varphi A \sqrt{u_0^2 + 2gH}.$$

Das Product des Ausfluss- und des Geschwindigkeitscoefficienten pflegt der **Ausflusscoefficient** genannt zu werden; wird derselbe

$$\alpha\varphi = \mu$$

gesetzt, so folgt aus obiger Gleichung mit $u_0 = \frac{V}{F_0}$

$$V^2 \left[\frac{1}{(\mu A)^2} - \frac{1}{F_0^2}\right] = 2gH,$$

also
$$V = \mu A \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\mu A}{F_0}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und
$$u = \frac{V}{\alpha A} = \varphi \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{\mu A}{F_0}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (2).*$$

---

* Wäre $A = F_0$, entsprechend dem Grenzfalle einer verticalen cylindrischen Röhre, in der das Wasser mit permanenter Bewegung abwärts fliesst, so wäre $\alpha = 1$ und $\mu = \varphi$, also

$$u = \varphi \sqrt{\frac{2gH}{1 - \varphi^2}} = \sqrt{\frac{2gH}{\frac{1}{\varphi^2} - 1}} = \sqrt{\frac{2gH}{\zeta}}.$$

In diesem Falle wäre nur in Folge der Bewegungswiderstände die Erhaltung des continuirlichen Zusammenhanges bei vollständiger Ausfüllung aller Quer-

In der Regel ist $\frac{A}{F_0}$ hinlänglich klein, um einfacher

$$u = \varphi\sqrt{2gH} \quad \text{und} \quad V = \mu A\sqrt{2gH} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

setzen zu dürfen; der dadurch begangene Fehler beträgt weniger, als $\frac{1}{2}\left(\frac{A}{F_0}\right)^2$ des wahren Werthes von u resp. V, also schon dann weniger, als $^1/_2$ Procent (entsprechend der Genauigkeit, mit der höchstens etwa die Coefficienten φ und μ für die verschiedenen Fälle bekannt sind), wenn nur $A < 0{,}1\,F_0$ ist.

Was die wirksame Druckhöhe H betrifft, die nach Gl. (4) im vorigen §. u. A. von der eigenen Bewegung des Gefässes abhängt, so soll, sofern das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt wird, im Folgenden stets vorausgesetzt sein, dass sich das Gefäss in Ruhe oder in geradlinig gleichförmiger Translationsbewegung befindet, die freie Oberfläche des Wassers im Gefäss folglich eine horizontale Ebene bildet. Ist dann h die Höhe derselben über dem Schwerpunkte von F, so ist

$$H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Ist das Gefäss ringsum von der freien atmosphärischen Luft umgeben, deren specif. Gewicht am Ort des Gefässes $= \lambda$ sei, so ist $p_0 - p = -h\lambda$, also $H = h\left(1 - \frac{\lambda}{\gamma}\right)$ so wenig $< h$, dass ohne in Betracht kommenden Fehler

$$u = \varphi\sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad V = \mu A\sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

gesetzt werden kann. Von solchen Fällen, in welchen p_0 und p wesentlich verschieden sind, ist namentlich der Ausfluss unter Wasser, d. h. der Fall bemerkenswerth, in welchem das Wasser aus einem in ein anderes Gefäss fliesst, in dem die horizontale freie Oberfläche gleichfalls eine constante Höhe $h_1 < h$ über dem Schwerpunkte von F hat. Ist dann der äussere Druck an beiden Wasseroberflächen fast gleich, z. B. beiderseits der Atmosphärendruck, so ist $\frac{p_0 - p}{\gamma} = -h_1$, also $H = h - h_1$ und es gelten dieselben Gleichungen (5), falls nur jetzt unter h die Höhendifferenz der Wasseroberflächen in beiden Gefässen verstanden wird. —

---

schnitte möglich, so dass es durchaus sachgemäss ist, wenn sich mit ζ — [illegible] der unmögliche Werth $u = \infty$ ergiebt, durch welchen eine oberflächliche Beurtheilung sich mehrfach berechtigt hielt, die principielle Zulässigkeit [illegible] schon von Daniel Bernoulli aufgestellten Formel (2) in Zweifel zu ziehen.

Sofern die Lage des kleinsten Querschnitts F des contrahirten Strahls gegen die Mündung A in irgend einem gegebenen Falle nicht genau bekannt ist, pflegt man zur Vermeidung der dadurch bedingten Unsicherheit bei der Benutzung vorstehender Gleichungen für h die Höhe der freien Wasseroberfläche über dem Schwerpunkte der Mündung A (statt über dem Schwerpunkte von F) zu setzen; die Coefficienten φ und μ, die dann dieser Bedeutung von h gemäss bestimmt werden müssen, erhalten dadurch auch eine entsprechend modificirte Bedeutung um so mehr, je weniger die Mündungsebene gegen den Horizont geneigt ist und je weniger klein die Dimensionen von A im Vergleich mit H sind.

Wenn die Mündungsebene nicht horizontal und die Höhe der Verticalprojection von A nicht viel $< H$ ist, so können die Formeln auch deshalb einer Correction bedürfen, weil dann die Geschwindigkeiten in verschiedenen Horizontallinien von A zu sehr verschieden sind, als dass mit genügender Annäherung die mittlere Geschwindigkeit u derjenigen im Schwerpunkte gleich gesetzt werden könnte. Wird dann die Mündung durch horizontale Linien in unendlich schmale Flächenstreifen zerlegt, und ist für einen solchen

x die Entfernung von der durch den Schwerpunkt von A gehenden Horizontallinie (positiv oder negativ, jenachdem er tiefer oder höher liegt, als der Schwerpunkt),

y die Länge, also die horizontal gemessene Breite von A,

z die wirksame Druckhöhe, d. h. die um $\dfrac{p_0 - p}{\gamma}$ vermehrte Tiefe unter der freien Wasseroberfläche,

so ist der Inhalt des Streifens

$$dA = y\,dx = y\,\frac{dz}{\sin\varphi},$$

falls φ den Winkel bedeutet, unter dem die Mündungsebene gegen den Horizont geneigt ist. Sind dann ferner H, H_1 und H_2 die Werthe von z für den Schwerpunkt, für den tiefsten und für den höchsten Punkt von A, so ist für die Gleichungen (3) zu setzen:

$$V = \mu \int_{H_2}^{H_1} dA \sqrt{2gz} = \frac{\mu\sqrt{2g}}{\sin\varphi}\int_{H_2}^{H_1} y\sqrt{z}\,dz; \qquad u = \frac{V}{\alpha A} \quad \ldots (6).$$

Ist z. B. A ein Rechteck mit zwei horizontalen Seiten $= b$, so ergiebt sich:

$$V = \frac{2}{3}\frac{\mu b\sqrt{2g}}{\sin\varphi}\left(H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}\right); \quad u = \frac{2}{3}\varphi\sqrt{2g}\,\frac{H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}}{H_1 - H_2} \ldots (7).$$

Näherungsweise ist allgemein wegen $z = H + x \sin\psi$

$$\sqrt{z} = \sqrt{H}\sqrt{1 + \frac{x}{H}\sin\psi} = \sqrt{H}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{H}\sin\psi - \frac{1}{8}\frac{x^2}{H^2}\sin^2\psi\right),$$

$$V = \mu\sqrt{2gH}\int dA\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{H}\sin\psi - \frac{1}{8}\frac{x^2}{H^2}\sin^2\psi\right),$$

also wegen $\int x\,dA = 0$, und wenn das Trägheitsmoment von A in Beziehung auf die horizontale Schwerpunktsaxe

$$\int x^2 dA = Ak^2$$

gesetzt wird,

$$\left.\begin{aligned} V &= \mu A\sqrt{2gH}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{k^2}{H^2}\sin^2\psi\right) \\ u &= \varphi\sqrt{2gH}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{k^2}{H^2}\sin^2\psi\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Hat die Mündung eine horizontale Symmetrieaxe, so ist durch diese Formeln, also durch den Correctionsfactor

$$1 - f = 1 - \frac{1}{8}\frac{k^2}{H^2}\sin^2\psi$$

auch noch das 4te Glied der Reihenentwickelung berücksichtigt, weil in diesem Falle $\int x^3 dA = 0$ ist.

Es ist z. B. für eine rechteckige Mündung mit den Seiten a und b, von denen letztere horizontal sind,

$$Ak^2 = \frac{a^3 b}{12} = A\frac{a^2}{12}, \text{ also } k^2 = \frac{a^2}{12}$$

und für eine elliptische Mündung mit den Hauptaxen a und b, von denen letztere horizontal ist,

$$Ak^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3\frac{b}{2} = A\frac{a^2}{16}, \text{ also } k^2 = \frac{a^2}{16};$$

somit

$$f = \frac{1}{96}\left(\frac{a\sin\psi}{H}\right)^2 \text{ resp. } \frac{1}{128}\left(\frac{a\sin\psi}{H}\right)^2.$$

Der Correctionsfactor $= 1 - f$ ist also in diesen Fällen um weniger als 0,005 von 1 verschieden, wenn die Höhe der Mündung

$$= a\sin\psi < 0{,}7\,H \text{ resp. } < 0{,}8\,H$$

ist. Uebrigens pflegt selbst in den seltenen Fällen, in welchen die Mündungshöhe verhältnissmässig grösser ist, die Rechnung nach den einfachen Formeln (3) vorgezogen zu werden, so dass dann der Einfluss des in R[illegible]

stehenden Correctionsfactors in den für verschiedene Umstände entsprechend zu bestimmenden Coefficienten φ und μ enthalten ist, weil sich zeigt, dass auch in den Formeln (8) diese Coefficienten noch abhängig von den Dimensionen der Mündung und von der Druckhöhe bleiben und somit doch für verschiedene Umstände besonders durch Versuche bestimmt werden müssen.

§. 80. Reaction des ausfliessenden Wassers; Maximum der Contraction.

In einer Verticalebene, welche der Ausflussgeschwindigkeit u parallel ist, mögen die Coordinatenaxen der x und y in fester Lage gegen das Ausflussgefäss so angenommen werden, dass die x-Axe vertical abwärts gerichtet, die y-Axe horizontal ist und mit u einen spitzen Winkel bildet. Ist dann

ψ der spitze oder stumpfe Richtungswinkel von u gegen die x-Axe,

u_0 die vertical abwärts gerichtete mittlere Geschwindigkeit an der horizontalen freien Oberfläche,

V das pro Sec. ausfliessende Wasservolumen,

so ist der Zuwachs an Bewegungsgrösse, welchen die im Gefäss momentan enthaltene Wassermasse (dieselbe gerechnet bis zum kleinsten Querschnitt F des contrahirten Strahls) beziehungsweise im Sinne der x-Axe und der y-Axe im Zeitelement dt erfährt,

$$= \frac{\gamma V}{g}(u \cos\psi - u_0)dt \quad \text{und} \quad = \frac{\gamma V}{g} u \sin\psi\, dt.$$

Indem dieser Zuwachs nach dem Princip des Antriebs oder des Impulses beziehungsweise $= Xdt$ und $= Ydt$ sein muss, unter X und Y die im Sinne der betreffenden Coordinatenaxen genommenen Componentensummen der auf jene Wassermasse wirkenden äusseren Kräfte verstanden, hat man

$$X = \frac{\gamma V}{g}(u \cos\psi - u_0); \qquad Y = \frac{\gamma V}{g} u \sin\psi \;\ldots\ldots (1).$$

Um den Betrag dieser Kräfte wird der Druck des Wassers auf das Gefäss, der im Ruhezustande bei geschlossener Mündung im Sinne der x-Axe = seinem Gewicht, im Sinne der y-Axe = Null ist, durch den Ausfluss vermindert; oder mit ebenso grossen Kräften wirkt das Wasser durch seinen Ausfluss im entgegengesetzten Sinne auf das Gefäss, d. h. es sind X und Y nach Gl. (1) die sogenannte Vertical- und Horizontalreaction des ausfliessenden Wassers im Sinne der negativen Axen der x und der y.

Von u_0 kann in der Regel ohne in Betracht kommenden Fehler ab-strahirt werden, und es ist dann die Resultante von X und Y, und zwar allgemein auch bei nicht horizontaler Oberfläche des Wassers in einem be-wegten Gefäss

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{\gamma V}{g} u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

d. h. die Reaction = der Bewegungsgrösse des pro Sec. ausflies-senden Wassers und entgegengesetzt der Ausflussgeschwindig-keit gerichtet. Mit $V = Fu$ erhält man auch

$$R = 2\gamma F \frac{u^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

= dem doppelten Gewicht einer Wassersäule, deren Basis = dem kleinsten Querschnitt des contrahirten Strahls und deren Höhe = der Ausflussgeschwindigkeitshöhe ist; oder endlich mit $F = \alpha A$ und $u = \varphi\sqrt{2gH}$

$$R = 2\alpha\varphi^2\gamma AH = 2\mu\varphi\gamma AH \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Das bewegte Wasser wirkt übrigens in zweifacher Weise auf die Ge-fässwand: theils durch normalen Druck, theils in tangentialem Sinne durch Reibung; jene Kraft R, welche das ausfliessende Wasser entgegen-[gesetzt] dem Sinne von u auf das Gefäss ausübt, ist der Ueberschuss des im glei-[chen] Sinne genommenen Normaldrucks = P über die im Sinne von u ge[nom]-mene äussere Reibung = R'. Um die Grösse $P = R + R'$ ist der im Sinne der Ausflussgeschwindigkeit u genommene oder (sofern die El[emente] A und F einander parallel vorausgesetzt werden können) der zur Münd[ungs]-ebene senkrecht nach aussen genommene Normaldruck, welcher an der Oberfläche des im Gefäss enthaltenen Wassers an der Stelle der Mün[dung] und in ihrer Umgebung stattfindet, im Zustande der Bewegung (beim Aus-fluss des Wassers) kleiner, als im Zustande der Ruhe (bei geschlossener Mündung), und dieser Umstand kann in Verbindung mit Gl. (4) dazu dienen, einen bemerkenswerthen Grenzwerth des Contractionscoefficienten festzustellen.

Es ist nämlich im Zustande der Ruhe der Druck auf den der geschlos-senen Mündung entsprechenden Theil A der Oberfläche = $A\gamma h$ – . Im Zustande der Ausflussbewegung, wobei die Wassermasse im Gefäss [bis] zum kleinsten Querschnitt F des contrahirten Strahls gerechnet wird, tr[itt] an die Stelle jenes ebenen Theils A der Oberfläche die ebene Fläche F nebst der krummen Fläche, die den Umfang von F mit dem Umfang von A verbindet (bei Fig. 30, A mit ab, ab im Durchschnitt bezeichnet)

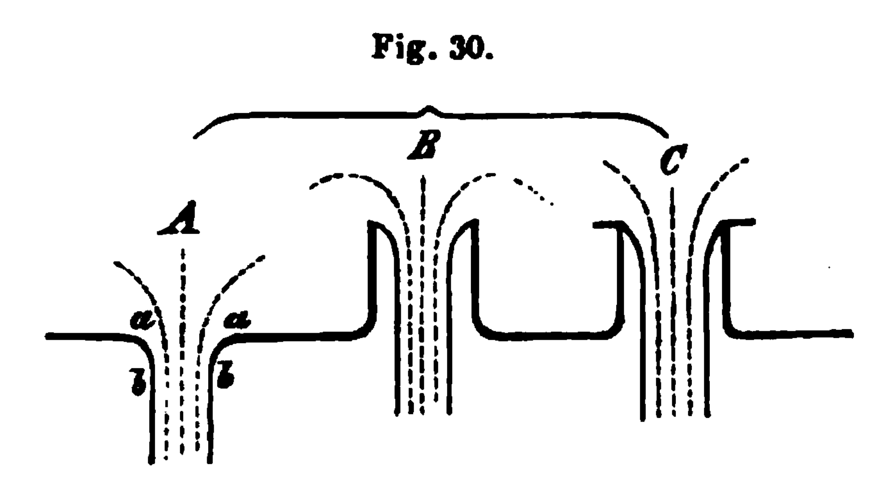


Fig. 30.

da in dieser ganzen Fläche *abba* der specifische Druck $= p$ ist, so ist der Gesammtdruck normal zu $A = Ap$ gemäss dem Gesetz unter 3) auf S. 303. An dem der Mündung A entsprechenden Theil der Oberfläche ist also der hydraulische Druck normal zu A um

$$A(\gamma h + p_0) - Ap = \gamma A\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right) = \gamma AH$$

kleiner, als der hydrostatische. Indem aber das Wasser zum Theil längs ler Gefässwand hin der Mündung zufliesst mit einer Geschwindigkeit, welche wenigstens nahe am Rande der Mündung eine merkliche Grösse ist, wird dadurch auch an diesem die Mündung rings umgebenden Theil ler Gefässwand der hydraulische Druck merklich kleiner, als der hydrostatische; ob und in welchem Grade hierdurch der im Sinne von u genommene Normaldruck noch weiter verkleinert und somit der im entgegengesetzten Sinne genommene resultirende Normaldruck auf die Gefässwand:

$$P = R + R' > \gamma AH \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

wird, hängt von der Gestalt des die Mündung umgebenden Theils der Gefässwand ab. Wenn die Normalen der Oberfläche daselbst nur wenig gegen ie Normale von A geneigt oder gar derselben parallel sind, wie im Falle A, Fig. 30, so muss P wesentlich $> \gamma AH$ sein, wogegen im Falle B, Fig. 30, d. h. im Falle eines in das Innere des Gefässes hineinragenden, ylindrisch auslaufenden Mundstücks sich P um so mehr der Grenze γAH ähern wird, je kleiner die Wanddicke des Mundstücks ist; wäre diese Wanddicke grösser oder, was im Erfolg einerlei ist, das innere Mundstück n der Mündung mit einem rechtwinklig umgebogenen Rande versehen (Fig. 30, C), so würden sich die Verhältnisse denen des Falles A wieder ähern, um so mehr, je breiter der Rand ist. Immer aber ist P mindestens $= \gamma AH$, sofern nur die auswärts gerichteten Normalen des die Mündung mgebenden Theils der Oberfläche, an welchem die Geschwindigkeit von erklicher Grösse ist, unter spitzen oder höchstens rechten Winkeln gegen ie Richtung von u geneigt sind.

Was die Grösse R' betrifft, so kann man bemerken, dass nach Gl. (4) it $\varphi = 1$, d. h. ohne den Einfluss der Widerstände, die Reaction $= \gamma AH$ sein würde. Wird sie mit R_0 bezeichnet, so ist der Ueberschuss $_0 - R$ der gesammte Bewegungswiderstand nach der zur Mündungsebene ormalen Richtung, und wenn derselbe $= R'$ gesetzt wird, so folgt

28*

$$R + R' = 2\alpha\gamma AH \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Aus (5) und (6) folgt

$$\alpha > \frac{1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Der Grenzwerth $\alpha = \frac{1}{2}$ entspricht dem Falle einer inneren cylindrischen Ansatzröhre von verschwindend kleiner Wanddicke und von solcher Länge, dass an der Stelle, wo sie in den nicht cylindrischen Theil der Gefässwand übergeht, die Geschwindigkeit des der Mündung zufliessenden Wassers noch verschwindend klein ist; andererseits darf übrigens die Län.. der Röhre, wenn diese horizontal oder gegen die Verticale geneigt ist, eine gewisse Grenze nicht überschreiten, damit der Strahl nach dem Austritt aus der Mündung nicht mit der äusseren Gefässwand (der inneren Rohrwand) in Berührung komme, wie hier stillschweigend vorausgesetzt wurde. Auch ist das dem Grenzwerth $\alpha = \frac{1}{2}$ entsprechende **Maximum der Contraction** an die Voraussetzung gebunden, dass die auswärts gerichteten Normalen des die Mündung umgebenden Theils der Oberfläche nicht stumpfe Winkel mit der Richtung von u bilden, wie es bei einer gegen die Mündung hin sich conisch erweiternden inneren Ansatzröhre der Fall wäre; die durch die Geschwindigkeit bedingte Verminderung des hydraulisch.. Normaldrucks an dieser Stelle würde dann auch eine Verminderung des entgegengesetzt dem Sinne von u genommenen Normaldrucks auf das Gefäss zur Folge haben, so dass an die Stelle von (5) die Ungleichheit

$$P = R + R' < \gamma AH$$

treten würde. Abgesehen davon indessen, dass sich in solchem Falle .. Bewegung des der Mündung seitlich zufliessenden Wassers nur in sehr .. bedeutendem Grade bis zur Rohrwand erstrecken würde, dürfte auch .. Röhre nur sehr wenig conisch divergent sein, um es zu verhindern, da.. der Wasserstrahl mit der inneren Rohrwand in Berührung kommt .. event. die Röhre ausfüllt, dieselbe so aus einer inneren divergenten .. wissermassen in eine äussere convergente Ansatzröhre verwandelnd, d.. kleinster Querschnitt nunmehr die Mündung A wäre. Es ergiebt sich .. (in Uebereinstimmung mit der Erfahrung), dass der **Contractionscoefficient, wenn überhaupt, jedenfalls nur sehr wenig** $< \frac{1}{2}$ .. **kann, dass er aber jedenfalls** $> \frac{1}{2}$ **ist, wenn der Normaldr.. des Wassers auf die Gefässwand rings um die Mündung .. überhaupt überall da, wo die Oberflächengeschwindigkeit ..**

Wassers von merklicher Grösse ist, spitze Winkel mit der Ausflussgeschwindigkeit bildet. —

Zur vollständigen Bestimmung des Reactionsdrucks R würde ausser seiner Grösse und Richtung auch die Lage seiner Richtungslinie gegen das Gefäss gehören. In dieser Beziehung ist einleuchtend, dass zwar die Richtungslinie desjenigen Bestandtheils $= \gamma A H$ von P, welcher dem Unterschied des hydraulischen und des hydrostatischen Drucks auf die Mündung A selbst entspricht, mit der Normalen im Schwerpunkte derselben zusammenfällt mit derselben Annäherung, mit welcher diese auch den Querschnitt F in seinem Schwerpunkte S normal schneidet und die wirksame Druckhöhe H des Punktes S der mittleren des Querschnitts F gleich gesetzt wird, dass aber dasselbe vom anderen Bestandtheil von P, sowie von R', also auch vom resultirenden Reactionsdruck $R = P - R'$ im Allgemeinen nur dann ohne Weiteres behauptet werden kann, wenn der seitliche Zufluss des Wassers zur Mündung ringsum in gleicher Weise stattfindet. Anderenfalls ist wegen mangelnder Kenntniss des Gesetzes, nach welchem die Geschwindigkeiten und die davon abhängigen Reibungen an der Gefässwand vertheilt sind, eine genauere Bestimmung der Richtungslinie von R überhaupt nur durch den Versuch zu erlangen.

Bei solchen Versuchen von P. Ewart* wurde das Ausflussgefäss vermittels eines festen Gehänges an einer horizontalen, rechtwinkelig und windschief gegen die gleichfalls horizontale Ausflussgeschwindigkeit gerichteten Axe aufgehängt und vermittels einer Winkelhebelwage der Druck bestimmt, welcher in der Richtungslinie von u (in einer die Mündung A in deren Schwerpunkt rechtwinkelig schneidenden Geraden) auf das Gefäss wirken musste, um es in derselben Lage wie bei geschlossener Mündung und bei gleicher Wasserfüllung zu erhalten. Wird der so gemessene Druck als Reactionsdruck R betrachtet, so ergeben sich aus Gl. (4) solche Werthe von $\alpha\varphi^2 = \mu\varphi$, welche mit anderweitigen Bestimmungen dieser Coefficienten nahe übereinstimmen,** woraus zu schliessen, dass auch die Richtungslinie von R mit derjenigen des gemessenen Drucks bei jenen Versuchen nahe zusammenfiel. Wenn dergl. Versuche so eingerichtet werden, dass diese Coincidenz a priori angenommen werden darf, so können sie zur Bestimmung eines der Coefficienten α, φ dienen, wenn der andere bekannt ist.

---

* Memoirs of the Manchester Philosophical Society, Vol. II.

** Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, Bd. I (4te Aufl.), S. 970.

§. 81. Ausfluss aus bewegten Gefässen.

Wenn das Ausflussgefäss selbst in Bewegung ist der Art, dass die freie Wasseroberfläche nicht eine horizontale Ebene bildet, so sind die Arbeiten der Kräfte, welche die Bewegungen der von verschiedenen Stellen der Oberfläche aus gegen die Mündung hin fliessenden Wassertheilchen bestimmen, einzeln zu sehr verschieden, als dass bei der Berechnung der mittleren Ausflussgeschwindigkeit ohne Weiteres eine gewisse mittlere Bewegung zu Grunde gelegt werden könnte. Wenn man dann die allgemeine Gleichung (7) in §. 73 auf alle Bahnen anwendet, welche sich von der freien Oberfläche F_0 bis zum kleinsten Querschnitt F des contrahirten Strahls erstrecken, so dass sich mit $\gamma_0 = \gamma$, also $E = 0$, ferner bei Abstraction von der Oberflächengeschwindigkeit u_0 und vorläufig auch von den Bewegungswiderständen

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p - p_0}{\gamma} = M \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

ergiebt, wo p und p_0 dieselben Bedeutungen haben, wie in §. 79, so kann es von vorn herein fraglich erscheinen, ob sich für die Arbeitssumme M der Massenkräfte pro 1 Kgr. und somit für u stets derselbe Werth ergiebt, wo immer der Anfangspunkt A_0 einer solchen Bahn in der Oberfläche F_0 liegen mag, wenn auch die Endpunkte aller Bahnen (mit demselben Rechte wie in §. 79) im Schwerpunkte S von F angenommen werden.

1) Die Bewegung des Gefässes bestehe in einer Rotation mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine verticale Axe und in einer Translationsbewegung mit constanter verticaler Beschleunigung f (positiv, wenn abwärts gerichtet). Nach §. 73, Gl. (9) ist dann

$$M = \left(1 - \frac{f}{g}\right) h + \frac{\omega^2}{2g} (r^2 - r_0^2),$$

unter r_0 und r die Entfernungen der Punkte A_0 und S von der Rotationsaxe und unter h die Höhe von A_0 über S verstanden. Ist insbesondere h_0 der Werth von h für denjenigen Punkt A_0, in welchem die freie Oberfläche von der Rotationsaxe geschnitten wird, allgemein aber $h = h_0 + z$, und setzt man

$$H_0 = \left(1 - \frac{f}{g}\right) h_0 + \frac{p_0 - p}{\gamma} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

so liefert die Substitution des Ausdrucks von M in Gl. (1)

$$\frac{u^2 - (r\omega)^2}{2g} = H_0 + \frac{\omega^2}{2g}\left(2\frac{g-f}{\omega^2}z - r_0^2\right).$$

Mit derselben Annäherung aber, mit welcher in Gl. (1) von der Geschwindigkeit u_0 an der freien Oberfläche abstrahirt wurde, hat diese nach §. 55, Gl. (3) die Gestalt eines Umdrehungsparaboloids mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r_0^2 = 2\frac{g-f}{\omega^2}z$$

für die Rotationsaxe als z-Axe und den Scheitelpunkt als Ursprung. Somit fallen aus der Gleichung für u die von der Lage des Punktes A_0 in der Oberfläche F_0 abhängigen Glieder fort, und es ergiebt sich, wenn die einstweilen vernachlässigten Widerstände schliesslich durch einen Geschwindigkeitscoefficienten φ berücksichtigt werden,

$$u = \varphi\sqrt{2gH_0 + (r\omega)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ist insbesondere $p_0 = p$, so folgt

$$u = \varphi\sqrt{2(g-f)h_0 + (r\omega)^2};$$

fiele das Gefäss ohne Rotation durch seine eigene Schwere frei herab, so wäre $\omega = 0$ und $f = g$, also $u = 0$.

2) Hat das Gefäss nur Translationsbewegung, so kann die constante Beschleunigung derselben, deren Absolutwerth jetzt mit f bezeichnet sei, unbeschadet der Permanenz der Bewegung eine beliebige constante Richtung haben, so dass (bei Abstraction von u_0) die freie Oberfläche nach §. 55 eine gegen den Horizont geneigte Ebene bildet. Wird dann der Schwerpunkt S des kleinsten Querschnitts F des contrahirten Strahls als Ursprung eines rechtwinkeligen Axensystems der x, y, z angenommen, die z-Axe vertical und positiv nach oben, die x-Axe so, dass f mit der xz-Ebene parallel ist und mit der x-Axe den Winkel ψ (positiv im Sinne gegen die z-Axe hin) bildet, so ist für eine Bahn, die sich von dem beliebigen Punkte A_0 (x, y, z) der freien Oberfläche bis zum Punkte S erstreckt, nach §. 73, Gl. (10)

$$M = z - \frac{f}{g}s',$$

unter s' die Projection von A_0S auf die Richtung von f oder unter $-s'$ die Projection von SA_0 auf die Richtung von f verstanden, also

$$M = z + \frac{f}{g}(x\cos\psi + z\sin\psi).$$

Nach §. 55, Gl. (5) ist aber die Gleichung der freien Oberfläche, wenn sie die z-Axe in der Höhe h_0 über S schneidet,

$$z = -\frac{f\cos\psi}{g + f\sin\psi}\, x + h_0.$$

Daraus folgt

$$f(x\cos\psi + z\sin\psi) = (g + f\sin\psi)h_0 - gz,$$

also

$$M = \left(1 + \frac{f}{g}\sin\psi\right) h_0$$

und nach Gl. (1) mit

$$H_0 = \left(1 + \frac{f}{g}\sin\psi\right) h_0 + \frac{p_0 - p}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4$$

bei nachträglicher Berücksichtigung der Bewegungswiderstände durch d[illegible] Coefficienten φ:

$$u = \varphi\sqrt{2gH_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,$$

also wieder unabhängig vom Ausgangspunkt A_0 eines Wassertheilchens [illegible] der freien Oberfläche.

Die **Ausflussmenge** pro Sec. ist schliesslich in allen Fällen:

$$V = Fu = \alpha A u.$$

§. 82. Bestimmung der Erfahrungscoefficienten.

Die in den Formeln der letzten Paragraphen vorkommenden, dur[illegible] Versuche zu bestimmenden Coefficienten, der Contractionscoefficient α, d[illegible] Geschwindigkeitscoefficient φ, der Ausflusscoefficient μ und der Wid[illegible]standscoefficient ζ, stehen in zwei allgemeinen Beziehungen zu einander

$$\mu = \alpha\varphi \quad \text{und} \quad \varphi^2(1 + \zeta) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1$$

so dass durch zwei dieser Coefficienten, und zwar durch einen der Coeffi[illegible]cienten α, μ in Verbindung mit einem der Coefficienten φ, ζ, auch d[illegible] beiden anderen bestimmt sind. Wenn diese Versuche unter solchen U[illegible]ständen angestellt werden, dass das fest stehende Ausflussgefäss rin[illegible] von der atmosphärischen Luft umgeben und die horizontale freie Wa[illegible]oberfläche gross im Vergleich mit der Mündung A ist, und wenn somit d[illegible] Coefficienten φ und μ den Formeln (§. 79, Gl. 5)

$$u = \varphi\sqrt{2gh} \quad \text{und} \quad V = \mu A\sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots (2$$

entsprechend verstanden werden, unter h im Falle des **Ausflusses** in d[illegible] **freie Luft** die Höhe der freien Wasseroberfläche über dem Schwerp[illegible] von A, im Falle des **Ausflusses unter Wasser** den Höhenunter[illegible]

les Ober- und Unterwasserspiegels (der freien Oberflächen des Wassers m Ausfluss- und Einflussgefäss) verstanden, so ist zwar der in diesen Coëfficienten φ und μ enthaltene Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit u_0 und er Verschiedenheit des Luftdrucks in verschiedenen Höhen ganz unwesentlich; dagegen können sie nach §. 79 im Falle des Ausflusses in die reie Luft u. U. merklich beeinflusst werden durch den Umstand, dass der chwerpunkt von A nicht in gleicher Höhe mit dem Schwerpunkt S des leinsten Querschnitts F des contrahirten Strahls liegt und dass auch die ittlere Geschwindigkeit in F, als welche u principiell verstanden wird, it der Geschwindigkeit im Punkte S nicht identisch ist. Beim Ausfluss ater Wasser fallen diese Einflüsse fort, weil der Unterschied der Höhen s Ober- und Unterwasserspiegels über jedem Punkt von A oder F gleich ross $= h$ ist.

Der Ausflusscoefficient μ ist am einfachsten und zuverlässigsten i bestimmen durch Messung der Ausflussmenge V (vermittels cubicirter efässe, die das ausfliessende Wasser aufnehmen) und Vergleichung derlben mit der betreffenden Formel (2).

Der Contractionscoefficient α wird durch Strahlenmessungen efunden, wie solche u. A. namentlich von Bossut, Borda, Hachette, oncelet und Lesbros, und von Weisbach ausgeführt wurden (verittels zugespitzter Schrauben, die an verschiedenen Stellen ringsum gegen e Oberfläche des Strahls allmählig bis zur Berührung vorgeschraubt erden). Solche Messungen werden, wenn die Mündung nicht kreisförmig t, durch den Umstand erschwert, dass die Querschnittsänderung des Strahls esentlich auch in einer Gestaltsänderung besteht, die oft sehr eigenthümcher und complicirter Art ist, deren Hauptcharakter in einer periodisch iederholten, wenigstens theilweisen Umkehrung der Lage besteht der Art, ss an die Stelle der stärksten Krümmung des Umfangs die der schwächsten rümmung zu liegen kommt und umgekehrt. Ein länglicher Querschnitt ht in einiger Entfernung in einen anderen länglichen Querschnitt über, ssen Längenrichtung senkrecht zur früheren gerichtet ist; die Ecken nes polygonalen Querschnitts werden durch bogenförmige Seiten abgeumpft, welche allmählig so anwachsen, dass ein neuer polygonaler Querhnitt entsteht, dessen Ecken den Mitten der Seiten des früheren Querhnitts entsprechen u. s. w. Diesen periodischen Gestaltsänderungen des uerschnitts entsprechend besteht auch die Grössenänderung desselben cht nur in einer einmaligen Contraction; in geringerem und abnehmendem rade folgen derselben Anschwellungen und abermalige Contractionen bis r Strahl mehr und mehr zerrissen wird und sich in einzelne Tropfen

auflöst; nach Sawart dauert auch in ihnen die periodische Deformation noch fort, indem sie abwechselungsweise verlängerte und abgeplattete Sphäroide darstellen. Die gemeinschaftliche strömende Bewegung der Wassertheilchen wird also offenbar von transversalen Schwingungen begleitet, welche ausser von dem seitlichen Zufluss zur Mündung und von der dadurch bedingten Ungleichförmigkeit der Pressung in den Querschnitten ohne Zweifel auch wesentlich von den Molekularkräften, nämlich vom Cohäsionsdruck an der Oberfläche mit abhängen, der nach §. 59, Gl. (4) mit deren Krümmung sich ändert und dort als einwärts gerichtete Kraft den grössten Werth hat, wo die Oberfläche am stärksten nach aussen convex gekrümmt ist.

Der Geschwindigkeitscoefficient φ kann durch Vergleichung des beobachteten Werthes von u mit der betreffenden Formel (2) gefunden werden. Zur mittelbaren Bestimmung von u in einem gegebenen Falle dient dabei die Messung der Coordinaten eines Punktes der parabolischen Mittellinie des frei ausfliessenden Strahls, wenn der Richtungswinkel ψ von u gegen den Horizont (positiv, wenn u schräg abwärts gerichtet) bekannt ist, oder besser zweier Punkte, um den anderweitig kaum genau messbaren Richtungswinkel ψ auf solche Weise mit zu bestimmen. Wenn nämlich vom Schwerpunkt des kleinsten Querschnitts, also von dem Punkt aus, in welchem die Geschwindigkeit $= u$ ist, die Coordinatenaxen der x und y so gezogen werden, dass die x-Axe die Richtung der Horizontalcomponente $= u \cos\psi$ der Ausflussgeschwindigkeit hat und die y-Axe vertical abwärts gerichtet ist, so ist die Gleichung der Mittellinie des Strahls abgesehen von dem auf mässige Entfernung unmerklichen Einfluss des Luftwiderstandes)

$$y = x\,tg\,\psi + \frac{g x^2}{2u^2 \cos^2\psi} \qquad (3)$$

indem $t = \dfrac{x}{u \cos\psi}$ die Zeit ist, in welcher eine Bahnstrecke mit der Horizontalprojection x durchlaufen wird, und y aus zwei Theilen besteht, welche beziehungsweise $= u \sin\psi . t$ und $= \dfrac{gt^2}{2}$, der anfänglichen Verticalgeschwindigkeit und der Schwerewirkung entsprechen. Aus Gl. (3) folgt

$$u = x \sqrt{\frac{g}{2} \frac{1 + tg^2\psi}{y - x\,tg\,\psi}} \qquad (4)$$

Sind nun x_1, y_1 und x_2, y_2 die gemessenen Coordinaten zweier Punkte der Mittellinie des Strahls, so ist nach Gl. (3)

$$\frac{y_1 - x_1\, tg\psi}{y_2 - x_2\, tg\psi} = \frac{x_1^2}{x_2^2},\ \text{also}\ tg\psi = \frac{x_2^2 y_1 - x_1^2 y_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)} \quad \ldots\ldots (5);$$

iermit findet man u nach Gl. (4), wenn darin ausserdem x_1 und y_1 oder x_2 und y_2 für x und y gesetzt werden. Mit $\psi = 0$ ist

$$u = x\sqrt{\frac{g}{2y}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6);$$

och wird es besser sein, den von Null vielleicht etwas abweichenden Verth von ψ nach Gl. (5) zu bestimmen auch wenn die Mündung sich in er verticalen Seitenwand eines Gefässes befindet. Dergl. Messungen lassen brigens nur bei kreisförmigen Strahlquerschnitten eine grössere Genauigeit zu und sind unter solchen Umständen u. A. besonders von Bossut, Venturi, Michelotti, Castel, Boileau und Weisbach zur Bestimmung von u, also von φ, benutzt worden.

Inwiefern endlich auch Messungen des Reactionsdrucks zur Bestimmung der in Rede stehenden Coefficienten dienen können, ist schon in §. 80 erwähnt worden. —

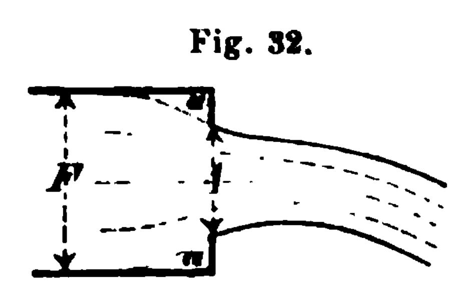
In den folgenden Paragraphen sind die für kreisförmige und rechteckige Mündungen im engeren Sinn (Wandöffnungen) und für kurze Ansatzröhren (Mundstücke) von kreisförmigem Querschnitt gefundenen Werthe der Coefficienten, insbesondere des am häufigsten bestimmten Ausflusscoefficienten μ angegeben. Sie gelten für den Fall, dass der Ausfluss in die freie Luft stattfindet, wenn er nicht ausdrücklich als Ausfluss unter Wasser bezeichnet ist, oder auch im Fall einer rechteckigen Mündung als Ausfluss in ein Ansatzgerinne; darunter wird ein Gerinne verstanden, welches, indem sein Boden und seine verticalen Seitenwände sich an den unteren Rand und an die Seitenränder der Mündung anschliessen, das freie Niederfallen des ausfliessenden Strahls verhindert. Auch ist bei denjenigen Coefficienten, welche für den Ausfluss aus Mündungen im engeren Sinne gelten, sofern das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt wird, immer eine sogenannte Mündung in der dünnen Wand vorausgesetzt, wie solche bei den Versuchen durch Abschrägung der Ränder nach aussen (Fig. 31) hergestellt zu werden pflegt, um das Anlegen des Strahls an die Umfassungsfläche der Wandöffnung zu hindern und somit die Resultate von nebensächlichen Einflüssen möglichst frei zu erhalten.

Fig. 31.

Der Ausflusscoefficient $\mu = \alpha\varphi$ ist beim Ausfluss aus Mündungen vorwiegend vom Factor α abhängig; beim Ausfluss aus Ansatzröhren kann er zwar vorwiegend

von φ abhängen oder gar $\alpha = 1$, also $\mu = \varphi$ sein, allein der Coefficient φ pflegt dann hauptsächlich durch die **innere Contraction** bedingt zu sein, welche der Strahl nach dem Einfluss in die Röhre vorübergehend erfährt bevor er sich bis zum vollen Querschnitt derselben wieder ausbreitet. Mit Rücksicht auf die Umstände, unter welchen die (äussere oder innere) Contraction stattfindet, pflegen deshalb verschiedene Fälle unterschieden zu werden. Offenbar ist die Contraction um so bedeutender (der Contractionscoefficient um so kleiner), je grösser der Winkel ρ ist, um welchen die am Rande der Mündung zufliessenden Wassertheilchen von ihrer Bewegungsrichtung abgelenkt werden müssen, bevor sie den kleinsten Querschnitt des contrahirten Strahls normal durchströmen. Sofern dieser Winkel zwischen den Grenzen 0 und 180° liegen kann, soll der mittlere Fall, dass ringsum $\rho = 90°$ ist (wie bei einer Mündung an einer mittleren Stelle in einer verhältnissmässig grossen ebenen Wand), als **normale Contraction** bezeichnet werden; die Contraction heisse **geschwächt** oder **verstärkt**, jenachdem $\rho < 90°$ oder $\rho > 90°$ ist. Schwächung der Contraction kann insbesondere auch bei Mündungen in ebenen Wänden (resp. Schwächung der inneren Contraction bei Mundstücken, die sich an Oeffnungen in ebenen Wänden anschliessen) dadurch verursacht werden, dass, wenn die Wand nicht sehr gross im Vergleich mit der Oeffnung ist, rings um letztere herum ein gewisser Theil des Wassers an der strömenden Bewegung nicht Theil nimmt, wie bei a,a in Fig. 32, so dass dann an der Grenzfläche zwischen dem strömenden und dem nicht strömenden (ruhenden oder nur wirbelförmig schwach bewegten) Wasser das erstere ähnlich wie durch eine feste Wand mehr oder weniger schräg gegen die Mündung hin geleitet wird. In einem solchen Falle pflegt die geschwächte Contraction auch **unvollkommen** genannt zu werden im Gegensatz zur **vollkommenen** oder normalen Contraction, bei der die ebene Wand sehr gross im Vergleich mit der Oeffnung ist.

Fig. 32.



Bei diesen Begriffsbestimmungen ist ein ringsum gleicher oder wenigstens nur wenig verschiedener Werth des Winkels ρ vorausgesetzt, so dass es sein Mittelwerth für den ganzen Umfang der Mündung resp. des Anfangsquerschnitts des Mundstückes ist, welcher, jenachdem er $< 90°$ oder $= 90°$ oder $> 90°$ ist, den Charakter der Contraction bestimmt. Indessen kann auch ρ für verschiedene Theile des Umfangs so wesentlich verschieden sein, dass dadurch ein verschiedener Charakter der Contraction bedingt wird, dass sie z. B. theilweise normal, theilweise geschwächt oder verstärkt ist, wie bei einer Mündung in der Nähe des Randes einer ebenen Wand

oder wenn die Gefässwand an verschiedenen Theilen des Umfangs unter wesentlich verschiedenen Winkeln gegen die Mündungsebene geneigt ist. Wenn insbesondere der Winkel ϱ für einen Theil des Umfangs = Null ist und somit hier keine Contraction stattfindet (wie z. B. am unteren, im horizontalen Gefässboden liegenden Rande einer rechteckigen Oeffnung in der verticalen ebenen Seitenwand eines Gefässes), so heisst die auf die ganze Mündung bezogene Contraction partiell oder unvollständig. —

Als fast allgemein gültiges Gesetz hat sich ergeben, dass in solchen Fällen, in denen der Ausflusscoefficient vorwiegend durch die (äussere oder innere) Contraction bedingt wird, derselbe um so grösser ist, je kleiner die Mündung A und je kleiner die wirksame Druckhöhe H ist. Bei Mündungen im engeren Sinn ist er, falls sie eine längliche Form haben, grösser, als unter sonst gleichen Umständen (für gleiche Werthe von A und H) bei solchen Mündungen, die sich einer regulären Form, insbesondere der Kreisform nähern; und für den Ausfluss unter Wasser wurde er von Weisbach um etwas über 1 Procent kleiner gefunden, als für den Ausfluss in die freie Luft. Speciellere Abhängigkeitsgesetze der betreffenden Coefficienten für besondere Fälle enthalten die folgenden Paragraphen.

§. 83. Kreisförmige Mündungen.

Der Ausfluss des Wassers aus kreisförmigen Mündungen in der dünnen Wand lässt von vorn herein die einfachste und deutlichste Gesetzmässigkeit der Erscheinungen erwarten, weshalb es auch abgesehen von dem unmittelbaren technischen Interesse dieses Falles gerechtfertigt ist, dass die Versuche sich mit Vorliebe auf ihn bezogen haben, insbesondere auf

1) den Fall der normalen Contraction, d. h. einer Mündung, die sich an einer mittleren Stelle in einer grösseren ebenen Wand befindet. Wiederholt und übereinstimmend ist dabei constatirt worden, dass der Ausflusscoefficient μ um so grösser ist, je kleiner der Durchmesser d der Mündung und die wirksame Druckhöhe H. So fand Weisbach

	für d =	0,01	0,02	0,03	0,04 Mtr.
und H = 0,25 Mtr.	μ =	0,637	0,629	0,622	0,614
H = 0,6 „	μ =	0,628	0,621	0,614	0,607.

Bei anderen Versuchen von Weisbach ergab sich für d = 0,01 Mtr. und

H =	0,020	0,101	0,909	13,57	103,58 Mtr.
μ =	0,711	0,665	0,641	0,632	0,600.

Diese Werthe von μ, welche freilich nach den letzteren Versuch merklich grösser sind, als nach den ersteren für gleiche Werthe von d un H, entsprechen im Mittel ungefähr der empirischen Formel

$$\mu = 0{,}6 + \frac{0{,}06}{0{,}5 + \sqrt{H}} - 0{,}7d \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Mehrfachen Messungen zufolge erlangt der contrahirte Strahl sein kleinsten Querschnitt in der ungefähren Entfernung $= 0{,}5d$ von d Mündungsebene, und ist der Durchmesser dieses kleinsten Querschnitts i Mittel $= 0{,}8d$, also der Contractionscoefficient $\alpha = 0{,}64$.

Der Geschwindigkeitscoefficient wurde für mittlere Mündungsweite und Druckhöhen

$$\varphi = 0{,}97 \quad \text{bis } 0{,}98$$

gefunden, entsprechend $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1 = 0{,}063$ „ $0{,}041$

und mit $\alpha = 0{,}64$: $\mu = 0{,}621$ „ $0{,}627$.

Das Abhängigkeitsgesetz von α ist natürlich mit demjenigen von μ i Wesentlichen identisch; indem aber φ mit der Druckhöhe etwas zu nehmen scheint, muss dann α mit wachsender Druckhöhe noch etwas me abnehmen, als μ. —

2) Geschwächte und verstärkte Contraction. Die Abhängi keit des Contractionsgrades vom Ablenkungswinkel ϱ (§. 82) der am Ran der Mündung zufliessenden Wassertheilchen hat namentlich Weisba näher festgestellt durch die Bestimmung des Coefficienten μ für Kreismü dungen in mehr oder weniger conisch gegen dieselben nach aussen o innen zulaufenden Gefässwänden (Fig. 33); die Uebergangsstellen d ebenen Gefässwand in diese conischen A sätze wurden abgerundet, um etwaige Wid stände durch plötzliche Richtungsänderung des zufliessenden Wassers, bei kleinen W then von ϱ namentlich auch eine etwai innere Contraction zu vermeiden. Die W der Mündung betrug 0,02 Mtr., die Dr höhe 0,3 bis 3 Mtr. Folgende Tabelle, in der R einen rechten W und μ_0 den Werth von μ für $\varrho = R = 90^0$ bedeutet, enthält die dur schnittlichen Versuchsresultate; der Werth von μ_0 ist in guter Ueber stimmung mit Gl. (1), nach welcher $\mu = 0{,}632$ wäre für $d = 0{,}02$ M und $H = 0{,}9$ Mtr.

Fig. 33.

ϱ		μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$	ϱ		μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$
0	0	0,966	1,528	R	90°	0,632	1,000
$^1/_{16}\,R$	$5^3/_4$°	0,949	1,501	$^5/_4\,R$	$112^1/_2$°	0,606	0,959
$^1/_8\,R$	$11^1/_4$°	0,924	1,462	$^3/_2\,R$	135°	0,577	0,913
$^1/_4\,R$	$22^1/_2$°	0,882	1,395	$^7/_4\,R$	$157^1/_2$°	0,546	0,864
$^1/_2\,R$	45°	0,753	1,191	$2R$	180°	0,541	0,856
$^3/_4\,R$	$67^1/_2$°	0,684	1,082				

Im Falle $\varrho = 0$ ist $\alpha = 1$, also $\mu = 0,966 = \varphi$; unter der oraussetzung, dass dieser Geschwindigkeitscoefficient in den verschiedenen ällen gleich ist, wäre der Contractionscoefficient

$$\alpha = \frac{\mu}{0,966}, \text{ insbesondere für } \varrho = 180^0: \quad \alpha = 0,56$$

ı der That nur wenig grösser, als der Minimalwerth $\alpha = 0,5$, welcher ıch der Untersuchung in §. 80 dem Grenzfall einer inneren cylindrischen satzröhre von verschwindend kleiner Wanddicke entspricht. Für den- ben Fall fand Borda: $\mu = 0,515$, Bidone: $\mu = 0,555$; mit Rück- ht auf das bei normaler Contraction constatirte Aenderungsgesetz von μ st sich erwarten, dass die Grenze 0,5 um so mehr erreicht wird, je össer d und H sind.

Der Geschwindigkeitscoefficient wird durch die etwas grössere Rei- ıng des Wassers an der Wand des Ansatzes im Vergleich mit einer ganz enen Gefässwand vermuthlich nur wenig verkleinert, so dass die Werthe n $\mu = \varphi$ für $\varrho \doteq 0$, d. h. im Falle einer cylindrischen und mit all- ähliger Abrundung in die ebene Gefässwand übergehenden äusseren An- ıtzröhre ungefähr auch den Geschwindigkeitscoefficienten für kreisförmige ündungen in der ebenen Wand gleich gesetzt werden können; Weis- ach fand diese Grösse wachsend mit H:

$$\mu = \varphi = 0,96 \quad \text{bis} \quad 0,98$$
$$\text{für } H = 0,3 \quad „ \quad 3 \quad \text{Mtr.}$$

nd $= 0,99$ für sehr grosse Werthe von H.

Die in der obigen Tabelle hinzugefügten Werthe des Verhältnisses $\frac{\mu}{\mu_0}$, elche Zeuner in der Formel

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + 0,33214\, cos^3\varrho + 0,16672\, cos^4\varrho \quad \ldots\ldots (2)$$

ısammengefasst hat, können zur Bestimmung von μ für solche Fälle ienen, in denen μ_0 einen von obigem verschiedenen Werth hat. —

3) Unvollkommene Contraction. Die Mündung $= A$ befindet sich in der Mitte einer gleichfalls kreisförmigen ebenen Wand $= F$, an die sich ringsum rechtwinklig eine cylindrische Wand anschliesst, so dass also auch F der Querschnitt ist, mit welchem das Wasser im Gefäss (resp. in einer Röhre) der ebenen Wand zufliesst (Fig. 32). In diesem Falle kann nach Versuchen von Weisbach gesetzt werden:

$$\mu = \mu_0 [1 + 0{,}04564 (14{,}821^n - 1)] \quad \text{mit} \quad n = \frac{A}{F} \ldots 3,$$

unter μ_0 den Ausflusscoefficienten verstanden, welcher unter übrigens gleichen Umständen bei vollkommener Contraction ($n = 0$) gelten würde. Folgende Tabelle enthält die Werthe von $\frac{\mu}{\mu_0}$, welche verschiedenen Werthen von n entsprechen.

n	$\frac{\mu}{\mu_0}$	n	$\frac{\mu}{\mu_0}$	n	$\frac{\mu}{\mu_0}$	n	$\frac{\mu}{\mu_0}$
0	1,000	0,25	1,045	0,5	1,134	0,75	1,303
0,05	1,007	0,3	1,059	0,55	1,161	0,8	1,351
0,1	1,014	0,35	1,075	0,6	1,189	0,85	1,408
0,15	1,023	0,4	1,092	0,65	1,223	0,9	1,471
0,2	1,034	0,45	1,112	0,7	1,260	0,95	1,546

Wenn die Mündung A sich nicht in der Mitte der ebenen Wand befindet, oder wenn letztere nicht kreisförmig ist, so lässt sich kaum eine wesentlich andere Beziehung zwischen $\frac{\mu}{\mu_0}$ und $n = \frac{A}{F}$ erwarten; wenn aber die ebene Wand F einen nach aussen convergenten Gefässansatz abschliesst, so dass die Bahnen der im Gefäss ihr zuströmenden Wassertheilchen schon in grösserer Entfernung von der ebenen Wand convergiren, so kann dadurch μ ohne Zweifel merklich verkleinert werden. —

4) Partielle Contraction ist bei kreisförmigen Mündungen kaum von technischem Interesse. Es liegen darüber Versuche vor von Bidone, nach welchen gesetzt werden kann:

$$\mu = \mu_0 (1 + 0{,}128 p) \ldots \ldots \ldots \ldots \ 4$$

wenn p das Verhältniss desjenigen Theils des Umfangs, an dem die Contraction aufgehoben ($\varrho = 0$) ist, zum ganzen Umfange, und μ_0 den Ausflusscoefficienten bei vollständiger Contraction ($p = 0$) bedeutet; auch vorausgesetzt, dass an dem Theil des Umfangs, an welchem die Contraction nicht aufgehoben, dieselbe normal ($\varrho = 90^0$) ist. Uebrigens wird die Formel um so weniger zuverlässig, je mehr sich p der Einheit nähert

§. 84. Rechteckige Mündungen.

Die umfassendsten Versuche über den für die Praxis besonders wich-
igen Fall des Ausflusses aus rechteckigen Seitenöffnungen mit zwei verti-
alen Seiten $= a$ und zwei horizontalen Seiten $= b$ wurden auf Veran-
ssung des französischen Kriegsministeriums in Metz unter Benutzung der
'estungsgräben und des Moselwassers daselbst 1828 und 1829 von Pon-
elet und Lesbros angestellt und später 1829 bis 1834 von Lesbros
llein fortgesetzt. Jene gemeinschaftlichen Versuche* bezogen sich haupt-
ächlich auf den Fundamentalfall der vollständigen und normalen Contrac-
ion beim freien Ausfluss in die Luft durch Mündungen in der dünnen
Vand von $b = 0{,}2$ Mtr. Breite und verschiedenen Höhen bis $a = 0{,}2$ Mtr.
ei verschiedenen Höhen des Oberwasserspiegels über dem oberen Rand
er Mündung bis $h_2 = 1{,}8$ Mtr. Die zahlreichen (über 2000) späteren
esbros'schen Versuche** umfassten auch viele andere Fälle, von denen
n Folgenden die Rede sein wird.

1) Die Contraction kann als normal vorausgesetzt werden, wenn die
ntfernung der Seitenränder der Mündung von den betreffenden Seiten-
ändern der ebenen Wand, in der sie sich befindet, wenigstens $= 2{,}7b$,
nd wenn die Entfernung des unteren Randes der Mündung vom Boden
es Ausflussgefässes wenigstens $= 2{,}7a$ ist; eine weitere Vergrösserung
ieser Entfernungen hat dann nach Lesbros keinen merklichen Einfluss
ehr auf den Ausflusscoefficienten. Die Werthe des letzteren, durch Inter-
olation aus den unmittelbaren Resultaten der Fundamentalversuche von
'oncelet und Lesbros und aus späteren Versuchen mit 0,6 Mtr. breiten
lündungen abgeleitet und bis zu $h_2 = 3$ Mtr. ergänzt, sind in der fol-
enden Tabelle enthalten. Es beziehen sich diese Werthe von μ auf
ie einfache Formel (3), §. 79, in welcher wegen $p_0 = p$ hier $H = h$
$= h_2 + \frac{a}{2}$ ist = der Höhe des Oberwasserspiegels über dem Mittelpunkt
r Mündung. Dabei ist die Höhe h_2 an einer solchen Stelle in einiger
ntfernung von der Ausflusswand gemessen, wo die Wasseroberfläche noch
icht merklich abwärts gegen die Wand gekrümmt ist und das Wasser als
uhend ($u_0 = 0$) vorausgesetzt werden kann. Unmittelbar an der Wand
emessen ist h_2 kleiner, und würde bei Benutzung dieses kleineren Werthes

---

* Poncelet et Lesbros, Expériences hydrauliques etc. Paris 1832.

** Expériences hydrauliques sur les lois de l'écoulement de l'eau etc., par
L. Lesbros, colonel du génie. Paris 1851.

der Coefficient μ entsprechend grösser; erst ungefähr mit $h_2 > 0,2$ Mtr. hört dieser Umstand auf, die 3[te] Decimalstelle des Werthes von μ beeinflussen zu können.

h_2 Mtr.	Mündungshöhen in Metern.							
	$b = 0,2$ Mtr.						$b = 0,6$ Mtr.	
	0,01	0,02	0,03	0,05	0,1	0,2	0,02	0,2
0,01	0,701	0,660	0,630	0,607	„	„	0,644	„
0,015	0,697	0,660	0,632	0,612	0,593	„	0,644	„
0,02	0,694	0,659	0,634	0,615	0,596	0,572	0,643	„
0,03	0,688	0,659	0,638	0,620	0,600	0,578	0,642	0.593
0,04	0,683	0,658	0,640	0,623	0,603	0,582	0,642	0.595
0,05	0,679	0,658	0,640	0,625	0,605	0,585	0,641	0,597
0,06	0,676	0,657	0,640	0,627	0,607	0,587	0,641	0.599
0,07	0,673	0,656	0,639	0,628	0,609	0,588	0,640	0.600
0,08	0,670	0,656	0,638	0,629	0,610	0,589	0,640	0.601
0,09	0,668	0,655	0,637	0,629	0,610	0,591	0,639	0,601
0,10	0,666	0,654	0,637	0,630	0,611	0,592	0,639	0,602
0,12	0,663	0,653	0,636	0,630	0,612	0,593	0,638	0,603
0,14	0,660	0,651	0,635	0,630	0,613	0,595	0,637	0.603
0,16	0,658	0,650	0,634	0,631	0,614	0,596	0,637	0.604
0,18	0,657	0,649	0,634	0,630	0,615	0,597	0,636	0.605
0,2	0,655	0,648	0,633	0,630	0,615	0,598	0,635	0.605
0,25	0,653	0,646	0,632	0,630	0,616	0,599	0,634	0.606
0,3	0,650	0,644	0,632	0,629	0,616	0,600	0,633	0,607
0,4	0,647	0,642	0,631	0,628	0,617	0,602	0,631	0,607
0,5	0,644	0,640	0,630	0,628	0,617	0,603	0,630	0,607
0,6	0,642	0,638	0,630	0,627	0,617	0,604	0,629	0.607
0,7	0,640	0,637	0,629	0,627	0,616	0,604	0,628	0.607
0,8	0,637	0,636	0,629	0,627	0,616	0,605	0,628	0,606
0,9	0,635	0,634	0,628	0,626	0,615	0,605	0.627	0.606
1,0	0,632	0,633	0,628	0,626	0,615	0,605	0,626	0,606
1,1	0,629	0,631	0,627	0,625	0,614	0,604	0,626	0.604
1,2	0,626	0,628	0,626	0,624	0,614	0,604	0,625	0.604
1,3	0,622	0,625	0,624	0,622	0,613	0,603	0,624	0.603
1,4	0,618	0,622	0,622	0,621	0,612	0,603	0,624	0,603
1,5	0,615	0,619	0,620	0,620	0,611	0,602	0,623	0.602
1,6	0,613	0,617	0,618	0,618	0,611	0,602	0,623	0,602
1,7	0,612	0,615	0,616	0,617	0,610	0,602	0,622	0,602
1,8	0,612	0,614	0,615	0,615	0,609	0,601	0,621	0,602
1,9	0,611	0,612	0,613	0,614	0,608	0,601	0,621	0,602
2,0	0,611	0,612	0,612	0,613	0,607	0,601	0,620	0,602
3,0	0,609	0,610	0,608	0,606	0,603	0,601	0,615	0,601

Im Ganzen findet sich durch diese Tabelle das Gesetz bestätigt, dass μ um so grösser ist, je kleiner h resp. h_2 und A resp. die kleinere Dimension a ist, welche in dieser Hinsicht (wie überhaupt die kleinere Dimension bei länglichen Mündungen) als massgebend zu betrachten ist. Wenn sich namentlich für die grösseren Werthe von a eine Abweichung von jenem Gesetz insofern herausstellt, als μ mit wachsenden Werthen von h_2 zunächst bis zu einem Maximum (in der Tabelle durch fetteren Satz hervorgehoben) wächst, so findet dies seine Erklärung zum Theil darin, dass der nach §. 79, Gl. (8) in diesem μ enthaltene Factor

$$1 - f = 1 - \frac{1}{96}\left(\frac{a}{h}\right)^2 = 1 - \frac{1}{96}\left(\frac{a}{\frac{a}{2} + h_2}\right)^2$$

um so mehr < 1 ist, je grösser a und je kleiner h_2 ist. Z. B. im Falle $b = 0,2$ und $a = 0,2$ Mtr. ist

$$\text{für } h_2 = 0,02: \quad 1 - f = 1 - \frac{1}{96}\left(\frac{0,2}{0,12}\right)^2 = 0,971$$

$$\text{„ } h_2 = 0,9: \quad 1 - f = 1 - \frac{1}{96}\left(\frac{0,2}{1,0}\right)^2 = 1,000$$

und $\frac{0,572}{0,971} = 0,589$ schon merklich weniger $< 0,605$, als $0,572$. Dazu kommt u. A. der Umstand, dass, je kleiner h_2 ist, desto mehr das Wasser vorwiegend von unten der Mündung zufliesst und eine Abweichung der mittleren Ausflussrichtung von der horizontalen nach oben zur Folge haben kann; die Höhe des Oberwasserspiegels über dem Schwerpunkt des kleinsten Querschnitts des contrahirten Strahls ist dann thatsächlich etwas $< h_2 + \frac{a}{2}$, und muss sich μ etwas zu klein ergeben, wenn für jene Höhe dieser zu grosse Werth gesetzt wird.

Nach Lesbros wird der Ausflusscoefficient vorwiegend durch die kleinere Dimension der Mündung (einerlei, ob Breite oder Höhe) bestimmt der Art, dass sich μ nicht wesentlich ändert, wenn bei gleichen Werthen von h das Verhältniss der grösseren zur constant bleibenden kleineren Dimension zwischen den Grenzen 1 und 20 variirt. Bei den Anwendungen pflegt $a < b$ zu sein, und können danach die Tabellenwerthe auch zur angenäherten Bestimmung von μ für andere Werthe von b dienen. Die Vergleichung der Tabellenwerthe für $b = 0,2$ und $b = 0,6$ Mtr. bei $a = 0,2$ Mtr. lässt den Grad der dabei zu erwartenden Annäherung er-

kennen; bei $a = 0{,}02$ Mtr. sind die Differenzen grösser, während auch mit $\frac{0{,}6}{0{,}02} = 30$ der oben erwähnte Grenzwerth 20 schon überschritten ist.

Der Geschwindigkeitscoefficient ist nicht wesentlich von demjenigen verschieden, welcher unter übrigens gleichen Umständen für den Ausfluss aus kreisförmigen Mündungen gefunden wurde. So fand z. B. Lesbros im Falle $a = 0{,}6$ Mtr., $b = 0{,}02$ Mtr. bei $h = 1{,}55$ Mtr. den Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}625$ und durch Strahlenmessung den kleinsten Querschnitt des contrahirten Strahls in 0,3 Mtr. Entfernung von der Mündung entsprechend $\alpha = 0{,}638$; daraus ergiebt sich

$$\varphi = \frac{0{,}625}{0{,}638} = 0{,}980.$$

Die bis zum Schwerpunkt des kleinsten Querschnitts gerechnete Druckhöhe war $= 1{,}576$, und würde sich damit ergeben:

$$\varphi = 0{,}98 \sqrt{\frac{1{,}55}{1{,}576}} = 0{,}972.$$

2) Bei den technischen Ausführungen, insbesondere bei dem Ausfluss des Wassers aus Schutzöffnungen, pflegen die Verhältnisse nicht von so einfacher Art zu sein wie bei den Versuchen, welche die obigen Tabelle zu Grunde liegen. Die Umschliessungsflächen der Wandöffnung pflegen nicht nach aussen zu divergiren und so eine scharfe Kante am inneren Rande, eine sogenannte Mündung in dünner Wand (wie Fig. ...) zu bilden, sondern rechtwinklig die mehr oder weniger dicke Wand zu schneiden, so dass der ausfliessende Strahl mit ihnen in Berührung kommen kann um so mehr, als seine obere Begrenzung nicht durch die Wand selbst, sondern durch ein von oben her an der inneren Wandfläche mehr oder weniger vorgeschobenes Schutzbrett von gewisser Dicke gebildet wird. Sofern dann ausserdem dieses Schutzbrett zwischen Leisten geführt zu werden pflegt, die längs den Seitenrändern der Mündung in gewissen Entfernungen (= dem halben Ueberschuss der Breite des Schutzbretts über die Mündungsbreite b) hinlaufen, auch der untere Rand der Mündung durch eine solche Leiste eingefasst sein kann als Unterstützung des ganz niedergelassenen Schutzbretts, wird dadurch auch eine Schwächung der Contraction und entsprechende Vergrösserung des Coefficienten μ verursacht. Folgende Tabelle enthält die Werthe für solche Fälle nach Versuchen von Lesbros. Dabei betrug die Breite der Schutzöffnung 0,6 Mtr., die Dicke der Wand, des Schutzbretts, der Leisten und die Entfernung jeder Leiste vom betreffenden

fenden Rande der Mündung je 0,05 Mtr.; im Falle A waren nur die Seitenränder durch Leisten eingefasst, im Falle B auch der untere Rand. Uebrigens befand sich die Oeffnung an einer mittleren Stelle einer grösseren verticalen Wand.

h_2 Mtr.	$a = 0{,}03$ Mtr.		$a = 0{,}05$ Mtr.		$a = 0{,}2$ Mtr.		$a = 0{,}4$ Mtr.	
	A	B	A	B	A	B	A	B
0,1	0,710	0,694	0,691	0,664	0,634	0,665	0,598	0,644
0,2	0,696	0,704	0,685	0,687	0,640	0,672	0,609	0,653
0,24	0,694	0,706	0,684	0,690	0,641	0,674	0,612	0,655
0,3	0,692	0,709	0,683	0,693	0,641	0,675	0,616	0,656
0,6	0,688	0,710	0,678	0,695	0,640	0,676	0,618	0,649
1,0	0,680	0,704	0,673	0,694	0,638	0,674	0,608	0,632
1,3	0,678	0,701	0,672	0,693	0,637	0,673	0,602	0,624
1,5	0,676	0,699	0,672	0,692	0,637	0,673	0,598	0,620
1,7	0,676	0,698	0,672	0,692	0,637	0,672	0,596	0,618
2,0	0,675	0,696	0,671	0,691	0,636	0,671	0,595	0,615
3,0	0,672	0,693	0,669	0,689	0,634	0,669	0,592	0,611

Für einen dritten Fall, bei welchem die horizontale untere Leiste des zweiten Falles dicht am unteren Rande der Mündung hinlief, entsprechend einer Verdoppelung der Wanddicke daselbst, ergaben sich fast dieselben (höchstens um 0,004 grösseren) Werthe von μ wie im Falle B. —

3) Bei unvollkommener Contraction unter Umständen analog den im vorigen §. unter 3) für kreisförmige Mündungen erwähnten ist mit Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen nach Versuchen von Weisbach zu setzen:

$$\mu = \mu_0[1 + 0{,}076(9^n - 1)] \text{ mit } n = \frac{A}{F} \quad \ldots\ldots (1).$$

Die Werthe von $\frac{\mu}{\mu_0}$ für verschiedene Werthe von n können der folgenden Tabelle, event. durch Interpolation, entnommen werden.

n	$\frac{\mu}{\mu_0}$	n	$\frac{\mu}{\mu_0}$	n	$\frac{\mu}{\mu_0}$	n	$\frac{\mu}{\mu_0}$
0	1,000	0,25	1,056	0,5	1,152	0,75	1,319
0,05	1,009	0,3	1,071	0,55	1,178	0,8	1,365
0,1	1,019	0,35	1,088	0,6	1,208	0,85	1,416
0,15	1,030	0,4	1,107	0,65	1,241	0,9	1,473
0,2	1,042	0,45	1,128	0,7	1,278	0,95	1,537

4) Bei **partieller Contraction** kann im Mittel nach Versuchen von **Bidone** mit quadratischen und von **Weisbach** mit rechteckigen Mündungen von 0,2 Mtr. Breite und 0,1 Mtr. Höhe gesetzt werden (Bezeichnungen wie in §. 83, Gl. 4):

$$\mu = \mu_0(1 + 0{,}155p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2)$$

Dieselbe kommt hauptsächlich in der Weise vor, dass die Contraction am unteren Rande $\left(p = \frac{b}{2a + 2b}\right)$ oder zugleich an den Seitenrändern $\left(p = \frac{2a + b}{2a + 2b}\right)$ der Mündung aufgehoben ist, indem diese bis zum Boden des Ausflussreservoirs reicht und event. zugleich die ganze Breite desselben einnimmt.

Bei Versuchen von **Lesbros** über derartige Fälle wurden zugleich verschiedene Modificationen der Anordnung mit Rücksicht auf praktische Verhältnisse und Nebenumstände in Betracht gezogen. In den folgenden zwei Tabellen sind einige der für Mündungen von 0,2 Mtr. Breite gefundenen Ausflusscoefficienten enthalten. Dabei bedeutet

A eine Mündung ohne Einfassung und in solcher Entfernung vom Rande der ebenen Mündungswand, dass die Contraction als normal zu betrachten ist,

B eine Mündung, welche an einem Seitenrande nur 0,02 Mtr. von einer rechtwinklig gegen die Mündungswand stossenden Seitenwand des Reservoirs entfernt ist, so dass hier die Contraction, wenn auch nicht ganz aufgehoben, so doch in hohem Grade geschwächt ist,

C eine Mündung, die sich an beiden Seiten ebenso verhält wie *B* an einer Seite,

D eine Mündung wie *C* mit dem Unterschiede, dass die Seitenwände des Gefässes nicht rechtwinklig, sondern unter Winkeln von 45° gegen die Mündungswand stossen und gegen einander unter 90° convergiren, somit eine geringere Schwächung der Seitencontraction verursachen, als im Falle *C*;

A', *B'*, *C'*, *D'* sind dieselben Mündungen wie beziehungsweise *A*, *B*, *C*, *D* mit dem Unterschiede, dass die Contraction am unteren Rande ganz aufgehoben ist, indem derselbe im Boden des Reservoirs liegt.

Die Höhe h_2 der freien Wasseroberfläche über dem oberen Rande der Mündung ist wie bei der Fundamentaltabelle unter 1) in einiger Entfernung von der Mündungswand gemessen, so dass auch die folgenden Werthe von μ für den Fall *A* mit den entsprechenden jener früheren Tabelle übereinstimmen.

h_2 Mtr.	a = 0,05 Mtr.				a = 0,2 Mtr.			
	A	*B*	*C*	*D*	*A*	*B*	*C*	*D*
0,02	0,615	0,627	0,647	0,631	0,572	0,587	„	0,589
0,05	0,625	0,630	0,646	0,632	0,585	0,593	0,631	0,595
0,1	0,630	0,633	0,645	0,633	0,592	0,600	0,631	0,601
0,2	0,630	0,635	0,642	0,633	0,598	0,606	0,632	0,607
0,5	0,628	0,634	0,637	0,632	0,603	0,610	0,631	0,611
1,0	0,626	0,628	0,635	0,627	0,605	0,611	0,628	0,612
1,5	0,620	0,622	0,634	0,621	0,602	0,611	0,627	0,611
2,0	0,613	0,616	0,634	0,615	0,601	0,610	0,626	0,611
3,0	0,606	0,609	0,632	0,608	0,601	0,609	0,624	0,610

h_2 Mtr.	a = 0,05 Mtr.				a = 0,2 Mtr.			
	A'	*B'*	*C'*	*D'*	*A'*	*B'*	*C'*	*D'*
0,02	0,664	0,663	„	0,678	0,599	„	„	„
0,05	0,667	0,669	0,690	0,677	0,608	0,622	„	0,636
0,1	0,669	0,674	0,688	0,677	0,615	0,628	„	0,639
0,2	0,670	0,676	0,687	0,675	0,621	0,633	0,708	0,643
0,5	0,668	0,676	0,682	0,671	0,623	0,636	0,680	0,644
1,0	0,666	0,672	0,680	0,670	0,624	0,637	0,676	0,642
1,5	0,665	0,670	0,678	0,670	0,624	0,637	0,672	0,641
2,0	0,664	0,670	0,674	0,669	0,619	0,636	0,668	0,640
3,0	0,662	0,669	0,673	0,668	0,614	0,634	0,665	0,638

Setzt man für die Fälle *B*, *C*, *A'*, *B'*, *C'*

$$\mu = \mu_0(1 + xp_a + yp_b),$$

nter p_a und p_b die Theile von p verstanden, welche sich auf die Seiten ınd auf den unteren Rand der Mündung beziehen $\left(p_a = \frac{a}{2(a+b)}\right.$ und $\frac{a}{\,-b}$, $\left.p_b = \frac{b}{2(a+b)}\right)$, während μ_0 den Werth von μ bei normaler ontraction, d. h. für den Fall *A* bedeutet, so findet man die Coefficienten und y zwar merklich abhängig von h_2, und zwar (abgesehen von einigen nregelmässigkeiten) der Art, dass sie mit wachsenden Werthen von h_2 unächst abnehmen (bis etwa h_2 = 0,5 Mtr.) und dann wieder zunehmen; m Durchschnitt aber kann gesetzt werden:

$$\mu = \mu_0(1 + 0{,}12p_a + 0{,}16p_b) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

n befriedigender Uebereinstimmung mit Gl. (2) mit Rücksicht darauf, dass

die Seitencontraction bei den Lesbros'schen Mündungen nicht gänzlich aufgehoben wurde. Den Fällen D und D' entsprechen nahe dieselben Werthe von μ wie den Fällen B und B'. —

5) Ausfluss am Ende eines Gerinnes. — Wenn sich die Mündung in einer verticalen ebenen Wand am Ende eines Gerinnes befindet, in welchem das Wasser mit dem Querschnitt F_0 jener Wand zufliesst, so kann, wenn F_0 nicht sehr gross im Vergleich mit der Mündung A und somit die mittlere Zuflussgeschwindigkeit $u_0 = \frac{V}{F_0}$ im Gerinne nicht sehr klein im Vergleich mit der mittleren Ausflussgeschwindigkeit u ist, die Ausflussmenge V nach Gl. (1) in §. 79 berechnet werden, also (mit $H = h$ für den gewöhnlichen Fall $p_0 = p$) nach der Formel:

$$V = \mu A \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{\mu A}{F_0}\right)^2}} = \mu A \sqrt{\frac{2gh}{1 - (\mu n)^2}} \quad \ldots \ldots (4)$$

unter μ den Coefficienten verstanden, welcher nach Gl. (1) dem die Unvollkommenheit der Contraction bedingenden Verhältniss $n = \frac{A}{F_0}$ entspricht, und unter h die Tiefe des Schwerpunktes von A unter der freien Wasseroberfläche im Gerinne an einer solchen Stelle verstanden, welche in einiger Entfernung von der Wand liegt, so dass das Wasser in dem betreffenden Querschnitt daselbst die mittlere Geschwindigkeit $u_0 = \frac{V}{F_0}$ besitzt; dass diese Geschwindigkeit hier horizontal ist, während u_0 in §. 79 die verticale Oberflächengeschwindigkeit bedeutete, kann einen principiellen Unterschied offenbar nicht bedingen.

Uebrigens hat Weisbach, um die Rechnung zu vereinfachen und den besonderen Umständen dieses Falles noch zuverlässiger auf Grund der Erfahrung zu entsprechen, durch besondere Versuche den Coefficienten μ' der Formel

$$V = \mu' A \sqrt{2gh}$$

ermittelt und denselben, dessen rationelle Bedeutung nach Gl. (4)

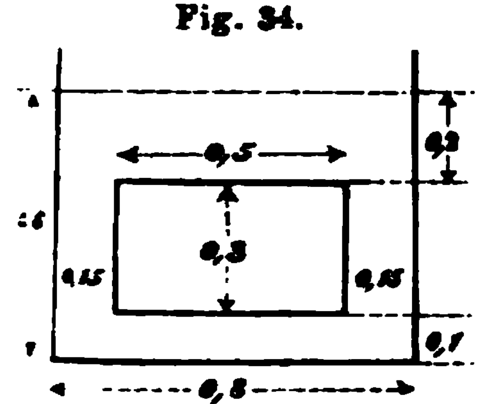
$$\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{1 - (\mu n)^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

ist, unter μ den Werth nach Gl. (1) verstanden, der folgenden empirischen Formel entsprechend gefunden:

$$\mu' = \mu_0(1 + 0{,}641 n^2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

falls $n < 0{,}5$ ist; dabei bedeutet μ_0 den Coefficienten für normale Contraction unter übrigens gleichen Umständen, und wurde h in 1 Mtr. Entfernung von der Wand gemessen. Es ist wesentlich, dass dieser letztere Umstand auch bei der Anwendung von Gl. (6) berücksichtigt werde; der Widerstandshöhe für die 1 Mtr. lange Strecke des Gerinnes, welche in dem so verstandenen h enthalten ist, muss es hauptsächlich zugeschrieben werden, wenn sich der Coefficient μ' nach Gl. (6) kleiner ergiebt, als nach Gl. 5), meistens selbst kleiner, als μ nach Gl. (1). —

Beispiel. Zur Messung der Wassermenge V, welche pro Sec. durch ein 0,8 Mtr. breites Gerinne fliesst, werde am Ende desselben, so dass der Strahl frei ausfliessen kann, eine verticale ebene Wand eingesetzt mit einer rechteckigen Oeffnung von 0,5 Mtr. Breite und 0,3 Mtr. Höhe, deren untere Seite um 0,1 Mtr. über dem Gerinneboden liegt. Nach Eintritt des Beharrungszustandes ergebe sich, in 1 Mtr. Entfernung vor der Wand gemessen, die Höhe der freien Wasseroberfläche über dem oberen Rande der Mündung = 0,2 Mtr. (Fig. 34).


Fig. 34.

Nach der Fundamentaltabelle von Poncelet und Lesbros ist für $h_1 = 0{,}2$ Mtr., $b = 0{,}2$ Mtr. und $a = 0{,}2$ Mtr.: $\mu_0 = 0{,}598$. Mit wachsender Mündungshöhe a nimmt μ ab; mit Rücksicht auf die Tabelle für $b = 0{,}6$ Mtr. lässt sich indessen annehmen, dass dem vorliegenden Falle: $h_1 = 0{,}2$ Mtr., $b = 0{,}5$ Mtr., $a = 0{,}3$ Mtr. ein nur wenig kleinerer Werth, als 0,598 entspricht, etwa

$$\mu_0 = 0{,}595.$$

Damit und mit $n = \frac{0{,}5 \,.\, 0{,}3}{0{,}8 \,.\, 0{,}6} = \frac{5}{16}$ ist nach Gl. (6)

$$\mu' = 0{,}632$$

$$V = 0{,}632 \,.\, 0{,}15 \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 0{,}35} = 0{,}2484 \text{ Cubikm.}$$

Hierbei war vorausgesetzt (entsprechend der Bedeutung von Gl. 6), dass die unvollkommene Contraction gleichwohl vollständig ist, d. h. ringsum am ganzen Umfange der Mündung stattfindet. Wäre sie aber zugleich partiell, so wäre der Ausflusscoefficient, der in diesem Falle mit μ'' bezeichnet sei, $> \mu'$, etwa

$$\mu'' = (1 + y)\mu',$$

der Art jedoch, dass im Allgemeinen $1 + y < 1 + x$ ist, wenn $1 + x$ das Verhältniss der Ausflusscoefficienten für partielle und vollständige bei

übrigens vollkommener Contraction unter sonst gleichen Umständen bedeutet. Den beiden Bedingungen, dass $y = x$ sein muss für $\mu' = \mu_0$, dagegen $y = 0$ für $\mu' = 1$, sofern auch μ'' höchstens $= 1$ sein kann, wird am einfachsten dadurch entsprochen, dass

$$\mu'' = \left(1 + \frac{1 - \mu'}{1 - \mu_0}\, x\right) \mu' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 7$$

gesetzt wird, eine Formel, welcher man sich (mit entsprechend veränderten Bedeutungen von μ' und x) in Ermangelung specieller Erfahrungen überhaupt in solchen Fällen bedienen kann, in denen verschiedene Umstände zusammenwirken, um den Ausflusscoefficienten $> \mu_0$ zu machen.

Wenn etwa bei dem obigen Beispiel (Fig. 34) dieselbe Mündung von 0,5 Mtr. Breite und 0,3 Mtr. Höhe mit ihrem unteren Rande im Gerinneboden läge, hier also die Contraction ganz aufgehoben würde, übrigens im Beharrungszustande dieselbe Wassertiefe im Gerinne stattfände, somit auch $n = \frac{5}{16}$ wäre wie zuvor, so hätte die veränderte Höhe $h_2 = 0,3$ statt 0,2 Mtr. gemäss der Fundamentaltabelle kaum einen merklich anderen Werth von μ_0 zur Folge, so dass wieder

$$\mu_0 = 0,595 \quad \text{und} \quad \mu' = 0,632$$

gesetzt werden könnte. Nach Gl. (3) wäre aber

$$x = 0,16 \frac{0,5}{2(0,5 + 0,3)} = 0,05$$

und somit nach Gl. (7)

$$\mu'' = \left(1 + \frac{0,368}{0,405} \cdot 0,05\right) . 0,632 = 1,0454 . 0,632 = 0,661$$

$$V = 0,661 . 0,15 \sqrt{2 . 9,81 . 0,45} = 0,2946 \text{ Cubikm.}$$

§. 85. Rechteckige Mündungen mit Ansatzgerinnen.

Während die im vorigen §. besprochenen Ausflusscoefficienten sich auf den Fall des Ausflusses in die freie Luft bezogen, werde jetzt vorausgesetzt, dass an die rechteckige Mündung $= A = ab$ sich aussen ein Gerinne von der Breite b anschliesst der Art, dass der untere Rand der Mündung im Boden, ihre Seitenränder in den verticalen Seitenwänden des Gerinnes liegen. Indem dabei der ausfliessende Wasserstrahl mit dem Boden und den Seitenwänden des Gerinnes in Berührung kommt, nachdem

sein Querschnitt sich contrahirt und wieder erweitert hat, wird dem Ausflusse des Wassers ein Widerstand dargeboten theils durch die Reibung am Gerinne, theils dadurch, dass letzteres das freie Niederfallen des Wassers als parabolischer Strahl hindert; der Coefficient μ der Formel

$$V = \mu A \sqrt{2gh} = \mu ab \sqrt{2gh} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1).$$

unter h die Höhe des Oberwasserspiegels über dem Mittelpunkte der Mündung A verstanden (bei Voraussetzung gleichen äusseren Drucks am Oberwasserspiegel und an der freien Oberfläche des im Gerinne abfliessenden Wassers), ist deshalb kleiner, als beim Ausfluss in die freie Luft.

Der hemmende Einfluss des Gerinnes bedingt hauptsächlich eine Vergrösserung der Pressung p im kleinsten Querschnitt F des contrahirten Strahls. Wenn, wie zunächst vorausgesetzt werden soll, das Gerinne horizontal oder nach aussen abwärts geneigt ist und kein besonderer Widerstand (z. B. ein Aufstau durch eine darin befindliche Querwand) in ihm vorkommt, so dass die freie Wasseroberfläche im Gerinne durch den oberen Rand der Mündung geht, so ist nur in den höchsten Punkten von F die Pressung p = dem äusseren Druck, während sie nach unten hin zunimmt. Wenn der Querschnitt F von den Wassertheilchen in parallelen geraden Bahnen durchströmt würde, so fände diese Pressungszunahme nach hydrostatischem Gesetze statt und könnte dann dadurch näherungsweise berücksichtigt werden, dass $h - \frac{a}{2}$ statt h in Gl. (1) gesetzt wird. Mit Rücksicht auf diesen Umstand wäre also μ in der unveränderten Gl. (1) im Verhältnisse $\sqrt{1 - \frac{a}{2h}}$ kleiner, als bei freiem Ausfluss; in der That lehrt die Erfahrung, dass die Verkleinerung von μ durch das Ansatzgerinne mit wachsender Druckhöhe h abnimmt. Die Reibung im Gerinne hat aber zur Folge, dass, je weniger dasselbe abwärts geneigt und je länger es ist, desto mehr die Tiefe des im Gerinne abfliessenden Wassers gegen die Mündung hin wachsen muss, um den Beharrungszustand dieses Abflusses zu ermöglichen; dadurch kann es verursacht werden, dass die Oberfläche des Wassers, nachdem es den kleinsten Querschnitt F durchströmt hat, sich wieder erhebt, dass also die Bahnen der Wassertheilchen an der Stelle von F vorwiegend nach unten convex gekrümmt sind und somit die Pressung daselbst in noch höherem Grade nach unten wächst, als nach hydrostatischem Gesetze. Mit Rücksicht auf diesen Umstand wird der Coefficient μ durch das Ansatzgerinne um so mehr verkleinert, je länger dasselbe und je weniger es abwärts geneigt ist. Indem es aber auch einen Einfluss in entgegengesetztem Sinne dadurch ausüben kann, dass

durch die Adhäsion des Wassers am Gerinne die Contraction vermindert, der Contractionscoefficient α vergrössert wird, ist es begreiflich, dass das Gesetz, nach welchem der Coefficient μ von den angedeuteten und von etwaigen anderen Umständen in verschiedenen Fällen abhängt, ziemlich complicirt ist und sich nur durch Versuche einigermassen zuverlässig bestimmen lässt.

Wenn durch ein besonderes Hinderniss im Gerinne oder durch eine nach aussen aufwärts gerichtete Neigung desselben der Abfluss des Wassers in dem Grade erschwert ist, dass die Mündung ganz unter seiner freien Oberfläche im Gerinne liegt und somit der Fall eines Ausflusses unter Wasser stattfindet, so ist es am angemessensten, die Formel

$$V = \mu A \sqrt{2g(h - h')} = \mu ab \sqrt{2g(h - h')} \quad \ldots \ldots (2)$$

zu Grunde zu legen, in welcher h dieselbe Bedeutung hat wie in Gl. (1), während h' die Höhe des Unterwasserspiegels über der Mitte von A bedeutet und zwar an einer solchen Stelle gemessen, wo diese Wasseroberfläche ihre grösste Erhebung zeigt und ihre unregelmässige Bewegung im Wesentlichen verloren hat. Wäre h' sehr gross im Vergleich mit der halben Mündungshöhe, so ginge dieser Fall über in den des Ausflusses unter Wasser aus einem in ein anderes Gefäss von solcher Grösse, dass darin das Wasser als ruhend zu betrachten wäre; $h - h'$ wäre der Höhenunterschied der horizontalen Wasseroberflächen in beiden Gefässen und der Coefficient μ in Gl. (2) gemäss der allgemeinen Bemerkung am Ende von §. 82 nur wenig kleiner, als unter übrigens gleichen Umständen bei freiem Ausfluss (vermuthlich in Folge der Reibung des ausfliessenden Strahls an dem umgebenden Wasser statt an Luft). Wenn aber h' nicht sehr gross im Vergleich mit $\frac{a}{2}$ ist, so ist das Abhängigkeitsgesetz von μ wieder nur durch Versuche einigermassen zuverlässig zu bestimmen. Durch die Combination eines Ansatzgerinnes von verschiedener Länge und Neigung, event. bei verschiedenen Wasserständen $h' > \frac{a}{2}$ für den Fall des Ausflusses unter Wasser, mit den im vorigen §. besprochenen Fällen in Betreff der besonders die Contraction bedingenden Anordnung der Mündung häufen sich freilich die den Coefficienten μ bestimmenden Elemente in einem solchen Grade, dass zu einer für alle Fälle genügend sicheren Bestimmung desselben die bisher bekannt gewordenen Versuche bei Weitem nicht ausreichen.

1) Für den Fall einer rechteckigen Mündung in einer verticalen ebenen Wand mit einem horizontalen oder abwärts geneigten

Ansatzgerinne, in welchem ein sonstiger Widerstand ausser der Reibung nicht vorkommt, liegen Versuche vor von Lesbros bei verschiedenen Anordnungen der Mündung, wie solche im vorigen §. unter 4) mit A, B, C, D, A', B', C', D' bezeichnet und erklärt wurden. Folgende Tabelle enthält auszugsweise die betreffenden, obiger Gl. (1) entsprechenden Werthe von μ für einige der praktisch wichtigsten Fälle; h_2 ist wie früher die Höhe des Oberwasserspiegels über dem oberen Rand der Mündung, ebenso wie $h = h_2 + \frac{a}{2}$ in einiger Entfernung von der Mündungswand gemessen, falls $h_2 < 0{,}2$ Mtr. ist. In den Fällen

A (normale Contraction),

A' (Contraction am unteren Rande aufgehoben),

C' (Contraction am unteren Rande aufgehoben, an den Seiten sehr unvollkommen)

für das Ansatzgerinne 3 Mtr. lang und horizontal; in den Fällen A'' und C'', welche übrigens in Betreff der Contraction mit den Fällen A' und C' übereinstimmen, war das Gerinne 2,5 Mtr. lang und um $^1/_{10}$ seiner Länge geneigt.

h_2 Mtr.	$a = 0{,}05$ Mtr.					$a = 0{,}2$ Mtr.				
	A	A'	A''	C'	C''	A	A'	A''	C'	C''
0,02	0,488	0,487	0,585	0,512	„	0,480	0,480	0,527	„	„
0,05	0,577	0,571	0,614	0,582	0,625	0,511	0,510	0,553	0,528	„
0,1	0,624	0,605	0,632	0,621	0,639	0,542	0,538	0,574	0,560	0,593
0,2	0,627	0,617	0,645	0,637	0,649	0,574	0,566	0,592	0,589	0,617
0,5	0,625	0,626	0,652	0,647	0,656	0,599	0,592	0,607	0,618	0,632
1,0	0,624	0,628	0,651	0,649	0,656	0,601	0,600	0,610	0,630	0,638
1,5	0,619	0,627	0,650	0,647	0,656	0,601	0,602	0,610	0,633	0,641
2,0	0,613	0,623	0,650	0,644	0,656	0,601	0,602	0,609	0,632	0,642
3,0	0,606	0,618	0,649	0,639	0,656	0,601	0,601	0,608	0,630	0,641

Die Zahlen dieser Tabelle sind durchweg kleiner, als die entsprechenden der unter 4) im vorigen §. angeführten Tabellen, und zwar um so mehr kleiner, je kleiner h_2 ist; im Falle A werden für die grösseren Werthe von h_2 die Differenzen unmerklich. Dass überhaupt der den Ausflusscoefficienten vermindernde Einfluss des Ansatzgerinnes in diesem Falle der vollständigen Contraction weniger bedeutend ist, als bei partieller Contraction, muss ohne Zweifel dem Umstande zugeschrieben werden, dass dabei die Vergrösserung von a in höherem Grade von Einfluss ist.

Unter anderen Umständen, als denjenigen, unter welchen die in diesem

und im vorigen §. angeführten Lesbros'schen Tabellen für den Ausfluss mit oder ohne Ansatzgerinne erhalten wurden, können die Zahlen derselben wenigstens näherungsweise als Verhältnisszahlen benutzt werden. Wenn etwa bei dem Beispiel zu Ende des vorigen §. die rechteckige Mündung von $a = 0,3$ Mtr. Höhe und $b = 0,5$ Mtr. Breite, für welche, wenn ihr unterer Rand im Boden, jeder Seitenrand um 0,15 Mtr. von den Seitenwänden des Zuflussgerinnes entfernt und ihr oberer Rand um $h_2 = 0,3$ Mtr. unter dem Wasserspiegel liegt, für den Ausfluss in die freie Luft dort $\mu = 0,661$ bestimmt wurde, mit einem horizontalen Ansatzgerinne versehen wäre, so würde dieser Fall zwischen den Fällen A' und C' der Lesbros'schen Tabellen liegen. Denselben entspricht bei $h_2 = 0,3$ Mtr. und $a = 0,2$ Mtr. im Falle des Ausflusses in die freie Luft: $\mu = 0,621$ und 0,699, in das Ansatzgerinne: $\mu = 0,575$ und 0,599, so dass im vorliegenden Falle eine Verkleinerung des Coefficienten μ ungefähr im Verhältnisse

$$\frac{575 + 599}{621 + 699} = 0,90$$

angenommen und somit gesetzt werden könnte:

$$\mu = 0,9 \,.\, 0,661 = 0,595.$$

2) Von technischer Wichtigkeit ist auch der Fall, dass die rechteckige Mündung sich unter einer ebenen Wand befindet, welche in ein mit gleicher Breite fortlaufendes Gerinne an einer gewissen Stelle nicht vertical, sondern unter einem gewissen Winkel δ gegen die Verticale geneigt so eingesetzt ist, dass die Mündung (deren Höhe a auch hier vertical und nicht in der Wandebene gemessen wird) mit ihrem unteren Rande an den Boden und mit ihren Seitenrändern (wenigstens beinahe) an die verticalen Seitenwände des Gerinnes grenzt, und somit die Contraction im Wesentlichen nur am oberen Rande und auch hier des schrägen Zuflusses wegen nur geschwächt stattfindet (Fig. 35). Ueber diesen Fall, welcher bei der

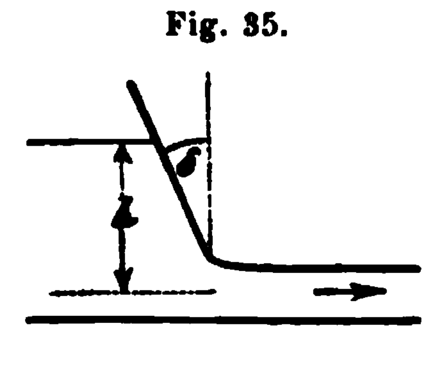


Fig. 35.

Zuführung des Wassers zu Wasserrädern, insbesondere zum Poncelot'schen Rade durch eine sogen. Spannschütze vorkommt, deren geneigte Lage dabei den Zweck hat, die Schutzöffnung dem Rade möglichst nahe zu bringen, sind besondere Versuche von Poncelet* angestellt worden, als deren mittleres Resultat sich

* Mém. sur les roues hydrauliques à aubes courbes etc. Metz 1827

geben hat:*

$$\mu = 0{,}7 \quad 0{,}74 \quad 0{,}8$$
$$\text{für } tg\,\delta = 0 \quad 0{,}5 \quad 1.$$

Der Fall $tg\,\delta = 0$ (verticale Wand) würde am meisten dem Falle C'' r so eben unter 1) besprochenen Versuche entsprechen; dass aber die Werthe von μ der obigen Tabelle für diesen Fall C'' merklich $< 0{,}7$ sind, nn theilweise dadurch begründet sein, dass bei den breiteren Poncelet'schen Schützen die Seitencontraction noch mehr aufgehoben oder wegen r grösseren Breite b von geringerem Einfluss war, theils dadurch, dass sich bei den Lesbros'schen Versuchen nicht eigentlich um Mündungen einem fortlaufenden (hinter und vor der Mündung gleichen) Gerinne ndelte, in dem das Wasser schon mit beträchtlicher Geschwindigkeit wie i den Poncelet'schen Gerinnen der Mündung zuströmte, sondern vielhr die verschiedenen Einfassungen der Lesbros'schen Mündungen bes partieller Aufhebung der Contraction durch Wände hergestellt waren, von der Mündungswand aus nur um einen gewissen Betrag sich in das se Ausflussreservoir hinein erstreckten. Auch diese Poncelet'schen rsuchswerthe μ beziehen sich nämlich auf die obige Gl. (1), so dass sie Einfluss der Zuflussgeschwindigkeit in sich begreifen. Ihre absoluten rthe sind allerdings von den Dimensionen und von der speciellen Anhung der Versuchsschützen abhängig; doch können sie als Verhältnissen für Mündungen mit partieller Contraction nur am oberen Rande gemein Verwendung finden in der Weise, dass für $tg\,\delta = 0{,}5$ resp. 1 Ausflusscoefficient beziehungsweise $\frac{7{,}4}{7}$ und $\frac{8}{7}$ mal so gross gesetzt d, als er unter übrigens gleichen Umständen für $tg\,\delta = 0$ sein würde. andere Werthe von $tg\,\delta$, welche < 1 oder wenigstens nicht viel > 1 l, können diese Vergrösserungscoefficienten

$$= 1 + \frac{6\,tg\,\delta + 4\,tg^2\delta}{70} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

tzt werden. Mit wachsenden Werthen von $tg\,\delta$ bis zu vollständiger hebung der Contraction auch am oberen Rande der Mündung kann μ hstens bis zu einem Geschwindigkeitscoefficienten wachsen, den Ponet für seine Schützen zu

$$\varphi = 0{,}93$$

efähr bestimmte. —

3) Ueber den Ausfluss unter Wasser durch Schutzöffnungen

* Poncelet, Lehrbuch der Anwendung der Mechanik auf Maschinen. tsch von Dr. Schnuse. Bd. II, S. 52.

in Gerinnen sind in den Jahren 1866 und 1867 von Bornemann Versuche angestellt worden, und zwar für den Fall, dass die Schutzöffnun unten ganz bis zum Boden, beiderseits aber wenigstens nahe bis zu de Seitenwänden des Gerinnes reichte, indem dessen Breite = 1,135 Mt durch zwei Säulen (zur Führung der von oben her mehr oder weniger vo zuschiebenden verticalen Schütze von 0,043 Mtr. Dicke) bis zur Mündung breite b = 1,006 Mtr. eingeschränkt war. Der Coefficient μ, der obi Gl. (2) entsprechend, ergab sich wesentlich abhängig von a und h'. u zwar wurde unter verschiedenen versuchten Formeln zur Darstellung d betreffenden Abhängigkeitsgesetzes die folgende:

$$\mu = 0,63775 + 0,29995 \frac{a}{h'} \cdots\cdots\cdots\cdots$$

am zutreffendsten gefunden. Sie giebt die aus 15 Versuchen, bei denen

$$a = 0,034 \text{ bis } 0,174 \text{ Mtr. und } \frac{a}{h'} = 0,17 \text{ bis } 0,85$$

war, abgeleiteten Werthe von μ mit einem wahrscheinlichen Fehler 0,0109 wieder. Die Höhe h' wurde an der Stelle gemessen, wo der Unt wasserspiegel seine grösste Erhebung zeigte und sich möglichst beruh hatte; die Höhe h_2 des Oberwasserspiegels über der Oberkante der M dung (gemessen wie $h = h_2 + \frac{a}{2}$ in geringer Entfernung von der Schut lag zwischen den Grenzen 0,09 und 0,42 Mtr.

§. 86. Cylindrische Ansatzröhren.

Wenn sich an die Oeffnung in der Wand eines Gefässes eine cyl drische Röhre anschliesst, dieselbe zunächst in dem weiteren Sinne v standen, dass ihr Querschnitt, der Wandöffnung entsprechend, von b biger Form sein kann, so fliesst das Wasser, wenn es die Rohrmün vollständig ausfüllt, als entsprechend cylindrischer Strahl ohne w Contraction aus; es ist $\alpha = 1$, also $\mu = \varphi$. Ist die Röhre so kurz ihr Leitungswiderstand verschwindend klein ist, und geht ihre i Wandfläche von der cylindrischen Form an der Mündung aus mit st Krümmung in die Gefässwandfläche über, so ist erfahrungsmässig, wie a priori der Natur der Sache gemäss nicht anders zu erwarten ist, μ nicht merklich von dem Geschwindigkeitscoefficienten für die Mündun

* „Civilingenieur", Bd. XVII, Heft 1.

ler dünnen Wand unter sonst gleichen Umständen verschieden, namentlich
lenn die Gestalt des Mundstücks von der Gefässwand bis zu seinem cylin-
rischen Theil nahe der Form des aus der Mündung in der dünnen Wand
usfliessenden contrahirten Strahls bis zu seinem kleinsten Querschnitt an-
epasst ist; insbesondere bei kreisförmigem Querschnitt der Röhre kann
nn nach §. 83 unter 2) gesetzt werden:

$$\mu = 0{,}96 - 0{,}99,$$

chsend mit der Druckhöhe.

Dieser Fall wird hier ausgeschlossen, vielmehr ein scharfkantiger
satz der Röhre an die Gefässwand vorausgesetzt. Der Wasser-
rom erfährt dann eine innere Contraction unmittelbar nach dem Ein-
tt in die Röhre bevor er sich bis zur vollen Ausfüllung ihres Querschnitts
eder erweitert (§. 76, Fig. 29 mit $a_0 a_0 = aa$, $a'a' > aa$), und ist damit
Verlust an lebendiger Kraft verbunden entsprechend einer nach §. 76,
7. zu berechnenden Widerstandshöhe; der Ausflusscoefficient μ, der
r nach wie vor den Charakter eines Geschwindigkeitscoefficienten hat,
s dadurch merklich kleiner werden. Ist u_1 die Geschwindigkeit im
insten Querschnitt, u die kleinere Ausflussgeschwindigkeit in der Mün-
g, also im vollen Querschnitt der Röhre, und wird zu grösserer Allge-
inheit die letztere zunächst von solcher Länge vorausgesetzt, dass der
fficient ζ ihres Leitungswiderstandes nicht vernachlässigt werden darf,
ist die Widerstandshöhe für die Bewegung vom kleinsten Querschnitt
zur Mündung:

$$B = \frac{(u_1 - u)^2}{2g} + \zeta \frac{u^2}{2g} = \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta\right] \frac{u^2}{2g} \quad \ldots . (1),$$

n $\alpha = \frac{u}{u_1}$ den Coefficienten der inneren Contraction bedeutet. Von
Stattfinden der letzteren kann man sich indirect überzeugen durch
n schon von Venturi zu Ende des vorigen Jahrhunderts angestellten
seitdem mehrfach wiederholten Versuch, betreffend das Steigen des
sers in einem engen Röhrchen R, welches einerseits von der cylin-
chen Ansatzröhre A (nahe bei der Gefässwand ungefähr da, wo der
uste Querschnitt des contrahirten Wasserstroms zu vermuthen ist) ab-
eigt und andererseits abwärts reichend in ein Wassergefäss G einge-
ht wird, während an der freien Oberfläche des Wassers in G und an
Mündung der Ansatzröhre A dieselbe, z. B. atmosphärische Pressung p
findet. Die Erhebung des Wassers in R beweist, dass die Pressung p_1
Anfang der Ansatzröhre $< p$, somit $u_1 > u$ und der entsprechende

Querschnitt des Wasserstroms kleiner, als der Rohrquerschnitt ist, u zwar ist die Erhebungshöhe h' in R = der Druckhöhendifferenz $\frac{p - p_1}{\gamma}$ vorausgesetzt dass die durch A ausfliessende und die in R angesa Flüssigkeit von einerlei Art sind, wenigstens dasselbe specif. Gewicht haben.

Ist die Ansatzröhre horizontal, so folgt aus §. 78, Gl. (3 Rücksicht auf den obigen Ausdruck (1) von B

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} = \frac{u_1^{\,2}}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} - \left[\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta\right]\frac{u^2}{2g}$$

oder mit $u_1 = \frac{u}{\alpha}$ und $u = \mu\sqrt{2gh}$, unter h die Höhe der freien Was oberfläche im Ausflussgefäss (an welcher der äussere Druck auch = vorausgesetzt wird) über der Axe von A verstanden,

$$\frac{p - p_1}{\gamma} = h' = \left[\frac{1}{\alpha^2} - 1 - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 - \zeta\right]\frac{u^2}{2g} =$$

$$= \left[2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) - \zeta\right]\mu^2 h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Wäre dieses h' grösser, als die Höhe h'' der Axe von A über Wasseroberfläche in G, so würde das Wasser aus diesem Gefäss bis Röhre A empor gesaugt werden und mit dem übrigen Wasser ge ausfliessen; damit würde ein Fall vorliegen, der nach Analogie von §. zu behandeln wäre.

Ist die Ansatzröhre so kurz, dass ζ vernachlässigt werden dar kann die Messung von $h' < h''$ zur Bestimmung von α dienen, in dann aus Gl. (2) folgt:

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{h'}{2\mu^2 h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Damit übrigens ein wirklich voller Ausfluss, d. h. ein Aus vollständig von strömendem Wasser erfüllter Mündung der Ansatz stattfinden könne, ist erforderlich, dass bei Voraussetzung eines sich $p_1 > 0$ ergiebt; die Bedingung dafür ist nach Gl. (2), wenn h die dem äusseren Druck entsprechende Druckhöhe bedeutet (insbes z. B. die Wasser-Barometerhöhe = $10^1/_3$ Mtr. im Mittel beim Aus von Wasser in die Atmosphäre),

$$\frac{p_1}{\gamma} = b - \left[2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) - \zeta\right]\mu^2 h > 0$$

$$h < \frac{b}{\left[2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) - \zeta\right]\mu^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

se Bedingung ist, wie die Erfahrung bestätigt, um so eher erfüllt, je sser b und ζ, je grösser also der äussere Druck und je länger die Röhre . Aus einer kurzen Ansatzröhre ($\zeta = 0$), welche nur etwa 2—3 mal lang, als weit ist, kann nur dann ein voller Ausfluss stattfinden, wenn

$$h < \frac{b}{2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\mu^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

wie insbesondere Weisbach durch den Versuch bestätigt fand.

Der Coefficient α der inneren Contraction kann, statt nach (3) vermittels der gemessenen Saughöhe h', auch unabhängig davon h μ und durch den Geschwindigkeitscoefficienten φ ausgedrückt werden, sich auf die Bewegung bis zum kleinsten Querschnitt des in der Anröhre contrahirten Flüssigkeitsstrahls bezieht und welcher dem der heit nahe kommenden Geschwindigkeitscoefficienten für den Ausfluss einer Mündung in dünner Wand unter übrigens gleichen Umständen ch gesetzt werden kann. Bezieht man nämlich Gl. (3) in §. 78 auf die egung von der freien Wasseroberfläche im Ausflussgefäss bis zur Mün- g der Ansatzröhre, die hier nicht horizontal zu sein braucht, und setzt erstere $u_0 = 0$ und $p_0 = p$, während h ihre Höhe über dem Schwer- kt der Mündung ist, so enthält das Glied B der Gleichung

$$\frac{u^2}{2g} = h - B$$

er der nach obiger Gl. (1) zu berechnenden Widerstandshöhe noch die- ge

$$= \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{u_1^2}{2g} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\frac{u^2}{2g},$$

he dem Geschwindigkeitscoefficienten φ für die Bewegung bis zum sten Querschnitt entspricht, und es ist also

$$= h - \left[\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 + \zeta\right]\frac{2g}{u^2} =$$

$$= h - \left[\left(\frac{1}{\alpha\varphi}\right)^2 - \frac{2}{\alpha} + 1 + \zeta\right]\frac{u^2}{2g}$$

oder mit $u = \mu\sqrt{2gh}$:

$$\frac{2gh}{u^2} = \frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{1}{\alpha\varphi}\right)^2 - \frac{2}{\alpha} + 2 + \zeta \ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichung kann auch geschrieben werden:

$$\left(\frac{1}{\alpha\varphi}\right)^2 - 2\varphi \cdot \frac{1}{\alpha\varphi} - \frac{1}{\mu^2} + 2 + \zeta = 0$$

und folgt daraus

$$\frac{1}{\alpha\varphi} = \varphi + \sqrt{\varphi^2 + \frac{1}{\mu^2} - 2 - \zeta} \ldots\ldots\ldots$$

Für eine kurze Ansatzröhre ($\zeta = 0$) findet sich durch diese Gl... α als Function von μ und φ ausgedrückt; $\alpha\varphi$ bedeutet den Ausflus... cienten, welcher ohne Ansatzröhre für die entsprechende Mündung in... dünnen Wand gelten würde, wenn dabei eine gleiche äussere Contr... stattfände wie beim Ausfluss durch die Röhre im Inneren derselb... Ausflusscoefficient μ im letzten Falle ist bei kurzer Ansatzröhre ... nothwendig grösser, als dieser Coefficient $\alpha\varphi$, nämlich nach Gl. (6

$$\frac{1}{\mu^2} = \left(\frac{1}{\alpha\varphi}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Versuche über den Ausfluss des Wassers aus kurz... cylindrischen Ansatzröhren beziehen sich fast ausschliesslich au...

elle normal schneidet, fand Weisbach bei $h = 0{,}23$ bis 0,6 Mtr. und ier Rohrlänge = ungefähr $3d$

$$\text{für } d = 0{,}01 \quad 0{,}02 \quad 0{,}03 \quad 0{,}04 \text{ Mtr. Durchm.}$$

$$\mu = 0{,}843 \quad 0{,}832 \quad 0{,}821 \quad 0{,}810$$

$$= 0{,}854 - 1{,}1d \quad \ldots\ldots (9)$$

Ganzen in befriedigender Uebereinstimmung mit den Resultaten anderer rsuche, insbesondere von Michelotti, Bidone, Eytelwein und d'Aubisson. Diese Werthe von μ liefern nach Gl. (7) mit $\zeta = 0$ und $\varphi = 0{,}97$ dieselben Werthe von d

$$\alpha\varphi = 0{,}641 \quad 0{,}629 \quad 0{,}617 \quad 0{,}605$$

$$\alpha = 0{,}661 \quad 0{,}648 \quad 0{,}636 \quad 0{,}624$$

$$= 0{,}672 - 1{,}2d \quad \ldots\ldots (10).$$

e innere Contraction ist also wenig von der äusseren (§. 83) unter übrigens gleichen Umständen verschieden. Setzt man im Mittel $\alpha = 0{,}64$ und den resultirenden Widerstandscoefficienten der kurzen Ansatzröhre

$$\zeta = 0{,}5 \quad \text{entsprechend} \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} = 0{,}8165,$$

ergiebt sich nach Gl. (2) die Saughöhe

$$h' = 2\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\mu^2 h = \frac{3}{4}h$$

die Bedingung (5) für den vollen Ausfluss:

$$h < \frac{4}{3}b,$$

h. für den Ausfluss von Wasser in die atmosphärische Luft mit $b =$ 2 Mtr. Wassersäule als Maass des Luftdrucks

$$h < 13{,}6 \text{ Mtr.}$$

Prüfung dieses Grenzwerthes durch den Versuch wird dadurch er-

Für prismatische kurze Ansatzröhren von rechteckig Querschnitt wurde der Ausflusscoefficient μ nahe ebenso gross gefunden wie für cylindrische Röhren im engeren Sinn, von Weisbach = 0,82 f eine Röhre von ungefähr 0,02 und 0,04 Mtr. Seitenlänge des rechteckig Querschnitts und 0,12 Mtr. Länge bei h = 0,6 Mtr., von Michel = 0,80 für eine 0,22 Mtr. lange Röhre von quadratischem Quers und 0,08 Mtr. Seitenlänge bei h = 3,8 bis 6,8 Mtr. —

2) Wenn die cylindrische Ansatzröhre sich in das Innere des Gefässes hinein erstreckt, so ist α kleiner (§. 83, 2), für den vollen Ausfluss somit auch μ kleiner, als im vorigen Fall, im Mittel nach Bid und Weisbach bei sehr kleiner Wanddicke der Röhre:

$$\mu = 0{,}71.$$

Damit und mit $\varphi = 0{,}97$ und $\zeta = 0$ ergiebt sich nach Gl. (7)

$$\alpha\varphi = 0{,}518 \quad \text{und} \quad \alpha = 0{,}534,$$

der Contractionscoefficient also wieder nicht wesentlich verschieden dem Coefficienten der äusseren Contraction des Strahls, wenn er die Wand der inneren Ansatzröhre nicht berührt (§. 83 unter 2). Ein Ausfluss ist schwieriger zu erreichen, als im vorigen Falle; entspr $\mu = 0{,}71$ und $\alpha = 0{,}534$ ist dazu nach (5) erforderlich, dass $h < 1{,}1$

Uebrigens ist α, folglich μ wesentlich abhängig von der Wanddicke der inneren Ansatzröhre. Wenn dieselbe grösser oder die Röhre am mit einem rechtwinkelig umgebogenen Rande versehen ist, so ist grösser und schon dann nicht mehr merklich kleiner, als für eine Ansatzröhre (normale innere Contraction) unter übrigens gleichen ständen, wenn die Wanddicke resp. Randbreite $^1/_5$ der Rohrweite betr.

3) Bei unvollkommener innerer Contraction, d. h. wenn kurze cylindrische Röhre normal an eine kreisförmige Oeffnung der Mitte einer gleichfalls kreisförmigen ebenen Wand $= F$ angesetzt welcher das Wasser in normaler Richtung zugeleitet wird, während das Verhältniss $\frac{A}{F} = n$ nicht sehr klein ist, fand Weisbach den Ausflusscoefficienten μ nahe entsprechend der empirischen Formel

$$\mu = \mu_0(1 + 0{,}102n + 0{,}067n^2 + 0{,}046n^3 \ldots$$

worin μ_0 den Werth von μ für $n = 0$, d. h. bei normaler Contr. unter übrigens gleichen Umständen bedeutet. Als noch etwas besser Versuchen entsprechend empfahl Weisbach folgende Tabelle der Werthe von $\frac{\mu}{\mu_0}$.

n	$\frac{\mu}{\mu_0}$	n	$\frac{\mu}{\mu_0}$	n	$\frac{\mu}{\mu_0}$	n	$\frac{\mu}{\mu_0}$
0	1,000	0,25	1,035	0,5	1,080	0,75	1,138
0,05	1,006	0,3	1,043	0,55	1,090	0,8	1,152
0,1	1,013	0,35	1,052	0,6	1,102	0,85	1,166
0,15	1,020	0,4	1,060	0,65	1,114	0,9	1,181
0,2	1,027	0,45	1,070	0,7	1,127	0,95	1,198

In Betreff einer etwaigen Abweichung der Verhältnisse von denen r Versuche gilt dieselbe Bemerkung, welche der entsprechenden Tabelle §. 83 unter 3) hinzugefügt wurde. Insbesondere sind nach Weisbach ch bei rechteckiger Form von A und F die Verhältnisse $\frac{\mu}{\mu_0}$ nicht erheb- h von den obigen verschieden. —

4) Während der Fall einer partiellen inneren Contraction ohne näher gendes Interesse ist, besonders bei kreisförmigem Rohrquerschnitt kaum kommt, ist dagegen eine andere Abweichung von dem normalen Fall r von technischem Interesse, nämlich eine an eine ebene Gefässwand ief angesetzte cylindrische Röhre. Nach Versuchen von Weis- ch ist dafür μ kleiner, also der Widerstandscoefficient $\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1$ sser, als für normal angesetzte Röhren, und zwar in solchem Grade, dass

$$\zeta = \zeta_0 + 0,303 \sin\delta + 0,226 \sin^2\delta \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

setzt werden kann, wenn mit δ der Richtungswinkel der Rohraxe gegen Normale der Gefässwand und mit ζ_0 der Werth von ζ für $\delta = 0$ be- ichnet wird. Hiernach ist

z. B. für $\delta =$ 10° 20° 30° 40° 50° 60°
$\zeta - \zeta_0 =$ 0,060 0,130 0,208 0,289 0,365 0,432.

Uebrigens musste bei der Weite d die Rohrlänge $> 3d$ gemacht rden, um bei grösseren Winkeln δ einen vollen Ausfluss zu erzielen; die rsuche wurden dann thatsächlich mit längeren Röhren angestellt und n den gefundenen resultirenden Widerstandscoefficienten die anderweitig mittelten Bestandtheile abgezogen, die dem Leitungswiderstande dieser ihren entsprachen.

Ueberhaupt ist es auch bei den technischen Anwendungen gewöhnlich ne längere cylindrische Röhre, durch welche das Wasser aus einem Ge- sse abfliesst; die in diesem §. für verschiedene Fälle besprochenen Werthe n μ können dann dazu dienen, den Widerstandscoefficienten $\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1$

zu bestimmen, der sich auf den Eintritt des Wassers in die Röhre resp. auf die Bewegung desselben bis zu einem Querschnitte bezieht, der um ungefähr den dreifachen Durchmesser von der Eintrittsstelle entfernt ist.

§. 87. Conische Ansatzröhren.

Gemäss der Formel $V = \mu A \sqrt{2gH}$, unter A immer den Inhalt der Mündung, also hier des Rohrquerschnitts am äusseren Ende verstanden, entspricht der nach aussen divergenten kurzen Röhre stets ein kleinerer, der nach aussen convergenten dagegen bis zu einer gewissen Grenze des Convergenzwinkels β (gebildet von zwei diametral gegenüberliegenden Seiten der Kegelfläche) ein grösserer Ausflusscoefficient μ, als einer cylindrischen Ansatzröhre von gleicher Länge und vom Querschnitt A unter sonst gleichen Umständen, wenn in allen Fällen die Röhre scharfkantig an eine kreisförmige Oeffnung in einer ebenen Gefässwand normal angesetzt ist. Dieselbe Röhre giebt freilich als divergente Röhre verwendet eine grössere Ausflussmenge, als wenn sie umgekehrt als convergente Röhre benutzt wird, doch bei Weitem nicht im Verhältniss der beiden Endquerschnitte. Im ersten Falle, in welchem auch nur bei mässiger Divergenz und mässiger Druckhöhe ein voller Ausfluss erzielt werden kann, ist der austretende Strahl mehr oder weniger stark divergent, zerrissen und pulsirend, im zweiten Falle mehr oder weniger äusserlich contrahirt, compact und glatt. Die divergenten Röhren sind ohne praktisches Interesse.

Die umfangreichsten Versuche über den Ausfluss durch conisch convergente Ansatzröhren sind von d'Aubuisson und Castel angestellt worden.* Ausser den Coefficienten μ wurden auch die Geschwindigkeitscoefficienten φ, entsprechend der Formel $u = \varphi \sqrt{2gH}$, auf die in §. 82 angegebene Weise ermittelt. Folgende Tabelle der Werthe μ und φ (und des daraus sich ergebenden Coefficienten $\alpha = \frac{\mu}{\varphi}$ der äusseren Contraction) ist durch Interpolation für nach ganzen Graden wachsende Werthe des Convergenzwinkels β aus der ausgedehntesten jener Versuchsreihen abgeleitet, entsprechend 0,0155 Mtr. Mündungsweite bei 0,04 Mtr. Rohrlänge und $H = h = 3$ Mtr. Druckhöhe. Wenn thatsächlich bis zu $\beta =$ [illegible] der Coefficient φ bald etwas $>$ μ, bald etwas $< \mu$ gefunden wurde, so

* Annales des Mines, 1838, p. 187, und d'Aubuisson, Traité d'hydraulique, §. 49.

ist dies hauptsächlich den Fehlern der Geschwindigkeitsmessung zuzuschreiben, weshalb in der Tabelle bis zu dieser Grenze $\varphi = \mu$ gesetzt wurde.

β Grad.	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$	φ	$\frac{\varphi}{\varphi_0}$	α	β Grad.	μ	$\frac{\mu}{\mu_0}$	φ	$\frac{\varphi}{\varphi_0}$	α
0	0,829	1	0,829	1	1	13	0,945	1,140	0,961	1,159	0,983
1	0,852	1,028	0,852	1,028	1	14	0,943	1,138	0,965	1,164	0,977
2	0,873	1,053	0,873	1,053	1	16	0,938	1,131	0,969	1,169	0,968
3	0,892	1,076	0,892	1,076	1	18	0,931	1,123	0,970	1,170	0,960
4	0,909	1,097	0,909	1,097	1	20	0,922	1,112	0,971	1,171	0,950
5	0,920	1,110	0,920	1,110	1	25	0,908	1,095	0,974	1,175	0,932
6	0,925	1,116	0,925	1,116	1	30	0,896	1,081	0,975	1,176	0,919
8	0,931	1,123	0,933	1,125	0,998	35	0,883	1,065	0,977	1,179	0,904
10	0,937	1,130	0,949	1,145	0,987	40	0,871	1,051	0,980	1,182	0,889
12	0,942	1,136	0,955	1,152	0,986	45	0,857	1,034	0,983	1,186	0,872

Mit wachsendem Convergenzwinkel β nimmt die innere Contraction und in Folge dessen der Geschwindigkeitscoefficient φ zu, während die ssere Contraction zunimmt, also $\alpha = \frac{\mu}{\varphi}$ abnimmt. Anfangs nimmt φ hneller zu, später α schneller ab; die Folge ist, dass $\mu = \alpha\varphi$ zuerst ächst bis zu einem Maximum $= 0{,}945$ bei $\beta = 13^0$ und dann wieder nimmt. Liesse man β wachsen bis 180^0, so würden sich die Coefficienten n Werthen nähern, welche für eine Oeffnung in der dünnen Wand gelten.

Die in der obigen Tabelle hinzugefügten Werthe von $\frac{\mu}{\mu_0}$ und $\frac{\varphi}{\varphi_0}$, tsprechend $\mu_0 = \varphi_0 = 0{,}829$, können als Verhältnisszahlen für solche lle dienen, in welchen der kurzen cylindrischen Ansatzröhre ein anderer sflusscoefficient $\mu_0 = \varphi_0$ entspricht, als 0,829. Wäre er z. B. $= 0{,}81$, wäre für eine kurze conische Ansatzröhre von $\beta = 10^0$ Convergenzinkel bei gleicher Mündungsweite und überhaupt unter sonst gleichen mständen zu setzen:

$$\mu = 1{,}130 \, . \, 0{,}81 = 0{,}915; \quad \varphi = 1{,}145 \, . \, 0{,}81 = 0{,}927.$$

§. 88. Zusammengesetzte Ansatzröhren.

Der Abfluss des Wassers aus einem Gefäss erfolge durch ein System n n unmittelbar auf einander folgenden kurzen cylindrischen öhren mit den Querschnitten F_1, F_2, $F_3 \ldots . F_n$, die somit im Ganzen

als eine zusammengesetzte Röhre mit absatzweise wechselndem Querschnitt betrachtet werden können. An den Uebergangsstellen von irgend einer Rohrstrecke zur folgenden, sowie am Anfange der ersten und am Ende der letzten befinde sich im Allgemeinen noch eine Wand mit einer Oeffnung, die höchstens = dem kleineren der Querschnitte der angrenzenden Rohrstrecken ist, und zwar seien $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ diese Oeffnungen zu Anfang der Rohrstrecken, deren Querschnitte beziehungsweise $= F_1, F_2, F_3 \ldots F_n$ sei, A die Oeffnung am Ende der n^{ten} Rohrstrecke oder die Mündung der zusammengesetzten Röhre. Bei dem Durchfluss des Wassers durch die Oeffnungen $A_1, A_2 \ldots$ findet im Allgemeinen noch eine weitere Contraction statt, und es seien $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ die betreffenden inneren Contractionscoefficienten, α der äussere Contractionscoefficient für die Mündung A. Durch die plötzliche Querschnittsvergrösserung von $\alpha_1 A_1$ bis F_1, von $\alpha_2 A_2$ bis $F_2 \ldots$, resp. durch die plötzliche Geschwindigkeitsabnahme von $\frac{V}{\alpha_1 A_1}$ bis $\frac{V}{F_1}$, von $\frac{V}{\alpha_2 A_2}$ bis $\frac{V}{F_2} \ldots$ (unter V das pro Sec. ausfliessende Wasservolumen verstanden) wird ein Widerstand verursacht, der nach §. 76, G. 7 gemessen wird durch die Widerstandshöhe:

$$B = \frac{1}{2g}\left[\left(\frac{V}{\alpha_1 A_1} - \frac{V}{F_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{V}{\alpha_n F_n} - \frac{V}{F_n}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{V^2}{2g}\sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{1}{\alpha_m A_m} - \frac{1}{F_m}\right)^2.$$

Wenn man dagegen die übrigen Widerstände vernachlässigt, die durch innere und äussere Reibung verursacht werden, so ist also der resultirende Widerstandscoefficient der zusammengesetzten Ansatzröhre, d. i. das Verhältniss der Widerstandshöhe zur Ausflussgeschwindigkeitshöhe §. 76, G.

$$\zeta = B : \frac{u^2}{2g} = B : \frac{1}{2g}\left(\frac{V}{\alpha A}\right)^2 = \sum_{m=1}^{m=n}\left(\frac{\alpha A}{\alpha_m A_m} - \frac{\alpha A}{F_m}\right)^2 \ldots$$

Daraus ergeben sich die den Gleichungen

$$u = \varphi\sqrt{2gH} \quad \text{und} \quad V = \mu A\sqrt{2gH}$$

entsprechenden Coefficienten φ und μ:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} \quad \text{und} \quad \mu = \alpha\varphi.$$

Wenn insbesondere $F_1 = F_2 \ldots = F_n = F$,

$$A_1 = A_2 \ldots = A_n = A$$

ist, und auch alle Contractionscoefficienten einander gleich gesetzt werden können, so ist

$$\zeta = n\left(1 - \frac{\alpha A}{F}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Bei einem Versuche von Eytelwein war z. B. eine cylindrische Ansatzröhre von 0,94 Mtr. Länge und 0,026 Mtr. Durchm. in 3 Abtheilungen getheilt durch Wände am Anfang, am Ende und an zwei mittleren Stellen mit kreisförmigen Oeffnungen von 0,0065 Mtr. Durchm. Es war also $n = 3$ und $\frac{A}{F} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$. Setzt man mit Rücksicht darauf, dass bei diesem Querschnittsverhältniss und bei den mittleren Lagen der Oeffnungen in den 4 Wänden die Contraction als nahezu normal zu betrachten ist, $\alpha = 0,64$ (§. 83, 1), so folgt:

$$\zeta = 3\left(1 - \frac{0,64}{16}\right)^2 = 2,7648; \quad \varphi = 0,5155; \quad \mu = 0,330.$$

Der Versuch ergab $\mu = 0,331$. Wenn die Länge der Röhre, also die Entfernung der auf einander folgenden Wände bis zu einer gewissen Grenze vermindert wurde, so nahm μ zu, offenbar weil sich dann der Wasserstrom nach dem Durchgange durch eine Oeffnung nicht mehr bis zum vollen Querschnitt der Röhre ausbreiten konnte, bevor er durch die folgende Oeffnung zur abermaligen Zusammenziehung genöthigt wurde. —

Von dieser Vergrösserung des Widerstandes durch mehrfache Querschnittsänderung lässt sich u. A. bei Kolbenliederungen eine nützliche Anwendung machen, wenn eine möglichst reibungslose Bewegung des Kolbens in einem Cylinder beabsichtigt wird, der Art jedoch, dass von der auf der einen Seite desselben befindlichen Flüssigkeit nur sehr wenig durch den Spielraum zwischen Kolben und Cylinderwand nach der anderen Seite soll entweichen können. Dieser doppelte Zweck kann bis zu gewissem Grade durch ringförmige Nuthen erreicht werden, die an der Umfläche des der Anzahl $= n$ dieser Nuthen entsprechend dick zu machenden Kolbens sich befinden (Fig. 36), und wodurch die übrigens sehr kleine Weite des als ringförmige Ansatzröhre zu betrachtenden Zwischenraums zwischen Kolben und Cylinderwand stellenweise plötzlich vergrössert wird. Die zusammengesetzte Ansatzröhre besteht sich in solchem Falle aus $(n + 1)$ Abtheilungen mit sehr kleinen gleichen Querschnitten

Fig. 36.

$$F_1 = F_3 = F_5 \ldots = F_{2n+1},$$

zwischen denen n Abtheilungen mit erheblich grösseren Querschnitten

$$F_2 = F_4 = F_6 \ldots = F_{2n}$$

sich befinden, während hier

$$A_1 = A_2 = A_3 \ldots = A_{2n} = A_{2n+1} = A = F_1$$

ist. Die Contractionscoefficienten für den Eintritt der Flüssigkeit in die engeren Abtheilungen sind einander gleich zu setzen:

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 \ldots = \alpha_{2n+1},$$

die übrigen: $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 \ldots = \alpha_{2n} = \alpha = 1$. Somit ist nach Gl. 1

$$\zeta = (n + 1)\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 + n\left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2 \quad \ldots\ldots 3.$$

Die innere Contraction beim Eintritt in die engeren Abtheilungen findet in dem durch Fig. 36 angedeuteten Falle nur partiell (am inneren Rande) statt, so dass mit Rücksicht auf §. 84, Gl. (2) hier etwa

$$\alpha_1 = 0,64\,(1 + 0,155\,.\,0,5) = 0,6896$$

gesetzt werden kann, womit sich

$$\left(\frac{1}{\alpha_1} - 1\right)^2 = 0,2025$$

oder in runder Zahl = 0,2 ergiebt, somit

$$\zeta = \left[0,2 + \left(1 - \frac{F_1}{F_2}\right)^2\right] n + 0,2 \quad \ldots\ldots\ldots 4$$

Je kleiner $\frac{F_1}{F_2}$ ist, desto mehr nähert sich ζ der Grenze

$$\zeta = 1,2\,n + 0,2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ist dann z. B.	$n =$	2	4	6	8
so wird	$\zeta =$	2,6	5	7,4	9,8
	$\mu = \varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} =$	0,527	0,408	0,345	0,304

und es ist $V = \mu F_1 \sqrt{2gH}$ um so kleiner, als auch F_1 im vorliegenden Falle sehr klein ist.

β. Bewegung des Wassers in Röhren.

§. 89. Leitungswiderstand gerader cylindrischer Röhren.

Der Ausfluss des Wassers aus einem Gefässe in ein anderes, tiefer gelegenes, oder in die freie Luft erfolge unter gleich bleibenden Umständen (im Beharrungszustande) durch eine gerade (oder nur schwach gekrümmte) cylindrische Röhre von solcher Länge l, dass ihr Leitungswiderstand einen merklichen Einfluss auf die mittlere Geschwindigkeit u des Wassers in der Röhre und auf das Wasservolumen $V = Fu$ ausübt, welches pro Sec. durch jeden Querschnitt F der Röhre hindurchfliesst. Dieser Leitungswiderstand, von der inneren und äusseren Reibung herrührend, ist erfahrungsmässig von der Pressung unabhängig, wie u. A. Darcy dadurch überzeugend nachwies, dass er die Bewegung ganz unverändert fand, als der äussere Druck $= p_0$ am Oberwasserspiegel und $= p$ an der Mündung resp. am Unterwasserspiegel beide um gleich viel, und zwar um mehr als eine Atmosphäre vergrössert wurden. Der Zustand des Wassers in verschiedenen Querschnitten der Röhre unterscheidet sich aber nur durch die verschiedene Pressung in denselben, und ist folglich der Leitungswiderstand proportional der Rohrlänge l, oder die entsprechende Widerstandshöhe $= lB_1$, wenn mit B_1 die an jeder Stelle gleiche Widerstandshöhe pro 1 Mtr. Rohrlänge bezeichnet wird. Ist also noch $\zeta \frac{u^2}{2g}$ die Widerstandshöhe, welche etwaigen besonderen Widerständen ausser dem allgemeinen Leitungswiderstande (z. B. nach §. 86 dem durch innere Contraction verursachten Widerstande beim Einfluss des Wassers in die Röhre) entspricht, so ist die gesammte Widerstandshöhe

$$B = \zeta \frac{u^2}{2g} + lB_1$$

und damit nach der Gleichung (§. 78, Gl. 5)

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - B = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} - B,$$

unter h die constante Höhe des Oberwasserspiegels über dem Schwerpunkt der Mündung resp. über dem Unterwasserspiegel verstanden, wenn diese Gleichung mit $u_0 = 0$ auf die ganze Bewegung vom Oberwasserspiegel bis zur Mündung bezogen wird,

$$(1 + \zeta) \frac{u^2}{2g} + lB_1 = H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Diese Gleichung in Verbindung mit $u = \frac{V}{F}$ kann bei gegebenen Werthen von l, F, H zur Bestimmung von B_1 dienen, wenn V durch Messung des in einer gewissen Zeit ausfliessenden Wasserquantums und ζ durch anderweitige Versuche bekannt ist.

Um diese Bestimmung von der Messung des Ausflussquantums, namentlich aber von den nur mehr oder weniger unsicher bekannten Coefficienten besonderer Widerstände unabhängig zu machen, können auch, wie es u. A. namentlich von Darcy geschehen ist, die Versuche in der Weise angestellt werden, dass zwei vertical nebeneinander stehende, oben offene Glasröhren (Piezometer) an ihren unteren Enden durch entsprechende Verbindungsröhren (biegsame dünne Bleiröhren) mit der zu prüfenden Leitungsröhre an solchen zwei Stellen A_0 und A in Communication gesetzt werden, zwischen denen die Röhre gerade und frei von besonderen Widerständen, also $B = lB_1$ ist, wenn l die Länge der Rohrstrecke A_0A bedeutet. Ist dann h die Höhe von A_0 über A, p_0 die Pressung bei A_0, p dieselbe bei A und p' der äussere Druck (Atmosphärendruck) an der Stelle der Piezometer, so ist im Beharrungszustande die Höhe des Wasserspiegels im ersten Piezometer über $A_0 = \frac{p_0 - p'}{\gamma}$, dieselbe im zweiten über $A = \frac{p - p'}{\gamma}$, also die Niveaudifferenz in beiden $= h + \frac{p_0 - p}{\gamma} =$ der wirksamen Druckhöhe H für die Rohrstrecke A_0A, welche (wegen Gleichheit der Geschwindigkeiten u_0 und u in den Querschnitten bei A_0 und A) hier der Widerstandshöhe B gleich ist. Mit der leicht zu messenden Niveaudifferenz H ergiebt sich also sofort $B_1 = \frac{H}{l}$ um so sicherer, je grösser H und l sind. —

Versuche zur Bestimmung der Leitungswiderstandshöhe B_1 pro 1 Mtr. Rohrlänge sind ausschliesslich mit Röhren von kreisförmigem Querschnitte (Durchmesser $= d$) und zwar hauptsächlich mit gusseisernen Röhren angestellt worden, wie solche zu Wasserleitungen verwendet zu werden pflegen. Indessen liegen auch manche Versuche vor mit gezogenen schmiedeisernen, ferner mit Messing-, Zink-, Blei-, Asphalt- und Glasröhren, welche erkennen lassen, dass (bei gleich regelmässiger Gestalt und bei ähnlichem Rauhigkeitsgrade der inneren Oberfläche) das Material der Röhre nicht einen wesentlichen Einfluss auf den Leitungswiderstand ausübt. Durch beträchtliche Rauhigkeit der Wände kann freilich B_1 wesentlich grösser werden, z. B. bei ordinären Holzröhren nach Weisbach $1^3/_4$ mal so gross wie bei reinen Metallröhren; bei gusseisernen

Röhren, die durch den Gebrauch mit Rost und Niederschlägen verunreinigt sind, nach Darcy mehr als doppelt so gross wie bei neuen oder gereinigten Röhren. Zur Bestimmung einer empirischen Formel als Ausdruck des Abhängigkeitsgesetzes der Grösse B_1 müssen natürlich solche undefinirbaren und somit alle Gesetzmässigkeit störenden Fälle von aussergewöhnlicher [...]uhigkeit oder sonstiger Abweichung von der genau cylindrischen Form der Röhre möglichst ausgeschlossen werden (vorbehaltlich einer je nach Umständen verschiedenen schätzungsweisen Vergrösserung der so berechneten Werthe von B_1 bei den technischen Anwendungen); die Zweifel, welche noch heute über das Abhängigkeitsgesetz jener Widerstandshöhe B_1 [...]stehen, sind vorzugsweise dadurch verursacht, dass bei den betreffenden Versuchen nicht die wünschenswerthe Sorgfalt in der fraglichen Hinsicht [...]gewendet zu werden pflegte.

Gewöhnlich ist man von der Vorstellung ausgegangen, dass das Wasser [...] wie ein cylindrischer Körper ohne relative Bewegung im Inneren [...]ch die Röhre bewegt, und somit der Leitungswiderstand in der äusseren [...]bung zwischen Rohrwand und Wasser besteht. Ist diese $= R'$ pro Quadratm., und U der Umfang des Rohrquerschnitts F, so ist danach der [...]itungswiderstand pro 1 Mtr. Rohrlänge $= R'U$, seine Arbeit pro Sec. [...] $R'Uu$, und folglich seine Arbeit pro 1 Kgr. hindurch fliessenden [...]assers, d. h. die Widerstandshöhe (§. 76)

$$B_1 = \frac{R'Uu}{\gamma Fu} = \frac{R'}{\gamma}\frac{U}{F} = \frac{R'}{\gamma}\frac{4}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

[...]it $d = \frac{4F}{U}$ = dem Durchmesser bei kreisförmigem resp. = dem sogen. [...]ittleren Durchmesser bei beliebig gestaltetem Querschnitt.

Indem man somit die Widerstandshöhe B_1 als umgekehrt proportional [...]r Rohrweite d (resp. der mittleren Rohrweite bei beliebiger Querschnitts[...]rm) voraussetzte, suchte man nur noch R' resp. $\frac{R'}{\gamma}$ als Function der [...]ittleren Geschwindigkeit u aus den Versuchen abzuleiten, und zwar sind es [...]rzugsweise 51 Beobachtungen von Couplet (7 Beobachtungen), Bossut (6 Beob.) und Dubuat (18 Beob.), welche hierbei wiederholt zu Grunde [...]legt wurden. Bei denselben war $d = 0{,}027$ bis $0{,}49$ Mtr., u höchstens [...] 2 Mtr. pro Sec.

Nach dem Vorgange von Woltman (1790) wurde

$$\frac{R'}{\gamma} = au^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

gesetzt und darin von ihm selbst $n = \frac{7}{4}$, später (1796) von Eytelwein näherungsweise $n = 2$, genauer $n = \frac{35}{18}$, endlich von St. Venant* $n = \frac{12}{7}$ bestimmt; des Letzteren Formel, welche die allgemeine Form (3) am besten mit den fraglichen 51 Versuchen in Uebereinstimmung zu bringen scheint, ist

$$\frac{R'}{\gamma} = 0{,}0002956\,u^{\frac{12}{7}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Prony (1802) legte die Form

$$\frac{R'}{\gamma} = au^2 + bu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

zu Grunde und folgerte aus den genannten 51 Versuchen von Couplet, Bossut und Dubuat

$$\frac{R'}{\gamma} = 0{,}000348\,u^2 + 0{,}0000173\,u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Auch Eytelwein schloss sich dieser Form später (1814) an, fand aber

$$\frac{R'}{\gamma} = 0{,}000280\,u^2 + 0{,}0000224\,u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

während d'Aubuisson die ursprüngliche Prony'sche Formel nur etwas im Sinne dieser Eytelwein'schen Bestimmung änderte, indem er annahm

$$\frac{R'}{\gamma} = 0{,}000343\,u^2 + 0{,}0000188\,u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Weisbach setzte die specif. Leitungswiderstandshöhe

$$B_1 = \zeta_1 \frac{u^2}{2g} = \frac{\lambda}{d}\frac{u^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

in welchem Ausdruck ζ_1 den specifischen, d. h. auf die Längeneinheit bezogenen Leitungswiderstandscoefficienten bedeutet. Gemäss der allgemeinen Formel (5) und mit Rücksicht auf Gl. (2) wäre dann

$$\lambda = \frac{8g}{u^2}\frac{R'}{\gamma} = \alpha + \frac{\beta}{u} \text{ mit } \alpha = 8ga,\ \beta = 8gb \quad \ldots \quad (10)$$

Indem aber Weisbach ausser den mehrgenannten 51 Beobachtungen von Couplet, Bossut und Dubuat noch 12 weitere Versuche benutzte (11 von ihm selbst, einen von Gueymard in Grenoble angestellt), bei denen $d = 0{,}033$ bis $0{,}275$ Mtr. war und u bis 4,6 Mtr. pro Sec. betrug, fand er einen besseren Anschluss an die Gesammtheit der 63 Versuche auf Grund der Formel

* Formules et tables nouvelles etc. Paris 1851, p. 71.

$$\lambda = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{u}},$$

eren Constante α und β durch die Methode der kleinsten Quadrate be-
immt wurden:

$$\lambda = 0{,}01439 + \frac{0{,}009471}{\sqrt{u}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

amer bei Voraussetzung des Meters als Längeneinheit.

Versuche, welche Weisbach später mit Glas-, Messing- und Zink-
öhren anstellte, umfassen noch grössere Geschwindigkeiten bis $u = 21{,}5$ Mtr.
ro Sec. Obschon auch sie noch eine ziemlich befriedigende Ueberein-
immung mit der Gl. (11) ergaben, liessen sie doch erkennen, dass λ
icht nur mit wachsender Geschwindigkeit, sondern auch (in
eringerem Grade) mit wachsender Röhrenweite abnimmt.

Sehr zuverlässige Beobachtungen sind von dem französischen Ingenieur
arcy* an der Wasserleitung Chaillot in Paris mit 22 verschiedenen
öhrenleitungen angestellt worden, und zwar mit gusseisernen, gezogenen
isernen, Blei-, Glas- und Asphaltröhren. Die Röhren waren neu oder
enigstens gereinigt mit Ausnahme von 3 gusseisernen Röhrensträngen,
ie längere Zeit im Gebrauch gewesen und dadurch mit Niederschlägen
us dem Wasser verunreinigt waren. Die Asphaltröhren waren von der
rt, wie sie in Frankreich wegen ihrer Wohlfeilheit und Haltbarkeit viel-
ach angewendet werden, aus Eisenblech cylindrisch gebogen, an den
ändern vernietet, mit Zink überzogen und schliesslich innen und aussen
it einer Lage Bitumen überdeckt;** die einzelnen Röhrenstücke werden
i einander eingeschraubt. Die eisernen gezogenen und die Glasröhren
aren durch übergezogene Muffen, die Bleiröhren durch Löthung in den
össen verbunden. Die Röhrenstränge, an denen die Messungen ausge-
ührt wurden, waren meist etwas über 100 Mtr., die aus den Glas- und
leiröhren gebildeten ungefähr halb so lang; die Durchmesser im Lichten
etrugen $d = 0{,}012$ bis 0,5 Mtr., die mittleren Geschwindigkeiten $u = 0{,}16$
s 5 Mtr. pro Sec.

Darcy folgert aus seinen Versuchen, dass der Leitungswiderstand in
öherem Grade, als bisher angenommen zu werden pflegte, vom Material
nd vom oberflächlichen Zustande der Röhren abhängig sei, und dass der

* Recherches experimentales relatives au mouvement de l'eau dans les
yaux. Paris 1857.

** Les fontaines publiques de la ville de Dijon par Henry Darcy.
aris 1856, p. 632.

Einfluss des Materials nur in dem Grade mehr und mehr verschwinde, als die Röhren bei längerem Gebrauch durch Niederschläge aus dem Wasser verunreinigt werden; dadurch soll die Widerstandshöhe auf etwa das Doppelte des Werthes für neue oder gereinigte Röhren wachsen, eine Angabe, die bei der Unmöglichkeit, den Grad der Verunreinigung bestimmt zu definiren, ohne allen wissenschaftlichen und selbst nur von zweifelhaftem praktischem Werth ist. Ueberhaupt kam es Darcy nicht sowohl darauf an, das Gesetz des Leitungswiderstandes vermittels seiner schätzbaren Versuche näher aufzuklären, als er vielmehr nur empirische Regeln suchte, nach denen die Leistungsfähigkeit der Röhrenleitungen in ihrer gewöhnlichen Unvollkommenheit und mit Rücksicht auf ihre Verunreinigung nach längerem Gebrauch beurtheilt werden kann; in diesem Sinne empfiehlt er für den technischen Gebrauch zu setzen, falls $u > 0,2$ Mtr. ist,

$$\frac{R'}{\gamma} = \left(0,000507 + \frac{0,00001294}{d}\right) u^2 \quad \ldots\ldots\ldots$$

womit die Widerstandshöhe $B_1 = \frac{R'}{\gamma}\frac{4}{d}$ ungefähr doppelt so gross gesetzt wird, als sie für neue oder gereinigte gusseiserne Röhren gefunden wurde. Der Coefficient $\lambda = \frac{8g}{u^2}\frac{R'}{\gamma}$ des Ausdrucks (9) für die Widerstandshöhe B_1, welcher nach den früheren Annahmen nur mit wachsendem u, nach den späteren Weisbach'schen Versuchen (in übrigens nicht näher festgestellter Weise) mit wachsenden Werthen von u und d abnahm, würde nach der Darcy'schen Formel nur mit wachsendem Durchmesser d abnehmen.

Eine mehr vollständige Verwerthung der Darcy'schen Versuche ist von Gauchler versucht worden,* welcher daraus für die Widerstandshöhe die Formel

$$B_1 = \left(\frac{u^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{4}\, u^{\frac{1}{4}}}{\alpha d^{\frac{1}{3}}}\right)^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

abgeleitet hat, worin

für die Asphalt- und Bleiröhren . . . . $\alpha = 7,0$
" " Glasröhren . . . . $\alpha = 6,7$
" " gereinigten oder neuen gusseisernen Röhren $\alpha = 6,6$
" " gezogenen eisernen Röhren . . . . $\alpha = 6,4$
" " unreinen gusseisernen Röhren . . . . $\alpha = 5,5$

gesetzt werden soll, so dass danach insbesondere das Vergrösserungs-

* Comptes rendus v. 22. April 1867.

ltniss des Leitungswiderstandes gusseiserner Röhren durch ihre Verun-inigung nach längerem Gebrauch

$$= \left(\frac{6,6}{5,5}\right)^4 = 2,07$$

setzt ist. Aus Gl. (13) und (9) folgt

$$\lambda = \frac{2g}{u^2} d \left(\frac{u^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{4} u^{\frac{1}{4}}}{a d^{\frac{1}{3}}}\right)^4 = \frac{2g}{\alpha^4} \frac{\left(1 + \frac{d}{4u^{\frac{1}{4}}}\right)^4}{d^{\frac{1}{3}}} \quad \ldots (14),$$

nach zwar λ in Uebereinstimmung mit sonstigen Erfahrungen mit wach-idem u beständig abnehmen, bezüglich der Abhängigkeit von d aber das enthümliche Verhalten stattfinden würde, dass es für verschiedene mitt-e Geschwindigkeiten verschiedene bestimmte Rohrweiten gäbe, für welche in Minimum ist, nämlich entsprechend

$$d^{-\frac{1}{12}} + \frac{1}{4u^{\frac{1}{4}}} d^{\frac{11}{12}} = min.$$

$$-\frac{1}{12} d^{-\frac{13}{12}} + \frac{1}{4u^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{11}{12} d^{-\frac{1}{12}} = 0; \qquad d = \frac{4}{11} u^{\frac{1}{4}} \ldots (15),$$

z. B. $d =$	0,306	0,364	0,432	0,514	Mtr.
für $u =$	0,5	1	2	4	„

Die Gauchler'sche Formel hat einen rein empirischen Charakter und t sich mit einfachen theoretischen Vorstellungen über die Wirkungs-se der inneren und äusseren Reibung kaum in Zusammenhang bringen. h enthalten die für verschiedene Fälle ermittelten Werthe des Coeffi-ten α nicht nur den Einfluss des Materials und der Oberflächenbe-ffenheit der Röhren, sondern auch den Einfluss der von ihrer Fabrica-smethode abhängigen und deshalb mehr oder weniger zufälligen Ab-chung von der genau cylindrischen Form. Insbesondere sind (wie zen in seiner im folgenden §. zu besprechenden Abhandlung hervorhebt) er den verunreinigten gusseisernen auch die Glasröhren, die Asphalt-ren und die engeren gezogenen Röhren in dieser letzteren Hinsicht m zur Ableitung des wahren Widerstandsgesetzes brauchbar, die Glas-ren wegen ihrer meist conischen Form, die bei dem von Darcy be-ten Röhrenstrange eine Schwankung des lichten Durchmessers zwischen l4 und 0,053 Mtr. zur Folge hatte, die Asphaltröhren wegen ungleicher

Dicke der nur geschmolzen aufgebrachten und nicht weiter ausgeglichenen inneren Asphaltschicht, die gezogenen Röhren endlich mit Rücksicht auf die Schweissnaht, die wenigstens bei den engeren dieser Röhren (von 0,0122 und 0,0266 Mtr. Drchm.) von merklich störendem Einflusse sein konnte. —

Im Vorstehenden wurde nur die Abhängigkeit des Leitungswiderstandes von der Weite und Beschaffenheit der Röhren und von der mittleren Geschwindigkeit in Betracht gezogen. Dass auch verschiedenartige Flüssigkeiten verschiedene Widerstände, wenigstens verschiedene Coefficienten der betreffenden Formeln für B_1 bedingen werden, ist selbstverständlich. Wenn aber auch in dieser Hinsicht, ebenso wie bei den vorher angeführten Formeln, speciell Wasser als solches (nicht in dem weiteren Sinne als Repräsentant irgend einer tropfbaren Flüssigkeit) vorausgesetzt wird, so bleibt noch eine Abhängigkeit des Leitungswiderstandes vom Wärmezustande, also von der Pressung und Temperatur des Wassers denkbar. Dass erstere keinen merklichen Einfluss hat, ist schon früher angeführt worden; ein Einfluss der Temperatur ist dagegen schon von Gerstner (1800) wenigstens bei engen Röhren als sehr merklich nachgewiesen worden der Art, dass die Ausflussmenge unter übrigens gleichen Umständen sich verdoppeln kann, wenn die Temperatur um 30° C. wächst.*

Eingehender ist dieser merkwürdige Einfluss später von Hagen** untersucht worden, freilich auch nur mit Röhren von geringeren Weiten, als sie bei technischen Ausführungen meistens vorkommen, und bei mässigen Geschwindigkeiten. Hagen benutzte 3 sehr sorgfältig cylindrisch hergestellte, aus zusammengelöthetem Messingblech über Stahldrähten gezogene Röhren von ungefähr 2,8 Millim., 4 und 6 Millim. Weite, die erste etwas unter 0,5 Mtr., die beiden letzteren etwas über 1 Mtr. lang. Die Geschwindigkeiten waren: $u = 0,07$ bis 0,88 Mtr. pro Sec., die Temperaturen bis $\tau = 67°$R. Er fand, dass die Ausflussmenge V bei successiver Erwärmung des Wassers unter sonst gleich bleibenden Umständen anfangs wächst, ein Maximum erreicht, darauf fast ebenso schnell wieder fällt, als sie vorher gestiegen war, ein Minimum erreicht (bei einer um 10° bis ... höheren, als der dem Maximum entsprechenden Temperatur), endlich wieder steigt, jedoch langsamer, als sie früher zu- und dann wieder abgenommen

* Gilbert's Annalen. Bd. V, S. 160 und Gerstner's Handbuch der Mechanik, Bd. II, S. 191.

** Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Bewegung des Wassers in Röhren. Eine in der Kgl. Akad. der Wissensch. gelesene Abhandl. Berlin 1854.

atte. Die beiden Temperaturen, welche dem Maximum und Minimum on V, also dem Minimum und Maximum des Widerstandes entsprechen, ind abhängig von der Geschwindigkeit und von der Röhrenweite; sie sind m so niederer, je grösser u und d sind, und können unter dem Gefrierunkt verschwinden, so dass dann nur der von Hagen so genannte zweite chenkel der Geschwindigkeitsscale (der Curve, deren Abscissen $= \tau$ und eren Ordinaten $= u$ oder $= V$ sind) in die Erscheinung tritt, also nur ne stetige langsame Zunahme von V zugleich mit τ beobachtet wird. Bei n in der Praxis vorkommenden Verhältnissen ist dies gewöhnlich der all, nämlich nach Hagen immer dann, wenn

$$ud > 0{,}00575 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

r den Meter als Längeneinheit ist. Für diesen Fall oder überhaupt für n zweiten Schenkel der Geschwindigkeitsscale ergab sich aus den Verchen (bei denen thatsächlich $ud < 0{,}00575$ war) mit Rücksicht auf Gl. (9)

$$\lambda = \frac{0{,}000496\,(22{,}6 - \sqrt{\tau})}{\sqrt[4]{ud}} \ldots\ldots\ldots\ldots (17),$$

nn die Temperatur τ in Réaumur'schen Graden ausgedrückt wird. Insondere

$$\lambda = \frac{0{,}01}{\sqrt[4]{ud}}$$

rde hiernach z. B. $\tau =$ nahe 6° R. oder 7,5° C. entsprechen, und es rde der Coefficient λ mit wachsenden Werthen von u und d gleichem Grade abnehmen.

Für den ersten Schenkel der Geschwindigkeitsscale, also für solche mperaturen, die kleiner sind, als die dem Maximum von V oder u bei n betreffenden Werthen von d entsprechenden Temperaturen, ergab sich n anderes Gesetz des Widerstandes. Der Hauptbestandtheil von B_1 nnte dann näherungsweise in der Form

$$B_1 = b\,\frac{u}{d^2},\ \text{entsprechend}\ \lambda = \frac{\beta}{ud} \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

rgestellt werden, unter β einen Coefficienten verstanden, der ungefähr ach dem Gesetze

$$\beta = \beta_0\,(\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{\tau}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

it wachsender Temperatur $= \tau^0$ R. abnimmt.

§. 90. Gesetz des Leitungswiderstandes nach Hagen mit Rücksicht auf die Versuche von Darcy.

Hagen* hat es in neuester Zeit unternommen, die Darcy'schen Versuche nicht nur im Sinne einer empirischen Praxis, sondern zugleich in wissenschaftlicher Weise zu verwerthen zur näheren Aufklärung des Gesetzes des von zufälligen Nebenumständen möglichst befreiten Leitungswiderstandes in Röhren von solchen Durchmessern und für solche Geschwindigkeiten, wie sie bei den technischen Ausführungen vorzukommen pflegen. Indem zu dem Ende Hagen ausser den Versuchen mit den erheblich verunreinigten gusseisernen Röhren auch noch die mit den Glas-, Asphalt- und den engeren gezogenen Röhren ausschied (aus den im vorigen näher angeführten Gründen), blieben ihm im Ganzen 87 Messungen für mittlere Geschwindigkeiten $u = 0,16$ bis 5 Mtr. an 12 verschiedenen Röhren (8 neuen oder gebrauchten, aber gereinigten gusseisernen, 3 Blei-Röhren und einer gezogenen eisernen Röhre) von $d = 0,014$ bis 0,5 Mtr. Durchm. zur Verfügung. Von verschiedenen versuchten Formeln zur Darstellung des Abhängigkeitsgesetzes der Widerstandshöhe B_1 pro 1 Mtr. Rohrlänge zeigte sich dann die Formel

$$B_1 = a\frac{u^2}{d} + b\frac{u}{d^2} \dots\dots\dots\dots$$

am meisten zutreffend, deren Coefficienten a und b sich als nicht merklich abhängig vom Material der Röhre ergaben (wenigstens nicht so sehr, dass nach Hagen's Meinung die Differenzen nicht durch die Mängel der cylindrischen Form und der Messungen des Durchmessers d erklärt werden könnten), und deren wahrscheinlichste Werthe durch die Methode der kleinsten Quadrate zu

$$a = 0,0011193; \quad b = 0,000005336 \dots\dots$$

bestimmt wurden. Um dabei den mit den engsten Röhren angestellten Beobachtungen nicht einen allzu grossen Einfluss einzuräumen, wurden diese Coefficienten a und b so berechnet, dass die Summe der Fehlerquadrate nicht von B_1 selbst, sondern von

$$\frac{B_1 d}{u} = au + \frac{b}{d}$$

* Ueber die Bewegung des Wassers in cylindrischen, nahe horizontalen Leitungen. Mit einem Anhange: über die Bewegung des Wassers in vertical abwärts gerichteten Röhren. Von G. Hagen. Aus den Abhandlungen der Kgl. Akad. der Wissensch. zu Berlin 1869. Berlin 1870.

ein Minimum wurde. Uebrigens unterwirft sie Hagen einer nachträglichen Correction, um sie mit seinen eigenen, im vorigen §. erwähnten Beobachtungen an sehr engen Röhren in Uebereinstimmung zu bringen, durch welche wenigstens der Coefficient b des bei sehr kleinen Rohrweiten d überwiegend grossen zweiten Gliedes im Ausdrucke (1) von B_1 zuverlässiger bestimmt werden konnte, um so mehr als bei jenen Versuchen von Hagen eine grössere Sorgfalt auf die Darstellung einer möglichst genau cylindrischen Form und auf die genaue Messung der Durchmesser verwendet worden war. Auf Grund derselben setzt Hagen diesen mit der Temperatur wesentlich veränderlichen Coefficienten neuerdings bei Voraussetzung des metrischen Maasses, unter τ aber die Temperatur in Réaumur'schen Graden verstanden,

$$b = 0{,}000005871 - 0{,}000000267\tau + 0{,}00000000735\tau^2 \,.\,.\, (3).$$

Hernach würde der aus den Darcy'schen Beobachtungen abgeleitete Werth (2) von b der Temperatur $\tau = 2{,}11$ Grad R. entsprechen. Weil aber die auf die engeren Röhren sich beziehenden und den Coefficienten b somit vorzugsweise bestimmenden dieser Beobachtungen im October und im Mai angestellt wurden, wobei die (von Darcy nicht angegebene) Wassertemperatur wenigstens 10°R. betragen mochte, so setzt Hagen nach Gl. (3)

$$b = 0{,}000003936 \text{ für } \tau = 10^0\text{R} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (4),$$

und findet damit schliesslich den wahrscheinlichsten Werth des anderen Coefficienten:

$$a = 0{,}0012017 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (5).$$

Der Werth (4) von b ist zwar nicht unbeträchtlich kleiner, als der ursprünglich gefundene Werth (2) desselben, doch ist der Unterschied = 0,0000014 nicht viel grösser, als der wahrscheinliche Fehler von b bei der anfänglichen Bestimmung, der = 0,0000010 ermittelt wurde.

Wenn der Ausdruck (§. 89, Gl. 9)

$$B_1 = \frac{\lambda}{d}\frac{u^2}{2g} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (6)$$

zu Grunde gelegt wird, so ist nach Gl. (1)

$$\lambda = 2g\left(a + \frac{b}{ud}\right) = \alpha + \frac{\beta}{ud} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (7)$$

und darin mit $g = 9{,}81$ und wenn τ jetzt die Temperatur in Celsius'schen Graden bedeutet, nach (3) und (5)

$$\alpha = 0{,}023577$$
$$\beta = 0{,}00011519 - 0{,}000004191\tau + 0{,}00000009229\tau^2,$$

z. B.	$\beta . 10^8 =$	9654	8251	7309	6829
für	$\tau =$	5°	10°	15°	20° C.

Folgende Tabelle enthält die Werthe von λ, welche hiernach verschiedenen Werthen von $\frac{1}{ud}$ insbesondere für $\tau = 10°$C. entsprechen, und welche bei den Anwendungen mit Rücksicht auf die Unvollkommenheiten der cylindrischen Form um etwa 20 Procent, mit Rücksicht zugleich auf die Verunreinigung und Verengung der Röhren durch Niederschläge aus dem Wasser um 50 und mehr Procent grösser in Rechnung gebracht werden mögen, sofern nicht etwa dieser letztere Umstand dadurch berücksichtigt wird, dass man die abzuführende Wassermenge entsprechend grösser setzt als dem Bedürfniss zur Zeit der ersten Anlage entspricht.

$\frac{1}{ud}$	λ	$\frac{1}{ud}$	λ	$\frac{1}{ud}$	λ	$\frac{1}{ud}$	λ
1	0,02366	11	0,02448	21	0,02531	31	0,02613
2	0,02374	12	0,02457	22	0,02539	32	0,02622
3	0,02382	13	0,02465	23	0,02547	33	0,02630
4	0,02391	14	0,02473	24	0,02556	34	0,02638
5	0,02399	15	0,02481	25	0,02564	35	0,02646
6	0,02407	16	0,02490	26	0,02572	36	0,02655
7	0,02415	17	0,02498	27	0,02580	37	0,02663
8	0,02424	18	0,02506	28	0,02589	38	0,02671
9	0,02432	19	0,02514	29	0,02597	39	0,02679
10	0,02440	20	0,02523	30	0,02605	40	0,02688

Der Ausdruck (1) für die specif. Widerstandshöhe, welcher dem Ausdruck (7) des Coefficienten λ zu Grunde liegt, empfiehlt sich besonders auch dadurch, dass er mit einfachen Vorstellungen von der Natur des Leitungswiderstandes ziemlich zwanglos in Zusammenhang gebracht werden kann. Die Ursachen dieses Widerstandes sind die äussere und die innere Reibung, denen entsprechend die Widerstandshöhe B_1 als aus zwei Theilen bestehend zu betrachten ist:

$$B_1 = E_1 + I_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die **äussere Reibung** wird, insoweit sie von der inneren verschieden ist, durch die immer bis zu gewissem Grade vorhandene Rauhigkeit, d. h. durch die Erhabenheiten und Vertiefungen an der inneren Oberfläche der Rohrwand verursacht. Die Geschwindigkeiten der an dieser Oberfläche hinfliessenden Wassertheilchen erleiden dadurch sehr oft wiederholte plötzliche Aenderungen bezüglich auf Grösse und Richtung. Indem aber die Mischung

bewegungen, die durch solche Richtungsänderungen gegen das Innere der Röhre hin verursacht werden, bezüglich auf ihre Interferenz mit der regelmässig strömenden Bewegung im Inneren der Röhre und auf die entsprechende Vermehrung der inneren Reibung daselbst unmöglich rationell u verfolgen sind, mag die gesonderte Berücksichtigung der äusseren Reiung durch die Vorstellung ermöglicht werden, dass ihr Einfluss sich unittelbar nur auf eine röhrenförmige Wasserschicht von sehr kleiner mittrer Dicke δ an der Oberfläche erstreckt, und zwar insofern, als durch en wiederholten plötzlichen Wechsel dieser Schichtdicke zwischen einem linimum $= \delta_1$ und einem Maximum $= \delta_2$ eine entsprechend plötzliche eschwindigkeitsänderung zwischen einem Maximum $= w_1$ und einem linimum $= w_2$ bedingt wird. Jedem solchen plötzlichen Uebergang der eschwindigkeit von w_1 in w_2 entspricht nach §. 76, Gl. (7) eine Widerandshöhe

$$= \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g},$$

ler, wenn w' die mittlere Geschwindigkeit in der fraglichen Oberflächenhicht im Sinne der Rohraxe bedeutet, eine Widerstandshöhe

$$= \zeta' \frac{w'^2}{2g} \quad \text{mit} \quad \zeta' = \left(\frac{w_1}{w'} - \frac{w_2}{w'}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^2.$$

'enn also irgend einer der Wasserfäden, in welche die fragliche Oberichenschicht des Wassers durch ein in der Rohraxe sich schneidendes benenbüschel zerlegt werden kann, pro Längeneinheit im Durchschnitt n lcher plötzlichen Querschnitts- und Geschwindigkeitsänderungen erfährt, ist die entsprechende specifische (auf die Längeneinheit bezogene) Widerındshöhe oder Widerstandsarbeit pro 1 Kgr. des in der Oberflächenschicht essenden Wassers $= n\zeta' \frac{w'^2}{2g}$, und endlich pro 1 Kgr. des in der ganzen ihre vom Durchmesser $d = 2r$ mit der mittleren Geschwindigkeit u essenden Wassers:

$$E_1 = \frac{2\pi r \delta . w'}{\pi r^2 u} n \zeta' \frac{w'^2}{2g} = \frac{n \delta \zeta'}{g} \frac{w'^3}{ru}$$

er mit $r = \frac{d}{2}$ und $\frac{w'}{u} = \varepsilon$

$$E_1 = \frac{2n\delta\varepsilon^3\zeta'}{g} \frac{u^2}{d} = a \frac{u^2}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (9).$$

ıs ist das erste Glied des Ausdrucks (1) von B_1, und hat darin der Coficient a die Bedeutung:

$$a = \frac{2}{g}\, n\delta\varepsilon^3\zeta' = \frac{2}{g}\, n\delta\varepsilon^3 \left(\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^2 \ldots\ldots\ldots 10.$$

Die einzelnen Factoren dieses Ausdrucks, von denen n sehr gross und δ sehr klein ist, können nicht näher bestimmt werden, lassen es aber gemäss ihrer Bedeutung erklärlich erscheinen, dass der Coefficient a von der Oberflächenbeschaffenheit der Röhre abhängig gefunden wird.

Eine noch einfachere Deutung gestattet das von der inneren Reibung abhängige zweite Glied des Ausdrucks (1). Wenn nämlich behufs Ausschliessung aller Nebenumstände eine horizontale Röhre vorausgesetzt, in der ersten der Gleichungen (1) in §. 73 folglich $K_s = 0$ gesetzt wird, so folgt daraus, da hier auch $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ ist,

$$R_s = \frac{\partial p}{\partial s}$$

oder, wenn auch die Rohrweite sehr klein im Vergleich mit der Druckhöhe, somit p in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts als gleich, nur von einem zum anderen Querschnitt verschieden, d. h. als blosse Function von s zu betrachten ist,

$$R_s = \frac{dp}{ds} = \gamma \frac{d\frac{p}{\gamma}}{ds} = -\gamma I_1,$$

indem der Summand I_1 in Gl. (8) nichts anderes, als die Abnahme der Druckhöhe $\left(\frac{p}{\gamma}\right)$ pro Längeneinheit der Röhre, insoweit sie von der inneren Reibung (R_s) abhängt, bedeutet. Nach §. 72, Gl. (8) ist aber auch

$$R_s = \frac{R}{y}\frac{d}{dy}\left(y\frac{dw}{dy}\right),$$

unter R wie dort die Constante der inneren Reibung verstanden, während (zum Unterschied von der mittleren Geschwindigkeit u) hier w die Geschwindigkeit in der Entfernung y von der Rohraxe bezeichne. Aus der Gleichsetzung beider Ausdrücke von R_s folgt

$$\frac{d}{dy}\left(y\frac{dw}{dy}\right) = -\frac{\gamma I_1}{R}\, y$$

und daraus durch Integration mit Rücksicht darauf, dass w ein Maximum $\left(\frac{dw}{dy} = 0\right)$ für $y = 0$ und $w = w'$ für $y = r$ ist,

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{\gamma I_1}{2R}\, y; \quad w = w' + \frac{\gamma I_1}{4R}(r^2 - y^2) \ldots\ldots 11.$$

oder auch, wenn w_0 das Maximum von w für $y = 0$ bedeutet,

$$w_0 - w = \frac{\gamma I_1}{4R} y^2,$$

woraus ersichtlich, dass, wenn von allen Punkten eines Querschnitts aus begrenzte gerade Linien parallel der Rohraxe und proportional den betreffenden Geschwindigkeiten gezogen werden, die Endpunkte derselben in einem Umdrehungsparaboloid liegen.

Mit Rücksicht auf Gl. (11) ist nun die mittlere Geschwindigkeit

$$u = \frac{1}{\pi r^2}\int_0^r w \, . \, 2\pi y dy = \frac{2}{r^2}\int_0^r \left[w' + \frac{\gamma I_1}{4R}(r^2 - y^2)\right] y dy =$$

$$= \frac{2}{r^2}\left[w' \frac{r^2}{2} + \frac{\gamma I_1}{4R}\left(r^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\right] = w' + \frac{\gamma I_1}{8R} r^2,$$

also, wenn wieder $r = \frac{d}{2}$ und $\frac{w'}{u} = \varepsilon$ gesetzt wird,

$$I_1 = \frac{8R}{\gamma}\frac{u - w'}{r^2} = \frac{32R(1-\varepsilon)}{\gamma}\frac{u}{d^2} = b\frac{u}{d^2} \quad \ldots . (12),$$

der Form nach übereinstimmend mit dem zweiten Theil des Ausdrucks (1), während die Bedeutungen der Buchstaben γ und R den Coefficienten

$$b = \frac{32R(1-\varepsilon)}{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

von der Art und vom Wärmezustande der Flüssigkeit abhängig erscheinen lassen.* —

Die der obigen Betrachtung zu Grunde liegende Auffassung der äusseren Reibung als desjenigen Widerstandes, welcher, durch nicht weiter analysirbare seitliche und wirbelförmige Bewegungen sich mittelbar auf die ganze Wassermasse erstreckend, unmittelbar von der Rauhigkeit der festen Rohrwand und von den dadurch bedingten unzähligen plötzlichen Quer-

* Hagen erklärt a. a. O. die Bedeutung des zweiten Gliedes des Ausdrucks (1) im Wesentlichen auf dieselbe Weise, mit dem Unterschiede jedoch, dass er $w' = 0$ setzt, nämlich die äusserste Wasserschicht als dauernd an der Rohrwand haftend annimmt. Ein Einfluss der oberflächlichen Beschaffenheit dieser Wand auf den resultirenden Leitungswiderstand wird damit bestritten, wodurch dann aber auch die Form des ersten, bei weiten Röhren überwiegend grossen Gliedes des Ausdrucks (1) sich irgend einer einigermassen rationellen Deutung entzieht.

schnitts- und Geschwindigkeitsänderungen der längs ihr hin fliessenden äussersten Wasserschicht herrührt, ist wesentlich verschieden von der früheren Auffassung, nach welcher diese äussere Reibung, in §. 72, Gl. 5 pro Flächeneinheit mit R' bezeichnet, mit der inneren Reibung im Gleichgewicht ist. Wenn man in jener Gleichung gemäss den Bedeutungen der in ihr vorkommenden Buchstaben für den vorliegenden Fall einer kreisförmig cylindrischen Röhre $\frac{dz}{ds'} = 1$ und $\frac{dy}{ds'} = 0$ setzt, ergiebt sich, wie übrigens auch ohne Weiteres einleuchtet,

$$\frac{R'}{R} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

oder, weil hier die Geschwindigkeit u an der Oberfläche mit w' bezeichnet und eine blosse Function von y ist, mit Rücksicht auf Gl. (11)

$$\frac{R'}{R} = -\frac{dw'}{dy} = \frac{\gamma I_1}{2R} r,$$

also

$$I_1 = \frac{R'}{\gamma}\frac{2}{r} = \frac{R'}{\gamma}\frac{4}{d}.$$

In der That ist die äussere Reibung als Summe der beiden Auffassungen entsprechenden Widerstände zu betrachten, und wenn R' in diesem Sinne verstanden, somit auch der durch die Unregelmässigkeiten der Rohrwand resp. durch die entsprechenden unregelmässigen Mischungsbewegungen verursachte Widerstand dadurch in Rechnung gebracht wird, dass die innere Reibung der regelrecht strömenden geraden Wasserfäden resp. concentrischen cylindrischen Wasserschichten entsprechend grösser gesetzt wird, so kann auch

$$B_1 = E_1 + I_1 = \frac{R'}{\gamma}\frac{4}{d}$$

gesetzt werden, wie in §. 89, Gl. (2). Dass dort derselbe Ausdruck, abgesehen von der inneren Reibung, nämlich auf Grund der Annahme einer in der ganzen Masse gleichförmigen Geschwindigkeit gefunden werden konnte, liegt darin, dass die inneren Reibungen, womit zwei benachbarte der concentrischen cylindrischen Wasserschichten gegenseitig auf einander wirken, entgegengesetzt gleich sind. Das Abhängigkeitsgesetz der Grösse R' konnte aber dabei nur rein empirisch ermittelt werden.

Im Folgenden soll die specif. Leitungswiderstandshöhe in der Form von Gl. (6) in die Rechnung eingeführt werden, womit die Fundamentalgleichung (1) in §. 89 die Form erhält:

$$\left(1 + \zeta + \lambda\frac{l}{d}\right)\frac{u^2}{2g} = H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma} \quad\ldots\ldots\ 11$$

Darin ist h die Höhe des Oberwasserspiegels, woselbst der äussere Druck $= p_0$ ist, über dem Schwerpunkt der Mündung resp. dem Unterwasserspiegel, woselbst der äussere Druck $= p$ ist, während l die Länge, d die Weite der Abflussröhre, u die mittlere Geschwindigkeit in derselben und ζ die Summe der Coefficienten besonderer Widerstände bedeutet, die an gewissen Stellen der Röhre vorkommen können.

Dabei ist vorausgesetzt, dass das Wasser mit dem vollen Rohrquerschnitt $F = \frac{\pi d^2}{4}$, somit ohne äussere Contraction und ohne besonderen Widerstand an der Mündung ausfliesst. Wenn aber die Röhre mit einem Mundstück endigt, dessen Mündung $A < F$ und für welches der nach dem früheren zu beurtheilende äussere Contractionscoefficient $= \alpha$, Geschwindigkeitscoefficient $= \varphi$, also der Widerstandscoefficient $= \frac{1}{\varphi^2} - 1$ und der Ausflusscoefficient $= \alpha\varphi = \mu$ ist, so wird die wirksame Druckhöhe H ausser zur Bewältigung der Widerstandshöhen $\zeta \frac{u^2}{2g}$ und $\lambda \frac{l}{d} \frac{u^2}{2g}$) zur Erzeugung nicht nur der Geschwindigkeit u in der Röhre selbst, sondern der grösseren Ausflussgeschwindigkeit $= \frac{F}{\alpha A} u$ im kleinsten Querschnitt des contrahirten Strahls und zur Bewältigung des durch das Mundstück verursachten Widerstandes verbraucht, so dass an Stelle des Summanden $\frac{u^2}{2g}$ auf der linken Seite von Gl. (14) zu setzen ist:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{F}{\alpha A}u\right)^2\left[1 + \left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right)\right] = \frac{1}{2g}\left(\frac{F}{\alpha\varphi A}u\right)^2 = \left(\frac{F}{\mu A}\right)^2\frac{u^2}{2g}$$

und somit die Gleichung übergeht in:

$$\left[\left(\frac{F}{\mu A}\right)^2 + \zeta + \lambda\frac{l}{d}\right]\frac{u^2}{2g} = H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

Innerhalb der Grenzen, zwischen denen die Werthe von u und d bei den technischen Anwendungen zu liegen pflegen, nämlich etwa $u = 0{,}5$ bis 2 Mtr. pro Sec. und $d = 0{,}05$ bis 0,5 Mtr., entsprechend $ud = \frac{1}{40}$ bis 1, ist λ der obigen Tabelle zufolge nur etwa zwischen den Grenzen 0,027 und 0,024 verschieden, so dass dafür meistens in solchen Fällen zugleich mit Rücksicht auf die Unvollkommenheiten der cylindrischen Form und auf geringe Verunreinigungen der Röhre ein um etwa 20% grösserer constanter Mittelwerth, in runder Zahl etwa $\lambda = 0{,}03$ gesetzt werden kann, wobei es ausserdem vorbehalten bleibt, zu noch grösserer Sicherheit

behufs weiterer Berücksichtigung stellenweiser Querschnittsverengungen durch allmählig zunehmende Niederschläge das pro Sec. abzuführende Wasservolumen $= V$ Cubikm. je nach Umständen mehr oder weniger grösser zu setzen, als dem Bedürfniss zur Zeit der Anlage entspricht.

Wenn der Querschnitt einer Röhre nicht kreisförmig ist, so kann in Ermangelung besonderer Versuche der Leitungswiderstand demjenigen einer kreisförmig-cylindrischen Röhre gleich gesetzt werden, deren Weite d nach §. 89, Gl. (2) = dem sogenannten mittleren Durchmesser $\frac{4F}{U}$ = dem vierfachen Inhalt dividirt durch den Umfang des gegebenen Rohrquerschnitts ist. In der That mag freilich der fragliche Widerstand, obschon er ohne Zweifel um so grösser sein muss, je grösser U bei gegebenem Werth von F ist, nach einem etwas anderen Gesetz von F und U abhängen, auch für verschiedene Querschnittsformen bei gleichen Werthen von F und U verschieden sein; doch fehlt es einstweilen an genügenden Anhaltspunkten zur Berücksichtigung dieser Umstände.

Bevor übrigens die Gleichungen (14) und (15) zur Lösung besonderer Probleme benutzt werden, sind zunächst die in Leitungsröhren vorzugsweise vorkommenden besonderen Widerstände näher zu besprechen, denen der resultirende Widerstandscoefficient ζ jener Gleichungen entspricht. Sie werden theils durch Richtungs-, theils durch Querschnittsänderungen des in der Röhre strömenden Wassers verursacht.

§. 91. Widerstand von Knie- und Kropfröhren.

Wenn schon der allgemeine Leitungswiderstand gerader cylindrischer Röhren nur durch besondere Versuche zuverlässig bestimmt werden kann, so ist dies um so mehr der Fall in Betreff des zusätzlichen Widerstandes, der durch plötzliche oder allmählige Richtungsänderungen, durch sogenannte Knie- oder Kropfröhren verursacht wird, wobei in erhöhtem Grade jene complicirten Mischungsbewegungen stattfinden, an denen die theoretische Untersuchung scheitert.

1) Aus Versuchen mit Knieröhren von 0,03 Mtr. Weite für verschiedene Werthe des Winkels α, um welchen dabei die Richtung des Wasserstroms plötzlich geändert wird, hat Weisbach für den betreffenden Widerstandscoefficienten die empirische Formel*

* Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. I. vierte Aufl., S. 861.

$$\zeta = 0{,}9457 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2{,}047 \sin^4 \frac{\alpha}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

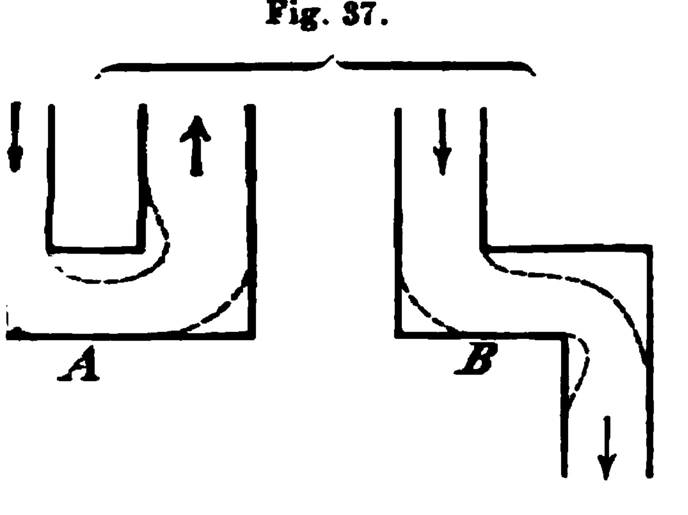
bgeleitet, wonach sich z. B. für

$$\begin{array}{llllll} \alpha = & 20^0 & 40^0 & 60^0 & 80^0 & 90^0 \\ \zeta = & 0{,}046 & 0{,}139 & 0{,}364 & 0{,}740 & 0{,}984 \end{array}$$

giebt. Mit welcher Annäherung dieselben Werthe auch bei weiteren öhren zu Grunde gelegt werden können, ist zweifelhaft; für engere Knie-ıhren fand Weisbach den Widerstandscoefficienten wesentlich grösser, r solche von 0,01 Mtr. Weite wenigstens 1,5 mal so gross.

Für den Fall eines doppelten Kniees mit kurzem Zwischenück (Fig. 37), d. h. für den Fall einer in kurzem Abstande wiederholten plötzlichen Richtungsänderung um denselben Winkel, ist nach Weisbach der resultirende Widerstandscoefficient nur = demjenigen des einzelnen Kniees, wenn beide Ablenkungen in derselben Ebene in gleichem Sinne (Fig. 37, A), dagegen doppelt so gross, wenn sie in entgegengesetztem Sinne (Fig. 37, B) stattfinden, und endlich ungeır $1^1/_2$ mal so gross, wenn die Mittelebenen beider Kniee (die Ebenen r Mittellinien ihrer Schenkel) sich rechtwinklig schneiden. Gemäss der on früher erwähnten Erklärung des in Rede stehenden Widerstandes rch seine Zurückführung auf eine Zusammenziehung und plötzliche iederausbreitung des von der Rohrwand örtlich abgelösten Wasserstroms g. 28 in §. 76) ist also anzunehmen, dass diese innere Contraction durch zweite Knie im ersten der genannten drei Fälle nicht merklich, im eiten beträchtlich, im dritten weniger verstärkt wird, wie es für die iden ersten Fälle die punktirten Linien in Fig. 37, A und B andeuten.

Fig. 37.



Sind die Widerstandscoefficienten ζ_1 und ζ_2 der beiden Kniee ungleich, ra $\zeta_1 > \zeta_2$, so wird der resultirende Widerstandscoefficient

im ersten Falle: $\zeta = \zeta_1$

„ zweiten „ : $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$

„ dritten „ : $\zeta = \zeta_1 + \frac{1}{2}\zeta_2$

setzen sein. Uebrigens bleibt die Länge näher festzustellen, welche ufs einer sicheren Anwendung dieser Regeln das mittlere Rohrstück hstens haben darf; wenn diese Länge bis zu einer gewissen Grenze :hst, so wird natürlich in allen Fällen $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$.

2) Ein kleinerer Widerstand ist mit der Richtungsänderung einer Leitungsröhre verbunden, wenn dieselbe nicht plötzlich, sondern allmälig stattfindet; dazu dienen die vorzugsweise üblichen **Kropfröhren** (Krümmer), d. h. kurze Röhren mit kreisbogenförmiger Mittellinie, welche durch entsprechende Flanschen mit zwei geraden Rohrstrecken von verschiedenen Richtungen verbunden werden (Fig. 38). Für den gewöhnlichen Fall, dass die **Mittellinie des Krümmers** ein **Viertelkreis** ist, durch denselben folglich eine Richtungsänderung von 90^0 vermittelt wird, hat **Weisbach** aus eigenen und aus Versuchen von **Dubuat** für den Widerstandscoefficienten die folgende Formel abgeleitet:

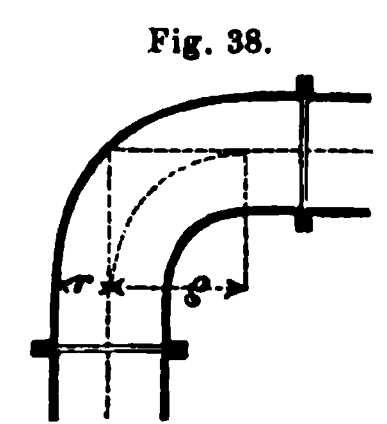


Fig. 38.

$$\zeta = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{\frac{7}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

darin bedeutet ϱ den Halbmesser der Mittellinie, r den Halbmesser des kreisförmigen Rohrquerschnitts. Ist der letztere rechteckig mit den Seiten $= 2r$ parallel der Ebene der Mittellinie, so fand **Weisbach**:

$$\zeta = 0{,}124 + 3{,}104 \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{\frac{7}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

Danach ist z. B. für	$\frac{r}{\varrho} =$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
bei kreisförm. Querschn.	$\zeta =$	0,138	0,158	0,206	0,294	0,44
„ rechteckig. „	$\zeta =$	0,135	0,180	0,250	0,398	0,64

Eine grosse Zuverlässigkeit ist übrigens diesen Zahlen nicht zuzuschreiben, weil (ebenso auch bei den Knieröhren) die Uebereinstimmung der unter fast gleichen Umständen erhaltenen Versuchsresultate, wie **Weisbach** selbst anführt, viel zu wünschen lässt.

Ist die Mittellinie der Kropfröhre ein Kreisbogen von kleinerem Mittelpunktswinkel, als 90^0, so ist ζ ohne Zweifel kleiner; in welchem Maasse, ist durch **Weisbach's** Versuche nicht näher festgestellt worden. Ist sie aber ein Kreisbogen von grösserem Mittelpunktswinkel bis 180^0, so wird ihm zufolge ζ nicht merklich grösser, wogegen, wenn an einen Krümmer von 90^0 ein gleicher, aber entgegengesetzt gekrümmter sich unmittelbar anschliesst, der Widerstandscoefficient eines solchen S-förmigen Doppelkrümmers nahe doppelt so gross wie der eines einfachen gefunden wurde. Dieses Verhalten ist ganz analog dem oben unter 1) erwähnten doppelter Knieröhren mit kurzem Zwischenstück (Fig. 37, *A* und *B*), und ist daraus zu schliessen, dass überhaupt der Widerstand von Kropfröhren wesentlich

›r stärker gekrümmten, worauf sich die Weisbach'schen Versuche vor-
gsweise beziehen) im Wesentlichen auf dieselbe Ursache zurückzuführen
wie der Widerstand von Knieröhren.

Für die technischen Ausführungen ist im Allgemeinen eine solche
ümmung der Kropfröhren empfehlenswerth und gebräuchlich, bei welcher
e Axen der dadurch verbundenen geraden Rohrstrecken, wie Fig. 38 an-
utet, sich in der Wandfläche des Krümmers treffen; in diesem Falle ist

$$r = \varrho(\sqrt{2} - 1); \qquad \frac{r}{\varrho} = 0{,}4142$$

d nach Gl. (2): $\zeta = 0{,}215$.

Nach den Gleichungen (2) und (3) würde, wenn $\frac{r}{\varrho}$ bis Null abnimmt,
ur bis 0,131 resp. 0,124 abnehmen, während thatsächlich offenbar ζ
leich mit $\frac{r}{\varrho}$ in die Grenze Null übergehen muss. Auch ist bei kleineren
rthen von $\frac{r}{\varrho}$ oder bei Röhren, die auf eine grössere Länge gekrümmt
d, der Krümmungswiderstand von anderer Art wie bei kurzen Kropf-
ren von starker Krümmung oder bei Knieröhren; er ist dann nicht an
er bestimmten Stelle concentrirt und im Wesentlichen auf eine örtliche
ntraction des Wasserstroms reducirbar, sondern er äussert sich stetig
der ganzen Länge der gekrümmten Röhre, so dass auch ζ mit dieser
ge oder bei gegebenem Krümmungshalbmesser ϱ mit dem gesammten
lenkungswinkel α (= der absoluten Summe aller elementaren Ablenkungs-
kel, einerlei ob in gleichem Sinne stattfindend oder nicht) stetig zu-
men muss. In solchen Fällen ist deshalb den Weisbach'schen Formeln
e andere, wenigstens ihrer allgemeinen Form nach, vorzuziehen, welche
buat seinen Messungen gemäss für beliebig gekrümmte Röhren
kreisförmigem Querschnitt aufgestellt hat. Denkt man sich näm-
an der Stelle, wo eine gerade Rohrstrecke in eine gekrümmte über-
t, die Axe der ersteren verlängert bis sie die Wandfläche der letzteren
ft, von dem Schnittpunkte aus eine Tangente an die krumme Mittellinie
ogen bis zu einem zweiten Schnittpunkte mit der Wandfläche u. s. f.,
die so erhaltene gebrochene Linie wieder genau oder möglichst ange-
ert in die Axe der am anderen Ende der Krümmung sich anschlies-
den geraden Rohrstrecke übergeht (wie es die punktirten Linien in
. 38 für den einfachsten Fall andeuten), und bezeichnet mit φ die (im
gemeinen verschiedenen) einzelnen Ablenkungswinkel der Seiten an den
kpunkten des erhaltenen Polygons (in Fig. 38 ist nur ein solcher

Winkel φ vorhanden, somit $\varphi = \alpha$), so setzt Dubuat* die Krümmun widerstandshöhe

$$B = \frac{\Sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{3000} u^2$$

für den pariser Zoll als Längeneinheit. Daraus folgt für den Met a Längeneinheit von B und u

$$B = \zeta \frac{u^2}{2g} = 0{,}0123 u^2 \Sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\zeta = 2 . 9{,}81 . 0{,}0123 \Sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0{,}2413 \Sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad \ldots\ldots (4$$

Ist der Krümmungshalbmesser constant $= \rho$, so ist offenbar

$$\Sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\alpha}{\varphi} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad \text{und} \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\rho}{\rho + r} \quad \ldots\ldots 5$$

Hiernach ergiebt sich z. B., wenn α in Graden ausgedrückt wird,

für $\frac{r}{\rho}$ =	0,05	0,1	0,15	0,2
$\frac{100}{\alpha}\zeta$ =	0,0632	0,0850	0,0994	0,1099
und für $\alpha = 90^0$: ζ =	0,057	0,076	0,089	0,099

Man wird sicher gehen, wenn man für stärkere Krümmungen, et für $\frac{r}{\rho} > 0{,}2$ die Weisbach'sche Formel (2) anwendet, für schwä Krümmungen aber die Formel (4) mit einem so vergrösserten Coeffici dass sie sich an jene stetig anschliesst, nämlich für $\frac{r}{\rho} = 0{,}2$ und $\alpha = 90$ denselben Werth von ζ liefert. Setzt man zu dem Ende für $\frac{r}{\rho} < 0{,}2$

$$\zeta = 0{,}337 \Sigma \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 0{,}337 \frac{\alpha}{\varphi} \sin^2 \frac{\varphi}{2}; \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\rho}{\rho + r} \quad (6$$

so ergiebt sich für

$\frac{r}{\rho}$ =	0,05	0,1	0,15	0,2
$\frac{100}{\alpha}\zeta$ =	0,0882	0,1188	0,1389	0,1534
und für $\alpha = 90^0$: ζ =	0,079	0,107	0,125	0,138

* Principes d'hydraulique, Nr 105 und Nr. 357.

Ist $\frac{r}{\varrho} = x$ sehr klein (etwa $< 0{,}05$), so kann auch gesetzt werden:

$$\cos\frac{\varphi}{2} = (1 + x)^{-1}$$

$$\ldots\frac{\varphi}{2} = 1 - (1 + x)^{-2} = 1 - (1 - 2x + 3x^2 - \ldots) =$$

$$= 2x\left(1 - \frac{3}{2}x + \ldots\right)$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{2x}\left(1 - \frac{3}{4}x + \ldots\right)$$

$$= arc\,sin\left[\sqrt{2x}\left(1 - \frac{3}{4}x + \ldots\right)\right] = \sqrt{2x}\left(1 - \frac{3}{4}x + \ldots\right) +$$

$$+ \frac{1}{6}(\sqrt{2x})^3 + \ldots = \sqrt{2x}\left(1 - \frac{5}{12}x + \ldots\right)$$

$$\ldots\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{2x}{2\sqrt{2x}}\,\frac{1 - \frac{3}{2}x + \ldots}{1 - \frac{5}{12}x + \ldots} = \sqrt{\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{13}{12}x + \ldots\right)$$

$$\text{nahe} = (1 - x)\sqrt{\frac{x}{2}}$$

… somit nach Gl. (6), wenn wieder α in Graden ausgedrückt wird,

$$\ldots = \frac{0{,}337}{\sqrt{2}}\,\frac{\pi}{180}\,\alpha(1 - x)\sqrt{x} = 0{,}00416\,\alpha\left(1 - \frac{r}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{r}{\varrho}} \quad (7).$$

92. Widerstand infolge plötzlicher Aenderung des Rohrquerschnitts.

Plötzliche Querschnittsänderungen einer Leitungsröhre, die mit einer …ichen Trennung des Flüssigkeitsstroms von der Rohrwand und somit …m nach §. 76 zu beurtheilenden Widerstande verbunden sind, sollen …r aus letzterem Grunde im Allgemeinen möglichst vermieden werden; …aber sind sie unvermeidlich oder absichtlich herbeigeführt, insbesondere … Regulirung oder zeitweise gänzlichen Unterbrechung des Wasserstroms …h Schieber, Hähne, Drosselklappen oder Ventile. Wenn auf solche …ise der Rohrquerschnitt an einer gewissen Stelle mehr oder weniger

verengt ist, so erfährt der Wasserstrom nach dem Durchgange durch d… kleinsten Querschnitt $= A$ der Leitung im Allgemeinen zunächst noch ei… weitere Contraction etwa bis αA (unter $\alpha < 1$ den betreffenden inn… Contractionscoefficienten verstanden) bevor er sich bis zum vollen R… querschnitt $= F$ wieder ausbreitet. Wäre diese plötzliche Quersch… vergrösserung von αA bis F die einzige Ursache des in Rede stehend… Widerstandes, so wäre nach §. 76, Gl. (8) der entsprechende Widersta… coefficient

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2 \dots\dots\dots\dots\dots$$

Wenn nun auch thatsächlich gewisse Widerstände schon durch die ge… gene Zusammenziehung des Wasserquerschnitts bis αA, ferner oft… unbeträchtliche durch gleichzeitige Richtungsänderungen und Stromz… lungen verursacht werden, die namentlich mit dem Durchfluss des W… durch die von den oben genannten Regulirungsvorrichtungen darge… Oeffnungen verbunden sein können, so pflegen doch dieselben im Ver… mit dem durch Gl. (1) ausgedrückten Hauptwiderstande nur von unt… ordneter Grösse zu sein; diese Gleichung kann dann auch zur Darst… des resultirenden Widerstandscoefficienten dienen, falls nur dem C… cienten α eine entsprechend zusammengesetzte Bedeutung beigel… sein Werth für verschiedene Fälle durch besondere Versuche be… wird. Die betreffenden Angaben dieses §. beruhen auf Versuchen… Weisbach.*

Derjenige Einfluss, welcher durch Richtungsänderungen und Z… sungen des Wasserstroms, ferner durch Aenderungen der Gestalt … solchen der Grösse seines Querschnitts und durch eine etwaige Unv… digkeit der inneren Contraction (bei seitlicher Lage der verengten D… flussöffnung) auf den Coefficienten ζ und somit auf α ausgeübt wird, … je nach der besonderen Art und Disposition der hier in Rede ste… Regulirungsvorrichtungen sehr verschieden sein; um so mehr ist es … die Werthe von ζ und α vor Allem zunächst

1) für den einfachsten Fall zu kennen, nämlich für den Fall … **kreisförmigen centralen Oeffnung** $= A$ **in einer ebenen W… die senkrecht zur Axe in eine Röhre von kreisförmigem Q… schnitt** $= F$ **eingesetzt ist.** In diesem Fundamentalfalle, in w… die so eben genannten besonderen Umstände sämmtlich eliminirt sind… der Coefficient α von Gl. (1) nur mit Rücksicht auf den gerin…

* Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, I, vierte Aufl., §. 438 und § 4…

Widerstand bei der Zusammenziehung des Wasserstroms bis zum kleinsten Querschnitte etwas kleiner, als der innere Contractionscoefficient ist, kann ach Weisbach gesetzt werden:

ir $n = 1$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\alpha = 1$	0,892	0,813	0,755	0,712	0,681	0,659	0,643	0,632	0,624
$\zeta = 0$	0,06	0,29	0,80	1,80	3,75	7,80	17,5	47,8	226

e kleiner $n = \frac{A}{F}$, desto vollkommener ist die innere Contraction, desto leiner folglich α.

Wenn die centrale Durchlassöffnung A sich an einer solchen Stelle findet, wo zwei Röhren von verschiedenen Weiten mit gemeinschaftlicher e zusammenstossen (wie in Fig. 29, §. 76), so ist zu beachten, dass F in l. 1) den Rohrquerschnitt hinter der Durchlassöffnung bedeutet, während r Unvollkommenheitsgrad der inneren Contraction von dem Verhältniss r Oeffnung A zum vorhergehenden Querschnitt $= F'$ der Röhre abgt. Man findet also ζ nach Gl. (1), wenn α der obigen Tabelle (event. ch Interpolation) gemäss $n = \frac{A}{F'}$ entnommen wird.

Ist dabei insbesondere $F' > F$ und $A = F$, so ist

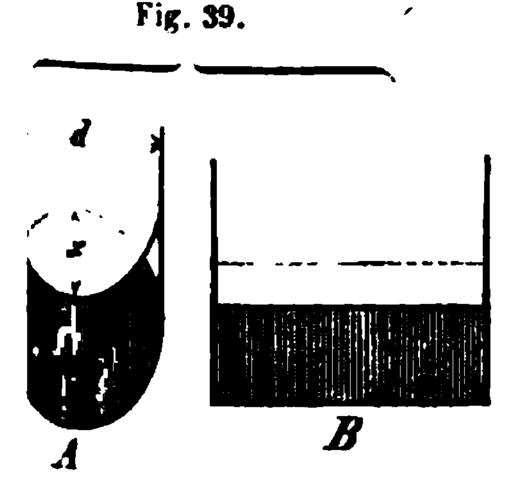
$$n = \frac{F}{F'} \quad \text{und} \quad \zeta = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

ährend für $F' < F$ und $A = F'$

$$\alpha = 1 \quad \text{und} \quad \zeta = \left(\frac{F}{F'} - 1\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

2) Für den Durchfluss des Wassers durch mehr oder weniger verte Schieberöffnungen liegen Versuche vor mit einem Schieber in er cylindrischen Röhre von 0,04 Mtr. Weite und in einer parallelepidischen Röhre von 0,05 und 0,025 Mtr. Seitenlänge des rechteckigen erschnitts (Fig. 39, A und B). Der Coefficient α des Ausdrucks (1) wird in diesen Fällen durch die seitliche Lage der Durchflussöffnung A insofern verkleinert, als damit eine gesteigerte Richtungsänderung des Wasserstroms und zugleich eine Gestaltsänderung seines Querschnitts verbunden ist, dagegen vergrössert mit Rücksicht auf die Unvollständigkeit der inneren Contraction besonders für die kleineren Werthe von $\frac{A}{F}$, bei

Fig. 39.



denen die Contraction überhaupt in höherem Grade stattfindet. Die F dieser Umstände ist, dass sich ζ für die grösseren Werthe von $\frac{A}{F}$, et grösser, für die kleineren etwas kleiner ergiebt, als im Fundament unter 1), wie die folgende Zusammenstellung der Versuchsresultat kennen lässt.

Cylindrische Röhre.

$\frac{x}{d}$ =	$^1/_8$	$^2/_8$	$^3/_8$	$^4/_8$	$^5/_8$	$^6/_8$	$^7/_8$
$\frac{A}{F}$ =	0,948	0,856	0,740	0,609	0,466	0,315	0,159
ζ =	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

Parallelepipedische Röhre.

$\frac{A}{F}$ =	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	[illegible]
ζ =	0,09	0,39	0,95	2,08	4,02	8,12	17,8	44,5	[illegible]

Den Gebrauch dieser Zahlen mag das folgende Beispiel erläutern. E mit Regulirungsschieber versehene cylindrische Röhre von $d = 0,1$ Mtr. We liefere bei $H = 1,15$ Mtr. wirksamer Druckhöhe pro Sec. $V = 0,015$ Cubi Wasser, wenn der Schieber ganz geöffnet ist und ausser dem allge Leitungswiderstande nur ein Eintrittswiderstand mit dem Coeffici $\zeta = 0,5$ (§. 86) in der Röhre vorkommt. Wie weit muss der Schieber die Röhre vorgeschoben werden, damit sie unter übrigens gleichen U ständen nur $V' = 0,5\,V$ Cubikm. Wasser liefere? Hier ist

$$\sqrt{2gH} = \sqrt{2 \,.\, 9,81 \,.\, 1,15} = 4,75\,; \quad F = \frac{\pi d^2}{4} = 0,007854\,;$$

folglich bei ganz geöffnetem Schieber

$$u = \frac{V}{F} = 1,91 = \varphi \sqrt{2gH}\,; \quad \frac{1}{\varphi} = \frac{4,75}{1,91} = 2,487\,;$$

der gesammte Widerstandscoefficient:

$$\frac{1}{\varphi^2} - 1 = 5,185$$

und der Leitungswiderstandscoefficient:

$$\lambda \frac{l}{d} = 5,185 - 0,5 = 4,685.$$

Soll nun $V' = 0,5\,V$, also die mittlere Geschwindigkeit $u' = \varphi' \sqrt{\ldots}$

0,5u werden, so muss $\varphi' = 0{,}5\varphi$, also der gesammte Widerstands-coëfficient

$$\frac{1}{\varphi'^2} - 1 = \frac{4}{\varphi^2} - 1 = 4 . 6{,}185 - 1 = 23{,}74$$

, durch den Schieber folglich ein Widerstand mit dem Coefficienten

$$\zeta = 23{,}74 - 0{,}5 - \lambda' \frac{l}{d} = 23{,}24 - \frac{\lambda'}{\lambda} . 4{,}685$$

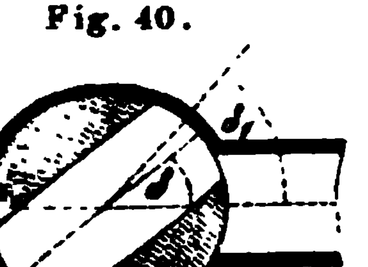
verursacht werden, und weil mit $\frac{1}{ud} = 5{,}2$ und $\frac{1}{u'd} = 10{,}4$ nach der Tabelle in §. 90

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{0{,}0244}{0{,}0240} = \frac{61}{60}$$

, so folgt schliesslich $\zeta = 18{,}48$. Nach obiger Tabelle der Werthe von ζ für verschiedene Werthe von $\frac{x}{d}$ muss also der Schieber um etwas mehr als $\frac{3}{4}\, d = 75$ Millim. in die Röhre vorgeschoben werden.

3) Der Widerstand beim Durchgang des Wassers durch Hahnöffnungen ist von Weisbach auch für die beiden Fälle geprüft worden, dass sich der Hahn in einer cylindrischen oder in einer parallelepipedischen Röhre befindet; die Querschnitte der Röhren hatten die unter 2) angegebenen Dimensionen. Bezeichnet δ den Winkel, um den der Hahn aus derjenigen Stellung, in welcher die Axe seiner Bohrung mit der Axe des Rohrs zusammenfällt, gedreht wurde (Fig. 40), so ergaben sich bei verschiedenen Werthen von δ die folgenden Widerstandscoefficienten: ζ für den Hahn im cylindrischen Rohr, ζ' für den Hahn im parallelepipedischen Rohr. Der Absperrungswinkel δ_1, d. h. der Werth von δ, bei welchem der Durchfluss des Wassers eben ganz gehemmt ($\zeta = \infty$) war, betrug im ersten Falle $= 82^{\circ}$, im zweiten $\zeta_1' = 67^{\circ}$.

Fig. 40.



δ	ζ_0	ζ	ζ'	δ	ζ_0	ζ	ζ'
5°	0,02	0,05	0,05	40°	8,72	17,3	20,7
10°	0,15	0,29	0,31	45°	15,4	31,2	41,0
15°	0,39	0,75	0,88	50°	27,9	52,6	95,3
20°	0,85	1,56	1,84	55°	53,9	106	275
25°	1,62	3,10	3,45	60°	113	206	—
30°	2,89	5,47	6,15	65°	276	486	—
35°	5,05	9,68	11,2				

Bei dem Durchfluss durch die schräg gestellte Hahnbohrung erlei... das Wasser ausser der plötzlichen Querschnittsänderung eine zweimal... plötzliche Richtungsänderung ähnlich wie bei dem doppelten Knie ... kurzem Zwischenstück (§. 91, Fig. 37, *B*). Danach ist es erklärlich, ... die Werthe von ζ und ζ' durchweg grösser sind, als diejenigen W... standscoefficienten, welche nach Gl. (1) demselben Querschnittsverhältniss $\frac{A}{F}$ im Fundamentalfalle unter 1) entsprechen würden. Diese letzteren = ζ_0 sind für den Hahn im cylindrischen Rohr in obiger Tabelle beig... worden, berechnet nach Gl. (1) mit den von Weisbach angeführten Q... schnittsverhältnissen $\frac{A}{F} = n$ und den entsprechenden Werthen von ... mäss der Tabelle unter 1).

Der Absperrungswinkel δ_1 eines Hahns hängt vom Verhältniss ... Rohrweite d zum Durchmesser d_1 des Hahnkörpers ab, und zwar, wie ... ersichtlich, gemäss der Gleichung

$$\sin\frac{\delta_1}{2} = \frac{d}{d_1}.$$

Die in der obigen Tabelle für den Hahn im cylindrischen Rohr beige... Werthe von ζ_0 können nun dazu dienen, den einem gewissen Stellwink... entsprechenden Widerstandscoefficienten ζ auch für einen solchen Ha... näherungsweise zu finden, dessen Absperrungswinkel δ_1 von dem ... Versuchshahns = 82° verschieden ist, wenn man berücksichtigt, dass ... Bestandtheil ζ_0 von ζ nur vom Querschnittsverhältnisse $\frac{A}{F}$, also von ... Verhältnisse $\frac{\delta}{\delta_1}$, der andere Bestandtheil $= \zeta - \zeta_0$ dagegen haupt... lich nur von δ abhängt. Soll z. B. ζ geschätzt werden für $\delta = 50$... $\delta_1 = 75^0$, so hat man für $\delta = \frac{50}{75}\,82 = 54^2/_3$ nach der Tabelle ζ_0 ... für $\delta = 50^0$ dagegen $\zeta - \zeta_0 = 52{,}6 - 27{,}9$ nahe $= 25$; es ist ... anzunehmen:

$$\zeta = 52 + 25 = 77.$$

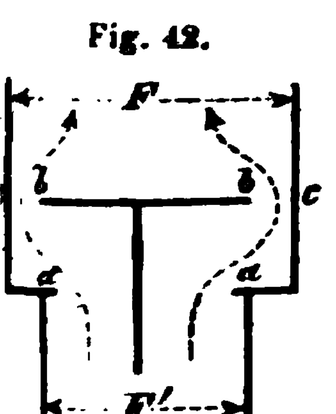
Fig. 41.

4) Für eine Dreh- oder Drosselklappe wurd... verschiedenen Werthen des Winkels δ (Fig. 41) die ... stehenden Widerstandscoefficienten $= \zeta$ im cyli... schen, ζ' im parallelepipedischen Rohr von ... unter 2) angeführten Abmessungen) gefunden.

δ	ζ	ζ'	δ	ζ	ζ'	δ	ζ	ζ'
5°	0,24	0,28	30°	3,91	3,54	55°	58,8	42,7
10°	0,52	0,45	35°	6,22	5,7	60°	118	77,4
15°	0,90	0,77	40°	10,8	9,27	65°	256	158
20°	1,54	1,34	45°	18,7	15,1	70°	751	368
25°	2,51	2,16	50°	32,6	24,9	90°	∞	∞

Für die kleineren Winkel δ sind diese Widerstandscoefficienten grösser, als diejenigen, welche denselben Querschnittsverhältnissen $\frac{A}{F}$ im Fundamentalfalle unter 1) entsprechen, weil die Klappe schon an sich, selbst wenn sie längs der Rohraxe gerichtet ($\delta = 0$) ist, einen gewissen Widerstand verursacht; bei den grösseren Winkeln δ, somit den kleineren Verhältnissen $\frac{A}{F}$ macht sich aber der Einfluss der nur partiellen inneren Contraction geltend, welcher zur Folge hat, dass die Werthe von ζ denen des Fundamentalfalles nahe gleich, die Werthe von ζ' aber wesentlich kleiner werden.

5) Wenn das in einer Röhre oder von einer in eine andere Röhre (z. B. vom Saugerohr einer Pumpe in den Pumpencylinder) strömende Wasser ein Teller- oder Kegelventil zu passiren hat, so sind dreierlei verengte Querschnitte des Wasserstroms zu unterscheiden (Fig. 42):



die kreisförmige Durchflussöffnung (aa) im Ventilsitz $= A_1$, die ringförmige Durchflussöffnung (bc, bc) um das Ventil herum $= A_2$, und die cylindrische Durchflussöffnung (ab, ab) zwischen Ventil und Ventilsitz $= A_3$.

A_1 und A_2 sind für ein bestimmtes Ventil constant, während A_3 von seiner Erhebungshöhe $ab = h$ abhängt; der Widerstandscoefficient ζ ist von den Verhältnissen der Querschnitte A_1, A_2 und A_3 zu dem Querschnitte F des Abflussrohrs (des Wasserstroms nach dem Passiren des Ventils) und in untergeordnetem Grade event. auch von dem Querschnitte F' des Zuflussrohrs (des dem Ventile zufliessenden Wasserstroms) abhängig.

Ist h sehr klein, so hat A_3 überwiegenden Einfluss auf ζ. Wird h, somit A_3 vergrössert, so nimmt ζ ab, die weitere Abnahme wird aber nach Weisbach ganz unbedeutend, sobald $h =$ dem Halbmesser r der Oeffnung A_1 im Ventilsitz geworden ist. Sofern sich annehmen lässt, dass der den Widerstand vergrössernde Einfluss von A_3 im Wesentlichen aufhört, sobald der Querschnitt des Wasserstroms beim Durchgang durch A_3 nicht

mehr $< A_1$ ist, für $h = r$ aber $A_3 = 2\pi rh = 2\pi r^2 = 2A_1$ ist, so lässt sich schliessen, dass die Bahnen der Wassertheilchen in diesem Falle unter einem mittleren Winkel von 30° die cylindrische Fläche A_3 schneiden.

Unter der Voraussetzung $h \overline{\overline{>}} r$ ist also ζ hauptsächlich nur von den Verhältnissen $\frac{A_1}{F}$ und $\frac{A_2}{F}$ abhängig, und zwar kann gemäss Gl. (1)

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$$

gesetzt werden, unter A den kleineren der Querschnitte A_1 und A_2, unter α aber einen Coefficienten verstanden, welcher mit Rücksicht auf die eigenthümliche Zertheilung und mehrfache Richtungsänderung des Wasserstroms durch besondere Versuche bestimmt werden muss und der ausser davon, ob $A_1 \lessgtr A_2$ ist, auch von der Conicität der Sitzfläche des Ventils und von dem Grade der inneren Contraction, bedingt durch das Verhältniss $\frac{A}{F}$ oder durch die Gestaltung des Ventilsitzes gegen das Zuflussrohr bei (§. 83, 2 und 3) sich merklich abhängig erweisen kann. Der letztere Umstand wird hier freilich von geringerem Einflusse sein, weil die Contraction des Wasserstroms nach dem Durchgange durch A_1 wegen der sofort sich geltend machenden ablenkenden Wirkung des gehobenen Ventils sich unter allen Umständen hier nur sehr unvollkommen, weniger als nach dem Durchfluss durch A_2 ausbilden kann; aus demselben Grunde wird es voraussichtlich vortheilhaft sein, A_2 etwas $> A_1$ zu machen, so dass erst etwa der contrahirte ringförmige Querschnitt hinter $A_2 = A_1$ wird.

Auf die experimentelle Prüfung des Einflusses dieser verschiedenen Umstände haben sich die Versuche einstweilen nicht erstreckt. Weisbach hat nur im Falle

$$F' = F;\quad \frac{A_1}{F} = 0{,}356;\quad \frac{A_2}{F} = 0{,}406$$

und während $h > r$ war, den Widerstandscoefficienten eines Kegelventils $= 11$ gefunden. Danach wäre gemäss Gl. (1) mit $\frac{A}{F} = 0{,}356$

$$\frac{1}{\alpha} = 0{,}356\,(1 + \sqrt{11}) = 1{,}537;\quad \alpha = 0{,}651$$

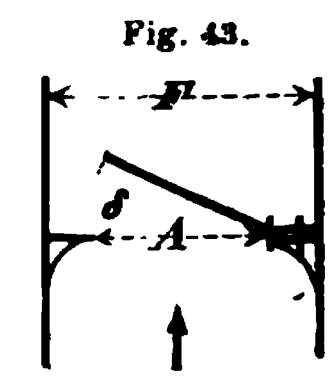
fast genau übereinstimmend mit demjenigen Werth von α, welcher nach der Tabelle unter 1) dem Querschnittsverhältnisse $n = 0{,}356$ im Fundamentalfalle entsprechen würde, so dass der den Widerstand vergrössernde

Einfluss der Richtungsänderungen und der Zertheilung des Wasserstroms durch den vermindernden Einfluss der geringeren Contraction nahe compensirt wurde.

Bis auf Weiteres kann für Teller- und Kegelventile somit

$$\zeta = \left(1,537 \frac{F}{A} - 1\right)^2 \dots \dots \dots (4)$$

gesetzt werden.* Für die zusammengesetzteren Ventilformen (einfache und doppelte Ringventile, Pyramidenventile, Glockenventile) liegen besondere Beobachtungen nicht vor. Indessen hat Weisbach noch


Fig. 43.

6) Versuche mit einem Klappenventil angestellt und für verschiedene Oeffnungswinkel δ (Fig. 43) die folgenden Werthe des Widerstandscoefficienten ζ gefunden, während der Querschnitt $= F'$ des Zuflussrohrs dem des Abflussrohrs $= F$ gleich und die Oeffnung im Ventilsitz $A = 0,535 F$ war.

δ	ζ	x	δ	ζ	x	δ	ζ	x
15°	90	5,61	35°	20	2,93	55°	4,6	1,68
20°	62	4,75	40°	14	2,54	60°	3,2	1,49
25°	42	4,00	45°	9,5	2,18	65°	2,3	1,35
30°	30	3,47	50°	6,6	1,91	70°	1,7	1,23

Setzt man hier

$$\zeta = \left(x \frac{F}{A} - 1\right)^2 \dots \dots \dots (5),$$

so hat der Coefficient x, dessen Werthe

$$= 0,535 (1 + \sqrt{\zeta})$$

in obiger Tabelle beigefügt sind, eine etwas andere Bedeutung, als $\frac{1}{\alpha}$ in den früheren Fällen; er ändert sich mit δ nicht nur insofern als von diesem Winkel der Ablenkungswiderstand und die innere Contraction abhängt, sondern auch besonders deshalb, weil δ die kleinste Durchflussöffnung wesentlich bedingt, so lange dieselbe $< A$ ist. Betrachtet man den

* Weisbach setzt $\zeta = \left(\frac{F'}{\alpha A} - 1\right)^2$ mit $A = \frac{A_1 + A_2}{2}$ und findet dann aus seiner auch oben benutzten Beobachtung den etwas grösseren Werth $\frac{1}{\alpha} = 1,645$; diese Einführung des arithmetischen Mittels von A_1 und A_2 erscheint indessen ohne specielle Versuche nicht motivirt.

Coefficienten x als Function **nur** von δ, so können seine angeführten Werthe dazu dienen, gemäss Gl. (5) die Widerstandscoefficienten von Klappenventilen auch für andere Querschnittsverhältnisse $\frac{A}{F}$ bei gegebenen Werthen von δ zu bestimmen. Wäre z. B. $A = 0{,}64 F$, so hätte man bei $\delta = 50^0$

$$\zeta = \left(\frac{1{,}91}{0{,}64} - 1\right)^2 = 4.$$

§. 93. Einfache Wasserleitung.

Aus einem Behälter, in welchem der Wasserstand durch entsprechen... Zufluss auf constanter Höhe erhalten wird, werde das Wasser unter gl... bleibenden Umständen abgeleitet durch eine Röhre von der Länge l u... von kreisförmigem Querschnitte mit der gleichförmigen Weite d, ohne d... dieselbe (durch Seitenröhren oder Oeffnungen) einen anderen Wasser-Z... oder Abfluss hat, als am Anfang resp. am Ende. Durch jeden Quersch... der Röhre fliesst dann pro Sec. dasselbe Wasservolumen V mit dersel... mittleren Geschwindigkeit u entsprechend der Gleichung

$$V = \frac{\pi d^2}{4} u \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Wenn, wie gewöhnlich, das Wasser entweder als freier Strahl in d... Atmosphäre oder unter Wasser in einen zweiten Behälter ausfliesst, in d... durch entsprechenden Abfluss die freie Wasseroberfläche auf const... Höhe erhalten wird, während sie ebenso wie dieselbe im ersten Beh... mit der freien atmosphärischen Luft in Berührung ist, so kann die w... same Druckhöhe = der Höhe dieser Wasseroberfläche im ersten Beh... über dem Schwerpunkte der Rohrmündung resp. über dem Wassersp... im zweiten Behälter gesetzt werden bei Abstraction von der dieser H... entsprechenden verhältnissmässig kleinen Differenz des atmosphäri... Luftdruckes. Wird aber allgemein die wirksame Druckhöhe mit H ... der resultirende Widerstandscoefficient etwaiger besonderer Wider... in der Röhre mit ζ bezeichnet, so ist nach §. 90, Gl. (14) ferner

$$\left(1 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}\right) \frac{u^2}{2g} = H \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Elimination von u zwischen den Gleichungen (1) und (2) ... eine Beziehung zwischen l, d, H, V, vermittels welcher eine dieser Gr...

gefunden werden kann, wenn die übrigen gegeben sind. Wenn es sich dabei nur um die Ableitung des Wassers an sich und nicht zugleich um die Verwerthung der lebendigen Kraft des abfliessenden Wassers handelt, so kommt die Geschwindigkeit u nur insofern in Betracht, als von ihr und von d der Factor λ des Leitungswiderstands-Coefficienten abhängt, nämlich nach §. 90

$$\lambda = m\left(\alpha + \frac{\beta}{u\,d}\right),$$

unter m einen etwa $= 1{,}2$ zu setzenden Sicherheitscoefficienten verstanden. Durch diesen Umstand kann die Lösung der betreffenden Aufgaben erschwert und eine successive Näherungsrechnung nöthig gemacht werden, jedoch ist innerhalb der gewöhnlichen Grenzwerthe von u und d die Veränderlichkeit von λ nur eine so mässige, dass es meistens genügt, entweder mit einem constanten Mittelwerthe von λ, etwa $\lambda = 0{,}03$, endgültig zu rechnen, oder die damit gefundenen Resultate einer höchstens einmaligen Correction zu unterwerfen.

Die Länge l pflegt durch die Umstände gegeben zu sein, und bleiben sonach 3 Aufgaben zu erwähnen:

1) Gesucht die wirksame Druckhöhe H, bei welcher eine gegebene Röhre ein gegebenes Wasservolumen V liefert.

Man findet u aus Gl. (1), dazu und zu der gegebenen Rohrweite d den Coefficienten λ, endlich H aus Gl. (2).

2) Gesucht das Wasservolumen V, welches eine gegebene Röhre bei gegebener wirksamer Druckhöhe liefert.

Mit $\lambda = 0{,}03$ findet man näherungsweise u aus Gl. (2), damit und mit d einen corrigirten Werth von λ, mit diesem einen corrigirten Werth von u aus Gl. (2), endlich V aus Gl. (1).

3) Gesucht die Weite d einer Röhre, welche bei gegebener Länge und wirksamer Druckhöhe ein gegebenes Wasservolumen V liefert.

Aus Gl. (1) und (2) folgt durch Elimination von u

$$\left(1 + \zeta + \lambda\,\frac{l}{d}\right)\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2\frac{1}{d^4} = 2gH$$

$$d = \sqrt[5]{\frac{(1+\zeta)d + \lambda l}{2gH}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Mit $\lambda = 0{,}03$ und $d = 0$ (auf der rechten Seite) findet man einen Näherungswerth von d und von $ud = \frac{4V}{\pi d}$, dazu einen corrigirten Werth

von λ, endlich mit diesem und mit jenem Näherungswerth der Rohrweite einen corrigirten Werth derselben nach Gl. (3).

Sollte z. B. die Weite einer Röhre von 50 Mtr. Länge bestimmt werden, welche bei $H = 1{,}5$ Mtr. wirksamer Druckhöhe und $\zeta = 0{,}5$ (einem Widerstand durch innere Contraction am Anfang der Röhre entsprechend) pro Sec. $V = 0{,}03$ Cubikm. Wasser abführt, so fände man näherungsweise

$$d = \sqrt[5]{\frac{0{,}03\,.\,50}{2\,.\,9{,}81\,.\,1{,}5}\left(\frac{0{,}12}{\pi}\right)^2} = 0{,}149 \text{ Mtr.}$$

$$\frac{1}{u d} = \frac{0{,}149\,\pi}{0{,}12} = 3{,}9$$

$$\lambda = 1{,}2\,.\,0{,}0239 = 0{,}0287 \text{ nach der Tabelle in §. 90,}$$

und damit hinlänglich genau

$$d = \sqrt[5]{\frac{1{,}5\,.\,0{,}149 + 0{,}0287\,.\,50}{2\,.\,9{,}81\,.\,1{,}5}\left(\frac{0{,}12}{\pi}\right)^2} = 0{,}152 \text{ Mtr.}$$

Die Kenntniss der Pressung in verschiedenen Querschnitten der Röhre ist namentlich insofern von Interesse, als ihr grösster Werth zusammen mit der Weite d die nöthige Wanddicke der Röhre bedingt, ihr kleinster Werth aber der Grenze Null nicht sehr nahe kommen darf, wenn eine stetige Strömung mit voller Ausfüllung der ganzen Röhre gesichert bleiben soll. Selbst wenn auch nur die Pressung stellenweise kleiner als der Atmosphärendruck ist, kann durch Ausscheidung von Luft aus dem Wasser oder durch das Eindringen äusserer Luft durch Undichtigkeiten der Röhre eine Störung verursacht werden, besonders wenn an solchen nach oben convex gekrümmten Rohrstellen die Luft in bedeutendem Masse sich ansammeln kann ohne durch das strömende Wasser mit fortgeführt zu werden; durch senkrecht aufgesetzte Röhren (Luftständer, Windstöcke) muss diese Luft von Zeit zu Zeit durch Oeffnung eines Hahns oder auch durch ein selbstthätig wirkendes, mit Schwimmer versehenes Ventil entfernt werden. Ist nun

p_0 der äussere Druck am Oberwasserspiegel (an der freien Wasseroberfläche im Ausflussgefäss),

p derselbe an dem um h Mtr. tiefer liegenden Unterwasserspiegel, der im Falle eines freien Ausflusses durch den Schwerpunkt des Endquerschnittes der Röhre gehend zu denken ist,

p_s die Pressung in der Entfernung s vom Anfange der Röhre, Länge

deren Mittellinie gemessen, und in der (möglicher Weise negativen) Tiefe z unter dem Oberwasserspiegel,

Z die wirksame Druckhöhe, ζ_s der resultirende Coefficient besonderer Widerstände für die Rohrstrecke $= s$ bis zu der Stelle, wo die Pressung $= p_s$ ist, so folgt aus

$$Z = z + \frac{p_0 - p_s}{\gamma}$$

mit Rücksicht auf Gl. (2), worin auch s, ζ_s, Z beziehungsweise für l, ζ, H gesetzt werden können, die Druckhöhe

$$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - Z = \frac{p_0}{\gamma} + z - \left(1 + \zeta_s + \lambda\frac{s}{d}\right)\frac{u^2}{2g} \quad (4)$$

oder auch wegen

$$\left(1 + \zeta + \lambda\frac{l}{d}\right)\frac{u^2}{2g} = H = h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$$

$$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + z - \frac{(1 + \zeta_s)d + \lambda s}{(1 + \zeta)d + \lambda l}\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right) \ldots (5).$$

Wenn am Ober- und Unterwasserspiegel der Atmosphärendruck stattfindet, und die entsprechende an beiden Stellen gleich zu setzende Druckhöhe (die Wasserbarometerhöhe von ungefähr 10 Mtr.)

$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p}{\gamma} = b$$

gesetzt wird, so ist

$$\frac{p_s}{\gamma} = b + z - \frac{(1 + \zeta_s)d + \lambda s}{(1 + \zeta)d + \lambda l}\,h \,\ldots\ldots\ldots (6).$$

Sofern diese Druckhöhe stets positiv bleiben muss, ist eine etwaige Erhebung der Röhre in ihrem Verlaufe über den Oberwasserspiegel an die Bedingung geknüpft:

$$-z < b - \frac{(1 + \zeta_s)d + \lambda s}{(1 + \zeta)d + \lambda l}\,h \,\ldots\ldots\ldots (7)$$

oder näherungsweise, wenn die Röhre verhältnissmässig lang und von erheblichen besonderen Widerständen frei ist,

$$-z < b - \frac{s}{l}\,h \,\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Hieraus ist ersichtlich, unter welchen Umständen das Wasser durch eine heberartige Röhre über eine mässige Anhöhe hinüber geleitet werden kann, deren höchste Erhebung über den Oberspiegel jedenfalls $< b$ sein

muss, vorausgesetzt dass auch durch einen Windstock an der höchsten Stelle die daselbst sich ansammelnde Luft von Zeit zu Zeit entfernt wird. Eine solche Anhöhe kann um so höher sein, je näher ihr Gipfel dem Anfange der Röhre liegt, je kleiner also daselbst $\frac{s}{l}$, sowie ferner je kleiner h ist; eine Erhebung über den Oberwasserspiegel in der Entfernung s vom Anfange der Röhre ist überhaupt nicht mehr zulässig, wenn $h > \frac{l}{s}$ ist. —

Uebrigens kann, selbst abgesehen von dem Eindringen äusserer Luft durch undichte Stellen der Röhre, die Pressung in derselben nie kleiner werden, als die Pressung p' gesättigten Wasserdampfs (überhaupt gesättigten Dampfs der betreffenden Art) für die betreffende Temperatur. Die Forderung, dass der Rohrquerschnitt in der Entfernung s vom Anfange der Röhre und in der Tiefe z unter dem Oberwasserspiegel vollständig vom Wasserstrom erfüllt sein soll, ist deshalb an die Bedingung geknüpft, dass die betreffende durch Gl. (5) bestimmte Pressung p_s nicht nur > 0, sondern $> p'$ sei; für warmes Wasser ist also die Erfüllung jener Forderung weniger leicht, als für kaltes. Auch wird sie erschwert durch eine örtliche Verengung der Röhre; wenn dadurch etwa das Wasser genöthigt wird, durch einen Querschnitt hindurch zu fliessen, der nur $\frac{1}{n}$ des vollen Röhrenquerschnitts beträgt, so ist die wirksame Druckhöhe bis zu dieser Stelle

$$Z = \left(n^2 + \zeta_s + \lambda \frac{s}{d}\right) \frac{u^2}{2g}$$

entsprechend der mittleren Geschwindigkeit $= nu$ daselbst, und es ist dann in Gl. (5) $(n^2 + \zeta_s)$ für $(1 + \zeta_s)$ zu setzen. Damit die Pressung p_s an dieser Stelle $> p'$ sei, muss somit

$$n^2 < \frac{z + \frac{p_0 - p'}{\gamma}}{h + \frac{p_0 - p}{\gamma}} \left(1 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}\right) - \zeta_s - \lambda \frac{s}{d} \cdots$$

sein, was um so eher der Fall ist, je grösser z, je kleiner s und je kleiner p' (je kälter das Wasser) ist. Durch die Nichterfüllung dieser Bedingung wird, wenn auch die Verengung und Wiedererweiterung der Röhre ganz allmählig stattfindet, ihre volle Ausfüllung mit strömendem Wasser nicht nur an der betreffenden Stelle, sondern von da bis zur Mündung in Frage gestellt, so dass vielmehr der verengte Querschnitt selbst als Mündung zu betrachten ist.

§. 94. Leitungsröhre, welche der Forderung grösstmöglicher lebendiger Kraft des ausfliessenden Wassers entspricht.

Wenn der Zweck einer Leitungsröhre nicht nur in der Abführung einer gewissen Wassermenge pro Sec. an und für sich, sondern zugleich darin besteht, dieses Wasser mit grösstmöglicher lebendiger Kraft ausfliessen zu lassen behufs deren Verwerthung zu irgend einer Arbeitsverrichtung, so kann es angemessen sein, die Röhre von übrigens constantem Querschnitte $F = \frac{\pi d^2}{4}$ mit einer Mündung $= A$ endigen zu lassen, welche von F verschieden, insbesondere $< F$ ist. An die Stelle der Gl. (2) des vorigen §. tritt dann die allgemeinere Gleichung (15) in §. 90 oder, wenn wie gewöhnlich der durch die Mündung verursachte Widerstand sehr klein im Vergleich mit den übrigen Widerständen ist und somit ihr Ausflusscoefficient μ dem Contractionscoefficienten α gleich gesetzt werden kann, die Gleichung

$$\left[\left(\frac{F}{\alpha A}\right)^2 + \zeta + \lambda \frac{l}{d}\right] \frac{u^2}{2g} = H \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Ist V das pro Sec. ausfliessende Wasservolumen, y die mittlere Ausflussgeschwindigkeit (im kleinsten Querschnitte des contrahirten Strahls), also

$$L = \gamma V \frac{y^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

die lebendige Kraft des pro Sec. ausfliessenden Wassers, so soll zunächst A bei gegebenen Werthen von l, d, H, ζ so bestimmt werden, dass L ein **Maximum** ist.

Setzt man zu dem Ende

$$x = \frac{\alpha A}{F}, \text{ also } y = \frac{F}{\alpha A} u = \frac{u}{x},$$

so ist nach Gl. (1) mit $\zeta' = \zeta + \lambda \frac{l}{d}$

$$\left(\frac{1}{x^2} + \zeta'\right) \frac{u^2}{2g} = H; \quad \frac{y^2}{2g} = \frac{1}{x^2} \frac{u^2}{2g} = \frac{H}{1 + \zeta' x^2} \quad \ldots (3),$$

$$V = Fu = Fxy = Fx \sqrt{\frac{2gH}{1 + \zeta' x^2}} \quad \ldots\ldots (4),$$

$$L = \gamma F H \sqrt{2gH}\,\frac{x}{(1+\zeta' x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hier ist zwar ζ' als Function von λ streng genommen auch von $\varkappa =$ $x\sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta' x^2}}$, also von x abhängig; wird aber von dieser nur untergeordneten Abhängigkeit abgesehen, d. h. ζ' als Constante behandelt, so ist L ein Maximum, wenn

$$(1+\zeta' x^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2}(1+\zeta' x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2\zeta' x = 0$$

$$1 + \zeta' x^2 - 3\zeta' x^2 = 1 - 2\zeta' x^2 = 0$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2\zeta'}}, \quad \text{also} \quad \frac{A}{F} = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{1}{2\zeta'}} \;\ldots\ldots\ldots$$

ist. Damit ist nach Gl. (3)

$$\frac{y^2}{2g} = \frac{2}{3}H, \quad \text{folglich} \quad max.\, L = \frac{2}{3}\gamma V H \;\ldots\ldots [...]$$

worin nach Gl. (4) und (5) zu setzen ist:

$$V = F\sqrt{\frac{2gH}{3\zeta'}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [...]$$

Der entsprechende Werth von $\zeta' = \zeta + \lambda\frac{l}{d}$ kann dabei so best[...] werden, dass zunächst mit einem ungefähren Werth von λ, etwa [...] $\lambda = 0{,}03$ ein Näherungswerth von ζ' und von $\varkappa = \frac{V}{F} = \sqrt{\frac{2gH}{3\zeta'}}$ [...]rechnet wird; mit dem Coefficienten λ, welcher dieser Geschwindigk[...] und der gegebenen Rohrweite d entspricht, findet man dann einen [...]girten Werth von ζ'.

Nach Gl. (5) ist $A \lesssim F$, wenn $\zeta' \gtrsim \frac{1}{2\alpha^2}$ oder vielmehr, da [...] $A = F$ keine Contraction stattfindet, wenn $\zeta' \gtrsim \frac{1}{2}$ ist; übrigens k[...] es nur bei einer kurzen Röhre und bei stetigem Uebergange ihrer inn[...] Wandfläche in diejenige des Gefässes (zur Vermeidung der inneren [...]traction des eintretenden Wassers) der Fall sein, dass $\zeta' \lesssim \frac{1}{2}$ wär[...] somit der Aufgabe eine Erweiterung der Röhre an ihrer Mündung [...]spräche.

Der vorstehenden Entwickelung zufolge entspricht die grösstmögliche lebendige Kraft des ausfliessenden Wassers einer gegebenen Leitungsröhre dann, wenn ihre Mündung A so regulirt wird, dass von der wirksamen Druckhöhe $^1/_3$ als Widerstandshöhe verbraucht und $^2/_3$ als Ausflussgeschwindigkeitshöhe gewonnen werden. Durch Verkleinerung von A wird dann zwar y^2 vergrössert, aber V in höherem Grade verkleinert, während durch Vergrösserung von A zwar auch V vergrössert, aber y^2 in höherem Grade verkleinert wird. —

Wenn nun aber (mit Rücksicht auf den disponiblen Wasserzufluss zum Ausflussgefässe) V gegeben und dafür die Weite d der Röhre zusammen mit ihrer Mündungsgrösse A erst zu bestimmen wäre, so würde das absolute Maximum von L dem Maximum der Ausflussgeschwindigkeitshöhe, also dem Minimum der Widerstandshöhe oder einer möglichst weiten Röhre entsprechen, und wenn es gefordert würde, ein unter den gegebenen Umständen, d. h. bei gegebenen Werthen von l, V, H, ζ grösstmögliches L auf die vortheilhafteste Weise, d. h. mit kleinstmöglichem Kostenaufwande zu erzielen, so würde diese Aufgabe streng genommen die Kenntniss und Berücksichtigung der mit ihrer Weite wachsenden Herstellungskosten der Röhre sowie des Geldwerthes der durch eine gewisse lebendige Kraft des ausfliessenden Wassers zu gewinnenden Arbeit erfordern. Behufs einer in gewissem Sinne relativ vortheilhaftesten Lösung kann indessen die Forderung gestellt werden, die Rohrweite d so zu bestimmen, dass, wenn sie nebst den Grössen l, H, ζ gegeben wäre und A der Bedingung $L = max.$ entsprechend gewählt wird, dann das Ausflussquantum pro Sec. dem gegebenen V gleich ist. Demgemäss hat man nach Gl. (7) mit Rücksicht auf die Bedeutung von ζ'

$$V = \frac{\pi d^2}{4}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{gH}{\zeta + \lambda\frac{l}{d}}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{gH}{\zeta d + \lambda l}d^5}$$

$$d = \sqrt[5]{\frac{3(\zeta d + \lambda l)}{2gH}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2} \qquad (8).$$

Setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung vorläufig $d = 0$ und $\lambda = 0{,}03$, so findet man einen Näherungswerth von d, mit diesem und mit dem corrigirten Werthe von λ, welcher $ud = \frac{4V}{\pi d}$ entspricht, alsdann einen corrigirten Werth von d. Durch denselben ist $\zeta' = \zeta + \lambda\frac{l}{d}$ be-

stimmt, nach Gl. (5) mit $F = \frac{\pi d^2}{4}$ folglich auch A; den so bestimmten Werthen von d und A entspricht nach Gl. (6) die lebendige Kraft

$$L = \frac{2}{3} \gamma V H$$

des pro Sec. ausfliessenden Wassers als relatives Maximum.

Diese Bestimmung der Rohrweite d kann namentlich auch dann von Vortheil sein, wenn das durch die Röhre pro Sec. abzuleitende Wasservolumen zwischen gewissen Grenzen V_1 und V_2 veränderlich ist und dennoch die lebendige Kraft des ausfliessenden Wassers möglichst constant bleiben soll. Man kann dann d nach Gl. (8) für eine gewisse mittlere Ausflussmenge V berechnen, so dass bei gleichzeitiger Wahl der Mündungsgrösse A gemäss Gl. (5) die lebendige Kraft L nach Gl. (6) möglichst gross ist, und zwar jenen Mittelwerth V so wählen, dass, wenn bei entsprechend veränderten Mündungsgrössen A_1 und A_2 die Wasservolumina V_1 und V_2 pro Sec. ausfliessen, ihre lebendigen Kräfte $= L_1$ und L_2 einander gleich und somit möglichst wenig $< L$ werden. Setzt man

$$x_1 = \frac{\alpha_1 A_1}{F}, \quad x_2 = \frac{\alpha_2 A_2}{F}, \quad \text{während} \quad x = \frac{\alpha A}{F} = \sqrt{\frac{1}{2\zeta'}}$$

ist (die Contractionscoefficienten können bei verschiedenen Mündungsgrössen etwas verschieden sein), so ist bei Vernachlässigung des geringen Einflusses, den die Veränderlichkeit von u zwischen den Grenzen $\frac{V_1}{F}$ und $\frac{V_2}{F}$ auf den Coefficienten λ und somit auf $\zeta' = \zeta + \lambda \frac{l}{d}$ ausübt, mit Rücksicht auf die Gleichungen (4) und (7), von denen erstere allgemein, somit auch für $x = x_1$ oder x_2, $V = V_1$ oder V_2 gilt,

$$V_1^2 (1 + \zeta' x_1^2) = F^2 x_1^2 \,.\, 2gH = 3\zeta' V^2 x_1^2$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{V_1^2}{(3V^2 - V_1^2)\zeta'}} = x \sqrt{\frac{2}{3\left(\frac{V}{V_1}\right)^2 - 1}}$$

ebenso

$$x_2 = \sqrt{\frac{V_2^2}{(3V^2 - V_2^2)\zeta'}} = x \sqrt{\frac{2}{3\left(\frac{V}{V_2}\right)^2 - 1}}$$

Hiernach ist, wenn y_1 die mittlere Geschwindigkeit bedeutet, mit der

Wassermenge V_1 ausfliesst, nach der allgemein gültigen Gleichung (3):

$$\frac{y_1^2}{2g} = \frac{H}{1+\zeta x_1^2} = \frac{H}{1+\frac{V_1^2}{3V^2 - V_1^2}} = H\frac{3V^2 - V_1^2}{3V^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{und} \quad L_1 &= \gamma V_1 \frac{y_1^2}{2g} = \gamma V_1 H\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{V_1}{V}\right)^2\right] \\ \text{ebenso} \quad L_2 &= \gamma V_2 H\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{V_2}{V}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \ldots (10).$$

Die **Forderung** $L_1 = L_2$ ergiebt somit:

$$V_1 - \frac{1}{3}\frac{V_1^3}{V^2} = V_2 - \frac{1}{3}\frac{V_2^3}{V^2}; \quad V_1 - V_2 = \frac{1}{3}\frac{V_1^3 - V_2^3}{V^2}$$

$$V = \sqrt{\frac{V_1^2 + V_1 V_2 + V_2^2}{3}} \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Wenn nun dieser mittleren Wassermenge V entsprechend die Rohrweite d nach Gl. (8) bestimmt wird, ferner x_1 und x_2 nach Gl. (9) mit $x = \sqrt{\frac{1}{2\zeta}}$, und somit

$$A = \frac{x}{\alpha}F, \quad A_1 = \frac{x_1}{\alpha_1}F, \quad A_2 = \frac{x_2}{\alpha_2}F \ldots\ldots (12)$$

mit $F = \frac{\pi d^2}{4}$, so ist die lebendige Kraft des pro Sec. ausfliessenden Wassers für die mittlere Wassermenge V am grössten:

$$L = \frac{2}{3}\gamma V H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13),$$

übrigens aber in geringerem Grade veränderlich, als die Wassermenge selbst. Setzt man nämlich, wenn $V_1 > V_2$ ist,

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 - m \text{ und nach Gl. (11): } \frac{V}{V_1} = \sqrt{1 - m + \frac{m^2}{3}} = \frac{1}{1+n},$$

so ist nach Gl. (10) und (13)

$$\frac{L_1}{L} = \frac{L_2}{L} = \frac{3}{2}\frac{V_1}{V}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{V_1}{V}\right)^2\right] = \frac{1}{2}(1+n)\left[3 - (1+n)^2\right]$$

$$= 1 - \frac{3+n}{2}n^2,$$

also nur um eine kleine Grösse der zweiten Ordnung < 1, wenn m und somit n eine kleine Grösse der ersten Ordnung ist.

Es sei z. B. $l = 150$ Mtr., $H = 15$ Mtr., $\zeta = 0{,}5$ und $V_1 = 0{,}15$ Cubikm., $V_2 = 0{,}1$ Cubikm. Nach Gl. (11) ist dann

$$V = 0{,}1258 \text{ Cubikm.}$$

und nach Gl. (8) mit vorläufig $d = 0$ und $\lambda = 0{,}03$

$$d = 0{,}2595, \quad \text{also} \quad \frac{1}{ud} = \frac{\pi d}{4V} = 1{,}62.$$

Hierzu ist nach §. 90 bei Vergrösserung um 20%

$$\lambda = 1{,}2 \,.\, 0{,}02371 = 0{,}0285,$$

womit und mit $d = 0{,}2595$ nach Gl. (8) die corrigirte Rohrweite

$$d = 0{,}258 \text{ Mtr.}, \quad F = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}05228 \text{ Quadratm.}$$

gefunden wird. Dem entsprechend ist nun

$$\zeta' = 0{,}5 + 0{,}0285 \frac{150}{0{,}258} = 17{,}07 \quad \text{und} \quad x = \sqrt{\frac{1}{2\zeta'}} = 0{,}171$$

$$A = \frac{x}{\alpha} F = \frac{0{,}00894}{\alpha} \text{ Quadratm.},$$

während nach Gl. (9) mit $\frac{V}{V_1} = 0{,}839$ und $\frac{V}{V_2} = 1{,}258$ sich ergiebt:

$$x_1 = 0{,}229 \quad \text{und} \quad A_1 = \frac{x_1}{\alpha_1} F = \frac{0{,}01197}{\alpha_1} \text{ Quadratm.},$$

$$x_2 = 0{,}125 \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{x_2}{\alpha_2} F = \frac{0{,}00654}{\alpha_2} \text{ Quadratm.}$$

Die Werthe von α, α_1 und α_2 sind von der besonderen Art und W[illegible] abhängig, wie den Umständen gemäss die Mündungen angeordnet werd[illegible]. Bei der mittleren Wassermenge V ist nach Gl. (13) die lebendige Kraft

$$L = \frac{2}{3} \,.\, 1000 \,.\, 0{,}1258 \,.\, 15 = 1258 \text{ Kgmtr.},$$

bei der grössten und kleinsten Wassermenge wird sie nach Gl. (10) und [illegible] nur im Verhältnisse

$$\frac{L_1 = L_2}{L} = \frac{1}{2} \frac{V_1}{V} \left[3 - \left(\frac{V_1}{V}\right)^2\right] = 0{,}941$$

kleiner.

§. 95. Leitungsröhre, deren Weite und hindurch fliessende Wassermenge vom einen zum anderen Ende stetig veränderlich ist.

Wenn die Weite einer Wasserleitungsröhre nicht constant ist, und somit die (von den Bahnen der Wassertheilchen rechtwinkelig geschnittenen) Querschnitte des Wasserstroms nicht eben, sondern krumme Flächen sind, so ist auch die Pressung selbst abgesehen vom Einfluss der Schwere oder der sonstigen äusseren Massenkräfte von Punkt zu Punkt eines solchen Querschnitts veränderlich. Das Gesetz dieser Veränderlichkeit, welches theils durch die Convergenz oder Divergenz der Bahnen, theils durch ihre Krümmung bedingt wird, soll für den Fall näher untersucht werden, dass die innere Wandfläche der Röhre eine Umdrehungsfläche ist, deren Meridiancurven überall nur wenig gegen die Axe geneigt sind.

Es sei (Fig. 44) CW die Meridiancurve der Wandfläche, ihr Krümmungshalbmesser im Punkte $C = \varrho$, positiv oder negativ, jenachdem die Curve ihre convexe oder concave Seite der Axe BO zukehrt. Die Querschnitte können als Kugelflächen angenommen werden, deren Radien = den bis zur Axe gerechneten Tangenten der Curve CW sind; für zwei im Sinne der strömenden Bewegung unendlich nahe aufeinander folgende Querschnitte seien BC und B_1C_1 die Meridiancurven, O und O_1 die Mittelpunkte. Der Radius $BO = CO$ sei $= x$, und zwar positiv oder negativ, jenachdem die Richtungen BO und CO mit den Richtungen BB_1 und CC_1 der Bewegung identisch oder ihnen entgegengesetzt sind. Ist A ein beliebiger Punkt von BC, y der Bogen AB oder das Perpendikel von A auf die Axe (was mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Kleinheit des Winkels AOB einerlei ist bei Vernachlässigung kleiner Grössen 2ter Ordnung gegen 1), ist ferner A_1 der Schnittpunkt von B_1C_1 und der Geraden AO, so sind AO und A_1O_1 unendlich nahe Tangenten einer beliebigen Bahn, und es ist OA_1O_1 ihr Contingenzwinkel. Der letztere hat mit Rücksicht auf das Dreieck OA_1O_1 zum Sinus des Winkels AOB, also zu $\frac{y}{x}$ das Verhältniss $OO_1 : A_1O_1$, welches ebenso wie x für alle Punkte A des Bogens BC gleich ist. Dieser Contingenzwinkel der Bahn im Punkte A ist folglich proportional y, so dass ihr Krümmungshalbmesser umgekehrt proportional y, d. h. $= \frac{r}{y}\varrho$ gesetzt werden kann, wenn r den Bogen CB oder das Per-

Fig. 44.

pendikel von C auf die Axe bedeutet. Die Meridiancurven und Parallelkreise der kugelförmigen Querschnitte sind hier diejenigen sich rechtwinkelig schneidenden Curven, welche in §. 72 beziehungsweise als Krümmungs- und Normalcurven der Querschnitte bezeichnet wurden; y hat also hier dieselbe Bedeutung wie dort, während die dort mit ρ, ρ' und ρ'' bezeichneten Krümmungshalbmesser hier $= \frac{r}{y}\rho$, x und x sind.

Das Aenderungsgesetz der Pressung im Querschnitte ist nun bedingt durch die 2te und 3te der Gleichungen (1) in §. 73. Danach ist, wenn hier wie in §. 90 die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte A mit w bezeichnet wird (zur Unterscheidung von der mittleren Geschwindigkeit u des Querschnitts), mit $K_y = K_z = 0$, d. h. abgesehen von dem Einflusse äusserer Massenkräfte

$$\frac{\partial p}{\partial y} = R_y - \mu \frac{y w^2}{r\rho}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = R_z \ldots\ldots\ldots\ldots 1.$$

worin $\mu = \frac{\gamma}{g}$ die constante specif. Masse der Flüssigkeit bedeutet. Nach den allgemeinen Ausdrücken von R_y und R_z in §. 72, Gl. (1) ist aber hier mit Rücksicht darauf, dass a priori die Geschwindigkeit in allen Punkten eines Parallelkreises gleich, somit $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ gesetzt werden kann, also $R_z = 0$ und somit p in demselben Querschnitte nur mit y veränderlich. Für R_y ergiebt sich mit den oben bezeichneten Substitutionen

$$R_y = R\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\, \partial y} + 2\frac{y}{r\rho}\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{3}{x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

oder, weil nach §. 72, Gl. (4, a)

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 2\frac{w}{x}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s\, \partial y} = \frac{2}{x}\frac{\partial w}{\partial y} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist,
$$R_y = R\left(-\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial y} + 4\frac{y w}{r\rho x}\right)$$

und somit nach Gl. (1)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{R}{x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{y w}{r\rho}\left(\mu w - 4\frac{R}{x}\right) \ldots\ldots$$

Hieraus ergeben sich, sofern $\frac{\partial w}{\partial y}$ stets negativ ist, und mit Rücksicht auf die Umstände, unter denen x und ρ positiv oder negativ sind, die folgenden Schlüsse:

Bei einer conischen Röhre ($\varrho = \infty$) nimmt die Pressung mit wachsender Entfernung von der Axe ab oder zu, jenachdem das Wasser vom engeren zum weiteren Ende oder umgekehrt fliesst. Wenn die Bahnen im Sinne der Bewegung divergiren, so hat ihre Krümmung an sich, jenachdem sie nach aussen concav oder convex sind, die Divergenz der Bahnen folglich im Sinne der Bewegung zu- oder abnimmt, eine Abnahme oder Zunahme der Pressung mit wachsender Entfernung von der Axe zur Folge, also eine Aenderung von gleichem oder entgegengesetztem Sinne wie diejenige, welche durch die Divergenz der Bahnen an sich abgesehen von ihrer Krümmung bedingt wird. Sind aber die Bahnen im Sinne der Bewegung convergent, so bedingt ihre Krümmung nur im Allgemeinen eine Pressungsänderung in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, wie die Convergenz an sich, jenachdem letztere im Sinne der Bewegung zu- oder abnimmt; es kann nämlich dieser Einfluss der Bahnkrümmung verschwinden, oder in das Gegentheil sich umkehren, wenn die Geschwindigkeit $\overline{\overline{<}} \frac{4R}{\mu x}$ ist. Die bedeutendste Aenderung der Pressung, und zwar eine Abnahme derselben mit wachsender Entfernung von der Axe, findet folglich dann statt, wenn das Wasser vom engeren zum weiteren Ende einer Röhre strömt, deren Weite in zunehmendem Grade zunimmt. Es kann dann der Fall sein, dass die Pressung an der Rohrwand bis Null abnimmt und somit das Wasser von derselben sich trennt, während die mittlere Pressung noch erheblich > 0 ist.

Die Integration von Gl. (3) zur Bestimmung von p als Function von y erfordert die Kenntniss des Gesetzes, nach welchem w mit y sich ändert; zur Bestimmung des letzteren müsste noch die erste der Gleichungen (1) in §. 73 nebst dem Ausdrucke von R_s nach §. 72, Gl. (1) herangezogen werden. Legt man aber näherungsweise für w dasselbe Aenderungsgesetz im Querschnitte zu Grunde, welches nach §. 90, Gl. (11) für die cylindrische Röhre gilt, setzt man also z. B. für eine conische Röhre ($\varrho = \infty$)

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\gamma I_1}{2R} y,$$

so ist nach Gl. (3), unter p_0 die Pressung in der Mitte verstanden,

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\gamma I_1}{2x} y; \quad p = p_0 + \frac{\gamma I_1}{4x} y^2$$

oder nach §. 90, Gl. (12) mit $I_1 = b \frac{u}{d^2} = \frac{b}{4} \frac{u}{r^2}$

$$p = p_0 + \frac{\gamma b}{16x} u \left(\frac{y}{r}\right)^2$$

und insbesondere die Pressung am Rande:

$$p_1 = p_0 + \frac{1}{16} \gamma b \frac{u}{x} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 4$$

Unter solchen Umständen, wie sie bei den Anwendungen vorzukommen pflegen, ist übrigens dieser durch die Convergenz oder Divergenz der Bahnen bedingte Unterschied der Pressungen am Rande und in der Mitte eines Querschnitts immer nur sehr unbedeutend. Ist z. B. $u = 20$ Mtr. pro Sec., $x = \pm 0{,}05$ Mtr., so ergiebt sich mit

$$\gamma = 1000 \quad \text{und} \quad b = 0{,}000004 \qquad (\S.\ 90,\ \text{Gl. } 4)$$

$$p' = p_0 \pm 0{,}1$$

d. h. der fragliche Unterschied nur 0,1 Kgr. pro Quadratm. oder ungefähr 0,00001 Atm.

Um die Grösse des Einflusses der Bahnkrümmungen zu prüfen, kann Gl. (3) mit Weglassung des Gliedes, welches sich so eben als unwesentlich herausgestellt hat, also die Gleichung

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{r\varrho}\left(\mu w^2 y - 4\frac{R}{x} w y\right)$$

integrirt werden, indem dabei wieder näherungsweise

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\gamma I_1}{2R} y = -4fy \quad \text{mit} \quad f = \frac{\gamma I_1}{8R}$$

gesetzt wird. Mit Rücksicht darauf, dass

$$\int wy\,dy = \frac{1}{2}\int w\,d(y^2) = \frac{1}{2} wy^2 - \frac{1}{2}\int \frac{\partial w}{\partial y} y^2\,dy$$

$$= \frac{1}{2} wy^2 + 2f\int y^3\,dy = \frac{1}{2} wy^2 + \frac{1}{2} f y^4$$

$$\int w^2 y\,dy = \frac{1}{2}\int w^2\,d(y^2) = \frac{1}{2} w^2 y^2 - \int w \frac{\partial w}{\partial y} y^2\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} w^2 y^2 + 4f\int w y^3\,dy$$

$$4\int wy^3dy = \int w\,d(y^4) = wy^4 - \int\frac{\partial w}{\partial y}\,y^4dy = wy^4 + 4f\int y^5dy =$$
$$= wy^4 + \frac{2}{3}fy^6$$

ist, ergiebt sich

$$p = p_0 - \frac{1}{r\varrho}\left[\mu\left(\frac{1}{2}\,w^2y^2 + fwy^4 + \frac{2}{3}\,f^2y^6\right) - 2\,\frac{R}{x}\,(wy^2 + fy^4)\right]$$

und insbesondere mit $y = r$, $w = w'$ die Pressung am Rande

$$p' = p_0 - \frac{r}{2\varrho}\left[\mu\left(w'^2 + 2fw'r^2 + \frac{4}{3}\,f^2r^4\right) - 4\,\frac{R}{x}\,(w' + fr^2)\right]$$

oder mit $w' = u - \frac{\gamma I_1}{8R}\,r^2 = u - fr^2$ (§. 90)

$$p' = p_0 - \frac{r}{2\varrho}\left[\mu\left(u^2 + \frac{1}{3}\,f^2r^4\right) - 4R\,\frac{u}{x}\right]$$

oder endlich, wenn nach §. 90, Gl. (12)

$$f = \frac{\gamma I_1}{8R} = \frac{u - w'}{r^2} = \frac{1-\varepsilon}{r^2}\,u \quad \text{und} \quad R = \frac{1}{32}\,\frac{\gamma b}{1-\varepsilon}$$

sowie die specifische Masse $\mu = \frac{\gamma}{g}$ gesetzt wird,

$$p' = p_0 - \frac{\gamma}{2}\,\frac{r}{\varrho}\left[\left(1 + \frac{(1-\varepsilon)^2}{3}\right)\frac{u^2}{g} - \frac{1}{8}\,\frac{b}{1-\varepsilon}\,\frac{u}{x}\right] \quad \ldots (5).$$

Das Verhältniss $\varepsilon = \frac{w'}{u}$ der Geschwindigkeit an der Wandfläche zur mittleren Geschwindigkeit ist bei der Analyse in §. 90 unbestimmt geblieben und auch durch Beobachtung nicht näher bekannt. Setzt man aber etwa $\varepsilon = 0{,}9$ nach Analogie der in dieser Hinsicht besser bekannten Bewegung des Wassers in Canälen, so erkennt man, dass das Glied

$$\frac{\gamma}{2}\,\frac{r}{\varrho}\cdot\frac{1}{8}\,\frac{b}{1-\varepsilon}\,\frac{u}{x} = 10\,\frac{r}{\varrho}\cdot\frac{1}{16}\,\gamma b\,\frac{u}{x}$$

von einerlei Grössenordnung ist mit der Pressungsdifferenz, die sich nach Gl. (4) als stets sehr unbedeutend ergeben hatte. Bei Vernachlässigung dieses Gliedes und des kleinen Bruches $\frac{(1-\varepsilon)^2}{3} = \frac{1}{300}$ ist somit

$$p' = p_0 - \gamma\,\frac{r}{\varrho}\,\frac{u^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

woraus man erkennt, dass die Krümmung der Bahnen allerdings sehr bedeutende Druckdifferenzen in den verschiedenen Punkten eines Querschnitts bedingen kann; z. B. mit $\frac{u^2}{2g} = 20$ Mtr. (entsprechend auch ungefähr $u = 20$ Mtr. pro Sec.) und $\gamma = 1000$ wäre

$$p' = p_0 - 20000 \frac{r}{\varrho} \text{ Kgr. pro Quadratm.} -$$

Ein mathematischer Ausdruck für die Leitungswiderstandshöhe nicht cylindrischer Röhren ist nur bei grösserer Länge derselben von Interesse, wobei die Convergenz oder Divergenz und die Krümmung der Bahnen stets nur gering ist; der Widerstand kurzer Röhren ist nöthigenfalls durch besondere Versuche im Ganzen zu bestimmen. Ist dann $B_1 ds$ die Leitungswiderstandshöhe für das Längenelement ds einer solchen längeren Röhre, so wird der Ausdruck der Grösse B_1, welche hier eine Function von s ist, nur wenig von demjenigen verschieden sein, welcher in §. 90 für cylindrische Röhren bestimmt wurde; es werden also, wenn unter y den Durchmesser und unter u die mittlere Geschwindigkeit des betreffenden Querschnitts verstanden, auch hier

$$B_1 = a \frac{u^2}{y} + b \frac{u}{y^2} = \frac{\lambda}{y} \frac{u^2}{2g} \quad \text{mit} \quad \lambda = \alpha + \frac{\beta}{uy}$$

gesetzt wird, die Coefficienten a, b resp. α, β nur wenig andere Werthe haben wie für cylindrische Röhren nach §. 90. Die modificirten Ausdrücke dieser Coefficienten liessen sich zwar nach Analogie der in §. 90 angestellten Untersuchung näherungsweise bestimmen mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen (1) in §. 73, den allgemeinen Ausdruck von R in §. 72 und das oben untersuchte Aenderungsgesetz der Pressung im Querschnitte, doch hätte diese Bestimmung wenig Werth besonders wegen des in den Ausdrücken von a und b vorkommenden Verhältnisses $\varepsilon =$ welches hier wie dort unbestimmt bliebe, so dass es auch ungewiss wäre, ob ihm hier derselbe Werth beizulegen ist wie dort. Es könnte z. B. ε bei divergenten Bahnen kleiner, bei convergenten grösser sein, als bei den parallelen Bahnen in der cylindrischen Röhre, wodurch a (proportional ε) im ersten Falle kleiner, im zweiten grösser, b (proportional $1 - \varepsilon$) im ersten Falle grösser, im zweiten kleiner würde. In Ermangelung besonderer Versuche, welche allein mit Sicherheit hierüber entscheiden könnten, mögen deshalb den fraglichen Coefficienten hier dieselben Werthe zugeschrieben werden, wie sie früher für cylindrische Röhren bestimmt wurden. Wird dann ausserdem, was zumeist zulässig ist, dem Coefficienten λ ein

constanter Mittelwerth beigelegt, entsprechend einem Mittelwerthe des Products uy für die betrachtete Rohrstrecke von der Länge l, so ist die Leitungswiderstandshöhe für diese ganze Rohrstrecke, falls s vom Anfange derselben an gerechnet wird,

$$B = \int_0^l B_1 ds = \frac{\lambda}{2g}\int_0^l \frac{u^2}{y} ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Darin ist, wenn F den betreffenden Querschnitt des Wasserstroms und V das pro Sec. hindurchfliessende Wasservolumen bedeutet,

$$u = \frac{V}{F}, \quad \text{insbesondere} \quad u = \frac{4V}{\pi y^2},$$

wenn, wie hier vorausgesetzt werden soll, die ebenen Querschnitte der Röhre kreisförmig sind und den calottenförmigen Wasserquerschnitten F gleich gesetzt werden, was mit Vernachlässigung verhältnissmässig kleiner Grössen 2ter Ordnung geschehen kann, falls die Wandfläche überall unter kleinen Winkeln gegen die Mittellinie der Röhre geneigt ist.

Ebenso wie y kann auch V im Allgemeinen eine Function von s sein entsprechend dem Falle eines längs der ganzen Rohrlänge stetig vertheilten (oder wenigstens behufs einer leichteren Rechnung als stetig vertheilt vorausgesetzten) seitlichen Wasserabflusses aus derselben. Von grösserem Interesse sind dabei nur die einfachsten Specialfälle, dass entweder V constant und y gleichförmig variabel, oder y constant und V gleichförmig variabel ist.

1) Ist V constant, so ist die Widerstandshöhe

$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \int_0^l \frac{ds}{y^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

insbesondere für eine conische Röhre, deren Durchmesser am engeren und weiteren Ende beziehungsweise $= d$ und D seien, ist wegen

$$\frac{y-d}{D-d} = \frac{s}{l}, \quad \text{also} \quad ds = \frac{l}{D-d} dy$$

$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{l}{D-d}\int_d^D \frac{dy}{y^5} = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{l}{D-d}\,\frac{1}{4}\left(\frac{1}{d^4} - \frac{1}{D^4}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2 \frac{l}{4}\,\frac{(D+d)(D^2+d^2)}{D^4}$$

und wenn $B = \frac{\zeta}{2g}\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2$ gesetzt wird, so dass ζ den Leitungswiderstandscoefficienten der conischen Röhre bezogen auf ihren kleineren Endquerschnitt bedeutet, so folgt:

$$\zeta = \frac{\lambda}{4}\frac{l}{D}\left(1 + \frac{d}{D}\right)\left(1 + \frac{d^2}{D^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Darin ist λ nach §. 90 entsprechend $uy = \frac{8V}{\pi(D+d)}$ zu nehmen.

2) Ist y constant $= d$, so ist

$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\frac{1}{d^5}\int_0^l V^2 ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

und wenn insbesondere V gleichförmig veränderlich ist (wie z. B. bei einer städtischen Wasserleitungsröhre längs einer Strasse mit Rücksicht auf die successive abgezweigten einzelnen Hausleitungen im Durchschnitt vorausgesetzt werden kann) etwa von V_0 für $s = 0$ bis V_1 für $s = l$, also

$$\frac{V_0 - V}{V_0 - V_1} = \frac{s}{l}$$

$$\text{oder} \quad \frac{V}{V_0} = 1 - \frac{1-\alpha}{l}s \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{V_1}{V_0},$$

$$\text{so folgt } B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2\frac{1}{d}\int_0^l\left(1 - 2\frac{1-\alpha}{l}s + \frac{(1-\alpha)^2}{l^2}s^2\right)ds$$

$$= \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V_0}{\pi d^2}\right)^2\frac{l}{d}\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

in welcher Gleichung mit Rücksicht auf die Bedeutung von α auch V_1 statt V_0 und $\frac{1}{\alpha}$ statt α gesetzt werden kann. Setzt man also

$$B = \lambda_0\frac{l}{d}\frac{u_0^2}{2g} = \lambda_1\frac{l}{d}\frac{u_1^2}{2g},$$

unter u_0 und u_1 beziehungsweise die mittlere Geschwindigkeit im Anfangs- und Endquerschnitte verstanden, so ist

$$\lambda_0 = \frac{\lambda}{3}\left[1 + \frac{V_1}{V_0} + \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^2\right]; \quad \lambda_1 = \frac{\lambda}{3}\left[1 + \frac{V_0}{V_1} + \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^2\right].$$

Der Coefficient λ ist dabei nach §. 90 entsprechend $ud = \frac{2(V_0 + V_1)}{\pi d}$ zu nehmen.

§. 96. Zusammengesetzte Wasserleitung.

Eine zusammengesetzte Wasserleitung bestehe im Allgemeinen aus einem beliebig verzweigten Röhrennetz, wodurch beliebig viele Wasserbehälter so unter sich verbunden sind, dass jeder mit jedem anderen communicirt und somit das Wasser aus einem Theil derselben beständig aus- und in die übrigen einfliesst; an den constant erhaltenen freien Wasseroberflächen aller Behälter herrsche derselbe (atmosphärische) Druck. Wenn das Röhrennetz an einigen Stellen frei ausmündet, so kann man den hier stattfindenden freien Ausfluss als den Abfluss in einen Behälter betrachten, dessen Wasseroberfläche durch den Schwerpunkt der Mündung geht. Uebrigens kann es der Fall sein, dass die aus dem einen Theil der Behälter ausfliessende Wassermenge grösser, als die in die übrigen gleichzeitig einfliessende ist, indem der Ueberschuss schon unterwegs durch Seitenöffnungen der Rohrleitung oder durch untergeordnete Seitenröhren ausfliesst, die nicht als Bestandtheile des hier in Rede stehenden Röhrennetzes betrachtet werden; möglicher Weise kann sogar das Wasser von allen Behältern her in die Rohrleitung einfliessen sollen, um nur längs derselben successive auszufliessen. Von irgend einer Verzweigungsstelle des Netzes können 3 oder mehr Rohrstrecken ausgehen; im Ganzen seien m solcher Verzweigungsstellen (Knotenpunkte des von den Mittellinien der Röhren gebildeten Netzes) vorhanden, die durch n Rohrstrecken unter sich oder mit den Behältern verbunden sind. Von den mannigfach verschiedenen Aufgaben, zu denen dieser allgemeine Fall Veranlassung geben kann, ist die folgende besonders bemerkenswerth.

Gegeben seien: die relativen Höhen der m Verzweigungsstellen und der Wasseroberflächen in allen Behältern, ferner die Längen aller n Rohrstrecken, die Strömungsrichtungen des Wassers in denselben (jedenfalls so, dass das Wasser aus dem Behälter mit höchstgelegener Wasseroberfläche ausfliesst) und für jede derselben die Wasservolumina $= V$ und αV, welche pro Sec. durch ihren Anfangs- und Endquerschnitt hindurchfliessen sollen bei Voraussetzung einer gleichförmigen Abnahme durch stetig auf der ganzen Länge vertheilte Wasserentziehung. Unter der weiteren Voraussetzung, dass eine Aenderung der Rohrweite nur an den Verzweigungsstellen stattfindet (widrigenfalls übrigens auch eine solche Stelle, wo die Rohrweite sich ändert, als eine Verzweigungsstelle betrachtet werden könnte, von der nur zwei verschiedene Rohrstrecken auslaufen), sollen dann die n Rohrweiten so berechnet werden, dass die Anlagekosten des Röhrennetzes möglichst klein sind.

Was diese letzte Forderung betrifft, so sind die Kosten des Röhren-netzes an und für sich nahezu seinem Gewicht proportional zu setzen, also bei gegebener Art von Röhren der Summe $\Sigma l y \delta$, wenn l die Länge, y die Weite, δ die Wanddicke irgend einer der n Rohrstrecken bedeutet. Die Dicke δ pflegt nach der Formel

$$\delta = a + by$$

bestimmt zu werden, unter a eine vom Material abhängige Constante und unter b einen Coefficienten verstanden, der zugleich von dem grössten inneren Ueberdruck ($= i$ Atmosphären) abhängt, der im Inneren der Röhre unter normalen Umständen stattfindet, abgesehen nämlich von etwaigen Stössen des in seiner Bewegung plötzlich gehemmten Wassers. Weil aber gleichwohl die Coefficienten a und b auch solchen hydraulischen Stössen und anderen kaum berechenbaren Umständen, den Anstrengungen beim Transport, beim Legen und Verbinden der einzelnen Rohrstücke, dem Einfluss des Erddrucks, den Besonderheiten des Materials und der Fabricationsmethode etc. Rechnung tragen müssen, haben sie einen vorwiegend empirischen Charakter; insbesondere für gusseiserne Röhrenleitungen kann im Allgemeinen

$$\delta = 0{,}008 + 0{,}0025\,iy \text{ Mtr.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

gesetzt werden, wenn auch y in Metern ausgedrückt ist. Die gesammten Anlagekosten $= R$ des Röhrennetzes begreifen indessen auch die Verlegungskosten in sich, welche eher proportional $\Sigma l y$, als proportional $\Sigma l y \delta$ sind, so dass, wenn

$$R = C \Sigma l y (1 + \beta y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

gesetzt wird, unter C eine Constante verstanden, der Coefficient β wesentlich $< \frac{b}{a}$ ist.*

Wenn an den Verzweigungsstellen plötzliche Richtungs- und Querschnittsänderungen (innere Contractionen) durch abgerundete Ausschlüsse und sanfte Krümmungen möglichst vermieden werden, so sind die Widerstandshöhen daselbst von ähnlicher Art und Grösse, wie sie nach §. 77, Gl. durch die Vereinigung von Flüssigkeitsströmen bedingt werden, d. h. sie sind = solchen Geschwindigkeitshöhen, welche den Differenzen der mittleren Geschwindigkeiten in den angrenzenden Rohrstrecken entsprechen. Wenn aber, wie es gewöhnlich der Fall ist und auch hier vorausgesetzt

* Nach Bresse, Cours de mécanique appliquée, Bd. II., 1860, stellen sich die Kosten einer Wasserleitung in Paris auf nahe 100y francs pro laufenden Meter, alle Verlegungskosten eingerechnet.

werden soll, die einzelnen n Rohrstrecken sehr lang im Vergleich mit ihren Durchmessern sind, so kann die im Folgenden mit z bezeichnete Ueberdruckhöhe (Ueberschuss der Druckhöhe über die atmosphärische Druckhöhe von nahe 10 Mtr.) an irgend einer Verzweigungsstelle für die zunächst gelegenen Querschnitte aller daselbst zusammen- oder auseinander laufenden Rohrstrecken als gleich betrachtet, und es kann ferner in der Fundamentalgleichung

$$\frac{u^2 - u_0^2}{2g} = H - B \qquad (§. 78, Gl. 5),$$

bezogen auf die ganze Länge l irgend einer der n Rohrstrecken, die linke Seite im Vergleich mit der Widerstandshöhe B dieser Strecke vernachlässigt, B also = der betreffenden wirksamen Druckhöhe H gesetzt werden, die durch eine gegebene Höhendifferenz (das Gefälle der Rohrstrecke) und durch eine oder zwei der Unbekannten z als algebraische Summe derselben bestimmt ist, jenachdem die betreffende Rohrstrecke eine Verzweigungsstelle mit einem Behälter oder mit einer anderen Verzweigungsstelle verbindet. Sofern aber die Berechnung des Röhrennetzes unter der Voraussetzung seiner grössten Leistung (des grössten vorkommenden Zuflusses zu den oberen Behältern und der grössten Wasserentziehung längs den einzelnen Rohrstrecken und durch die unteren Behälter) angestellt wird, wobei die etwa vorhandenen Schieber oder sonstigen Regulirungsvorrichtungen als ganz geöffnet vorausgesetzt werden, so können etwaige Krümmungs- oder andere besondere Widerstände dadurch in der Regel genügend berücksichtigt werden, dass in dem Ausdruck (§. 95, Gl. 11) für die Leitungswiderstandshöhe

$$B = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{3} \frac{l}{y^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

der Coefficient λ nöthigenfalls etwas grösser gesetzt wird, als für eine ganz gerade cylindrische Röhre nöthig wäre. Durch die n Gleichungen $B = H$ sind nun die n Unbekannten y durch die m Ueberdruckhöhen z bestimmt, und wird somit auch R nach Gl. (2) eine Function dieser m unabhängig Variablen z, welche dann ihrerseits gemäss der Forderung $R = min.$ durch die m Gleichungen $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$ bestimmt sind. Mit Rücksicht darauf, dass die Ueberdruckhöhe z an einer bestimmten Verzweigungsstelle A nur in den Ausdrücken für die Durchmesser y der in A zusammenstossenden Rohrstrecken vorkommt, wird durch die Gleichungen $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$ die Forderung des Minimums der gesammten Anlagekosten in die Forderungen zer-

legt, dass die Kosten des um jede Verzweigungsstelle herumliegenden Rohrsystems, insoweit sie von der Ueberdruckhöhe an dieser Stelle abhängen, je ein partielles Minimum sein müssen.

Die Schwierigkeiten dieses Rechnungsverfahrens können dadurch vermindert werden, dass man zunächst mit einem für das ganze Rohrsystem gleich gesetzten Mittelwerth λ' des Coefficienten λ (etwa $\lambda' = 0.03$) angenäherte Werthe y' von y berechnet, indem dabei auch R vorläufig proportional $\Sigma l y'$ gesetzt wird. Mit corrigirten Werthen von λ, entsprechend den Mittelwerthen von

$$uy' = \frac{2(1+\alpha)V}{\pi y'} \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

findet man dann corrigirte Werthe von y gemäss der Forderung

$$\Sigma l y (1 + \beta y') = min.$$

Wenn übrigens die Zahl der Verzweigungsstellen einigermassen gross ist, so macht die Auflösung der m Gleichungen $\frac{\partial R}{\partial z} = 0$ nach den Unbekannten z sehr umständliche Rechnungen nöthig, selbst wenn man sich darauf beschränkt, R proportional $\Sigma l y$ zu setzen und für λ einen Mittelwerth a priori anzunehmen. Es sei nämlich A irgend eine Verzweigungsstelle, bei welcher die Ueberdruckhöhe im Rohrsystem $= z$ ist. $A'A$ sei irgend eine der Rohrstrecken, in denen das Wasser gegen A hin, AA'' irgend eine derjenigen, in welchen das Wasser von A weg fliesst; z' und z'' seien die Ueberdruckhöhen des Wasserstroms bei A' und A'', ferner h' und h'' die Höhen einer gewissen Horizontalebene E über A, A' und A''. Mit den Bezeichnungen

$$x = h - z, \qquad x' = h' - z', \qquad x'' = h'' - z''$$

sind dann die wirksamen Druckhöhen

$$\text{der Strecken } A'A = (h - h') + z' - z = x - x'$$
$$\text{und der Strecken } AA'' = (h'' - h) + z - z'' = x'' - x.$$

Dabei wäre, wenn eine der Röhren $A'A$ resp. AA'' die Verzweigungsstelle A mit einem der Wasserbehälter verbände, für diese Röhre z' resp. z'' = Null und $x' = h'$ resp. $x'' = h''$ = der Höhe der Ebene E über der freien Wasseroberfläche in dem betreffenden Behälter zu setzen.

Setzt man ferner die Widerstandshöhe B irgend einer Rohrstrecke

$$B = \frac{Pl}{y^5} \quad \text{mit} \quad P = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{3} \quad \text{nach Gl. (3)},$$

so ist gemäss den Gleichungen $B = H$

$$\left.\begin{aligned} &\text{für die Röhren } A'A:\quad \frac{Pl}{y^5} = x - x';\quad y = \left(\frac{Pl}{x - x'}\right)^{\frac{1}{5}} \\ &\text{für die Röhren } AA'':\quad \frac{Pl}{y^5} = x'' - x;\quad y = \left(\frac{Pl}{x'' - x}\right)^{\frac{1}{5}} \end{aligned}\right\}\ldots(5).$$

Wenn nun mit Σ' eine die Röhren $A'A$ und mit Σ'' eine die Röhren AA'' mfassende Partialsumme bezeichnet wird, so ist derjenige Theil der Total- umme Σly, in dessen Gliedern die bei A stattfindende Ueberdruckhöhe z esp. die dafür hier eingeführte Unbekannte x vorkommt, nachdem alle urchmesser y durch die verschiedenen Grössen x nach Analogie der leichungen (5) ausgedrückt wurden,

$$\Sigma' l \left(\frac{Pl}{x - x'}\right)^{\frac{1}{5}} + \Sigma'' l \left(\frac{Pl}{x'' - x}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Wenn also R proportional Σly gesetzt und die Abhängigkeit der den Grössen P vorkommenden Factoren λ von den Durchmessern, so auch von x ausser Acht gelassen wird, so ist die Gleichung $\frac{R}{z} = -\frac{\partial R}{\partial x} = 0$:

$$\Sigma' P^{\frac{1}{5}} \left(\frac{l}{x - x'}\right)^{\frac{6}{5}} = \Sigma'' P^{\frac{1}{5}} \left(\frac{l}{x'' - x}\right)^{\frac{6}{5}} \ldots\ldots\ldots (6).$$

ie Auflösung eines Systems von m solcher Gleichungen, in deren jeder ehrere der m Unbekannten x vorkommen, erfordert aber, wenn m eine össere Zahl ist, ein so zeitraubendes Probiren, dass man in der Regel it einer nur unvollkommenen Erfüllung der Forderung $R = min.$ sich rd begnügen müssen, wie es im folgenden §. an einem specielleren Falle zeigt werden soll. —

Uebrigens ist schliesslich zu bemerken, dass die hier als gegeben rausgesetzten Höhenlagen der m Verzweigungsstellen A für die vor- gende Aufgabe nicht wesentlich sind. Wird bei der in Function be- iffenen Wasserleitung unter übrigens gleich bleibenden Umständen eine lche Stelle A gehoben oder gesenkt, also ihre Entfernung h von der en angenommenen festen Horizontalebene E geändert, so ändert sich ch die Ueberdruckhöhe z bei A um gleich viel in gleichem Sinne, so ss $x = h - z$ unverändert bleibt, falls nur die Seitenöffnungen der A herumliegenden Rohrstrecken entsprechend vergrössert oder ver-

kleinert (Ausflusshähne entsprechend mehr oder weniger geöffnet re-
bei intermittirender Wasserentziehung mehr oder weniger lange geöffnet
erhalten) werden, um trotz des örtlich veränderten Ueberdrucks in der
Röhre dieselbe Wassermenge daselbst abfliessen zu lassen. Die n Durch-
messer y können deshalb auch ohne Vermittelung der m Hülfsgrössen
oder x gemäss der Forderung $R = min.$ bestimmt werden, und zwar auf
folgende Weise.

Wenn man von einem der Wasserbehälter W', aus denen das Wasser
zufliesst, längs dem Rohrsystem beständig im Sinne der strömenden Be-
wegung fortgeht bis zu einem der Wasserbehälter W'', in welche das
Wasser ergiesst, so ist das gegebene Gefälle von W' bis W'', d. h. die
Höhendifferenz der freien Wasseroberflächen in beiden Behältern = der
Summe der Widerstandshöhen B für alle durchlaufenen Rohrstrecken, also
nach Gl. (3) = einer Function ihrer Durchmesser y. Wenn man aber von
einem der Behälter W' aus im Sinne der strömenden Bewegung fortgeht bis
zu einer Stelle gelangt, wo die hindurch strömende Wassermenge = Null
gegeben ist, indem ihr auch von einem anderen der Behälter W' Wasser
zufliesst, so ist das gegebene Gefälle zwischen beiden Behältern W' = der
Differenz der Summen von Widerstandshöhen auf beiden Wegen. Solcher
Bedingungsgleichungen für die n Durchmesser y giebt es so viele als man
auf verschiedenen Wegen im Sinne der strömenden Bewegung von einem
der Behälter W' zu einem der Behälter W'', oder von irgend zweien der
ersteren zu einer bewegungslosen Stelle im Rohrsystem gelangen kann;
mit Berücksichtigung dieser Bedingungen können dann die Durchmesser
so bestimmt werden, dass die als Function derselben ausgedrückten Anlage-
kosten R des Röhrennetzes ein Minimum werden.

Ob diese Methode leichter zum Ziele führt, als die früher erklärte
bei Benutzung der Hülfsgrössen z oder x, lässt sich im Allgemeinen kaum
übersehen; offenbar macht aber auch sie bei einigermaassen viel verzweigten
Röhrenleitungen so zeitraubende Rechnungen nöthig, dass die Beschränkung
auf eine nur unvollkommene Erfüllung der Bedingung $R = min.$ dadurch
gerechtfertigt wird.

§. 97. Städtische Wasserleitung.

Der im vorigen §. besprochene allgemeinere Fall werde durch die bei
städtischen Wasserleitungen gewöhnlich zutreffende Voraussetzung be-
schränkt, dass nur ein einziger **Zuflussbehälter** vorhanden ist, aus

welchem das Wasser nach beliebig vielen **Abflussbehältern** hinfliesst durch ein Röhrensystem, längs dessen einzelnen Strecken je eine als gleichförmig vertheilt vorausgesetzte Wasserentziehung (durch die einzelnen Hausleitungen) stattfindet; wenn nämlich zwar in Wirklichkeit irgend ein Zweig des Röhrensystems am Ende geschlossen ist oder mit einer Mündung endigt, durch welche das Wasser (z. B. als springender Strahl) frei ausfliesst, so kann man sich doch zum Zweck einer allgemein gültigen Ausdrucksweise bei der Darstellung des Rechnungsganges auch in solchen Fällen den betreffenden Röhrenzweig am Ende mit einem Wasserbehälter in Verbindung denken, in welchem die freie Wasseroberfläche über jenem Röhrenende eine Höhe = der daselbst thatsächlich stattfindenden Ueberdruckhöhe hat. Das Röhrensystem beginne vom Zuflussbehälter aus mit einem einzigen Hauptrohr, welches sich demnächst mehr und mehr verzweigt der Art, dass jeder Verzweigungsstelle nur durch **eine** Rohrstrecke das Wasser zugeleitet wird, während die Zahl der ableitenden Rohrstrecken beliebig gross sein kann, wenn sie auch gewöhnlich nur = 2 oder 3 ist.

Dabei pflegen die Verhältnisse der Art zu sein, dass eine gewisse, am Zuflussbehälter bei A_0 beginnende und an einem Abflussbehälter bei A endigende Folge von Rohrstrecken A_0A_1, A_1A_2, $A_2A_3 \ldots A_nA$ als der **Hauptröhrenstrang** zu betrachten ist, insofern er mit Rücksicht auf seine Gesammtlänge und Wassermenge voraussichtlich grössere Anlagekosten bedingen wird, als irgend ein anderer, das Wasser vom Zuflussbehälter bis zu einem Abflussbehälter leitender Röhrenstrang. In gleicher Weise können gewisse der bei A_1, $A_2 \ldots A_n$ abgezweigten und bis zu anderen Abflussbehältern reichenden Rohrstränge von grösster Länge und Wassermenge als die hauptsächlichsten oder **Seitenstränge 1ter Ordnung** bezeichnet werden, von denen dann wieder **Seitenstränge 2ter Ordnung** abgezweigt sein können u. s. f. In solchem Falle wird nun eine zwar unvollkommene, aber zumeist genügende Lösung der im vorigen §. besprochenen Aufgabe erhalten, wenn unter den übrigens wie dort gegebenen Umständen zunächst die Durchmesser y der einzelnen Strecken des Hauptstranges so bestimmt werden, dass sie die Herstellungskosten des letzteren zu einem partiellen Minimum machen, darauf bei nun vollständig bestimmtem Hauptstrange die Durchmesser der verschiedenen Strecken der Seitenstränge 1ter Ordnung so, dass die Herstellungskosten jedes solchen Seitenstranges für sich ein partielles Minimum werden u. s. f. Das Verfahren ist dabei immer dasselbe und braucht nur für den Hauptstrang erklärt zu werden.

H sei die gesammte wirksame Druckhöhe desselben, d. h. die Höhe

der freien Wasseroberfläche W_0 im Zuflussbehälter über der freien Wasseroberfläche W im Abflussbehälter am Ende des Hauptstranges; für sie durch die Verzweigungsstellen begrenzten

Strecken	$A_0 A_1$	$A_1 A_2$	$A_2 A_3 \ldots A_n A$
seien die Längen	$=$	l_0	l_1	$l_2 \ldots l_n$
die Durchmesser	$=$	y_0	y_1	$y_2 \ldots y_n$
die Widerstandshöhen	$=$	B_0	B_1	$B_2 \ldots B_n$
die Wassermengen	$=$	V_0	V_1	$V_2 \ldots V_n$
und	$=$	$\alpha_0 V_0$	$\alpha_1 V_1$	$\alpha_2 V_2 \ldots \alpha_n V_n$

pro Sec. beziehungsweise in den Anfangs- und Endquerschnitten. V_0 ist also das Wasservolumen, welches pro Sec. in die ganze Röhrenleitung einfliesst, $(1 - \alpha_0)V_0$, $(1 - \alpha_1)V_1 \ldots$ sind die längs den Strecken $A_0 A_1$, $A_1 A_2 \ldots$ successive entzogenen, $V_1 - \alpha_0 V_0$, $V_2 - \alpha_1 V_1 \ldots$ die durch die Seitenstränge beziehungsweise bei A_1, $A_2 \ldots$ abgezweigten Wasservolumina, und $\alpha_n V_n$ ist das Wasservolumen, welches am Ende des Hauptstranges, wenn auch zunächst nicht wirklich ausfliessen, so doch soll ausfliessen können mit Rücksicht auf eine spätere Ergänzung der Anlage bei weiterer Ausdehnung der Stadt. Dieselbe Rücksicht kann für die Enden der Seitenstränge maassgebend sein, und ist dann auch V_0 entsprechend grösser, als dem augenblicklichen Bedürfniss entsprechen würde, in Rechnung zu bringen. Es seien ferner die Höhen des Oberwasserspiegels W_0

über den Stellen	A_1	$A_2 \ldots$	A_n	A
$=$	h_1	$h_2 \ldots$	h_n	
und daselbst	z_1	$z_2 \ldots$	z_n	h
die Ueberdruckhöhen, also	$h_1 - z_1$	$h_2 - z_2 \ldots$	$h_n - z_n$	H
$=$	x_1	$x_2 \ldots$	x_n	H

die wirksamen Druckhöhen von W_0 bis zu diesen Stellen A_1, $A_2 \ldots A_n$, A resp. W; für die einzelnen Strecken $= l_0$, $l_1 \ldots l_n$ sind dann die wirksamen Druckhöhen $= x_1$, $x_2 - x_1 \ldots H - x_n$.

Ausser H sind gegeben: alle Längen l, Höhen h, Wassermengen V und αV; und wenn nach Gl. (3) im vorigen §. irgend eine der Widerstandshöhen

$$B = \frac{Pl}{y^5} \quad \text{mit} \quad P = \frac{\lambda}{2g}\left(\frac{4V}{\pi}\right)^2 \frac{1 - \alpha + \alpha^2}{3} \quad \ldots$$

gesetzt wird, so sind die Durchmesser y so zu bestimmen, dass mit Rücksicht auf die Bedingung

$$H = \Sigma B = \Sigma \frac{Pl}{y^5} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

die Anlagekosten R des Hauptstranges ein Minimum sind. Wenn also diese zunächst proportional Σly gesetzt und die verschiedenen Grössen λ, folglich auch P als unabhängig von den Durchmessern betrachtet werden, so sind in der Differentialgleichung

$$\Sigma l dy = 0,$$

welche der Forderung $R = min.$ entspricht, die $(n + 1)$ Differentiale dy nach Gl. (2) an die Bedingungsgleichung

$$\Sigma \frac{Pl}{y^6} dy = 0$$

gebunden, und man könnte zwischen beiden Gleichungen eins der Differentiale dy eliminiren, wonach dann die = Null gesetzten Coefficienten der übrigen n Differentiale zusammen mit Gl. (2) die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung aller Durchmesser liefern würden. Am geschicktesten wird indessen diese Entwickelung ausgeführt, indem die zweite der obigen Gleichungen nach der Multiplication mit einem vorläufig unbestimmten Coefficienten (er sei hier mit $-\mu^6$ bezeichnet) zur ersten addirt und dann der fragliche Coefficient so bestimmt wird, dass in der resultirenden Gleichung

$$\Sigma l \left(1 - \mu^6 \frac{P}{y^6}\right) dy = 0$$

die Coefficienten aller $(n + 1)$ Differentiale dy einzeln = Null werden. Es ist dann

$$y = \mu P^{\frac{1}{6}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

und folglich nach Gl. (2)

$$\Sigma \frac{Pl}{\mu^5 P^{\frac{5}{6}}} = H; \qquad \mu = \sqrt[5]{\frac{\Sigma l P^{\frac{1}{6}}}{H}} \dots\dots\dots (4).$$

Zu demselben Resultat führt Gl. (6) im vorigen §., in welcher hier die Summen Σ' und Σ'' sich auf je ein Glied reduciren, so dass, wenn die Grössen l und P für die Strecke $A'A$ mit l' und P', für die Strecke AA'' mit l'' und P'' bezeichnet werden, unter $A'A$ und AA'' irgend zwei auf einander folgende Rohrstrecken des Hauptstranges verstanden, jene Gleichung hier in der Form geschrieben werden kann:

$$\frac{l' \sqrt[6]{P'}}{x - x'} = \frac{l'' \sqrt[6]{P''}}{x'' - x}.$$

Mit Rücksicht auf Gl. (5) im vorigen §. folgt daraus

$$\frac{x-x'}{x''-x} = \frac{l'}{l''}\sqrt[6]{\frac{P'}{P''}} = \frac{P'l'}{P''l''}\left(\frac{y''}{y'}\right)^5, \quad \text{also} \quad \frac{y'}{y''} = \left(\frac{P'}{P''}\right)^{\frac{1}{6}}$$

oder allgemein $y = \mu P^{\frac{1}{6}}$, unter μ einen für alle Rohrstrecken gleichen Factor verstanden, der dann schliesslich aus der Gleichung

$$\Sigma \frac{Pl}{y^5} = \Sigma (x - x') = H$$

wie oben gefunden wird.

Mit einem constanten Mittelwerth λ' von λ, etwa $\lambda' = 0{,}03$, kann man nun P_0, P_1, $P_2 \ldots P_n$ nach Gl. (1), dann μ nach Gl. (4) und y_1, $y_2 \ldots y_n$ nach Gl. (3) berechnen.

Wird jetzt irgend einer der so gefundenen Näherungswerthe von y mit y' und der entsprechende, mit $\lambda = \lambda'$ berechnete Näherungswerth von P mit P' bezeichnet, so findet man corrigirte Werthe von λ gemäss den betreffenden Mittelwerthen von

$$uy' = \frac{2(1+\alpha)V}{\pi y'}$$

und damit corrigirte Werthe von $P = \frac{\lambda}{\lambda'} P'$. Um dann die Rohrweiten richtiger gemäss der Forderung

$$R = C \Sigma l y (1 + \beta y) = min., \quad \text{also} \quad \Sigma l (1 + 2\beta y) dy = 0$$

zu berechnen, hätte man analog dem obigen Verfahren jetzt μ so zu wählen, dass in der Gleichung

$$\Sigma l \left(1 + 2\beta y - \mu^6 \frac{P}{y^6}\right) dy = 0$$

die Coefficienten aller $(n+1)$ Differentiale dy einzeln $=$ Null werden. Wenn man aber zur Vermeidung der dazu nöthigen Auflösung hoher Gleichungen behufs einer immerhin weiteren und meistens endgültig ausreichenden Näherung

$$y = \mu \left(\frac{P}{1 + 2\beta y'}\right)^{\frac{1}{6}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

setzt, so ist nach Gl. (2)

$$\Sigma \frac{Pl(1+2\beta y')^{\frac{5}{6}}}{\mu^5 P^{\frac{5}{6}}} = H;\ \mu = \sqrt[5]{\frac{\Sigma l(1+2\beta y')\left(\frac{P}{1+2\beta y'}\right)^{\frac{1}{6}}}{H}} \quad (6).$$

Durch die somit festgestellten Rohrweiten y des Hauptstranges, denen bei der Ausführung gewisse abgerundete Werthe nach üblichen Abstufungen substituirt zu werden pflegen, sind nun auch die Widerstandshöhen B nach Gl. (1), sowie die wirksamen Druckhöhen x bis zu den verschiedenen Verzweigungsstellen und die Ueberdruckhöhen z bei denselben bestimmt gemäss den Gleichungen

$$x_i = B_0 + B_1 + B_2 + \ldots + B_{i-1};\quad z_i = h_i - x_i \quad (7).$$

Sollte sich eine dieser Ueberdruckhöhen z kleiner herausstellen, als die wenigstens verlangte Steighöhe des Wassers in den Gebäuden an der betreffenden Stelle, wie es bei hügeligem Terrain der Fall sein könnte, wenn auch H so gewählt ist, dass selbst am Ende bei A die verbleibende Ueberdruckhöhe $= h - H$ noch wenigstens der daselbst verlangten Steighöhe gleich ist, so müsste bei gegebener Lage des Oberwasserspiegels W_0 mit einem entsprechend kleiner angenommenen Werth von H die Rechnung wiederholt werden; die Berücksichtigung der obwaltenden Umstände bei der ersten Annahme von H wird aber solche Wiederholung meistens vermeidlich machen.

Was die Berechnung der Seitenstränge, z. B. des an der Stelle A_i des Hauptstranges abgezweigten Seitenstranges 1ter Ordnung betrifft, so sei H_i die Höhe des Oberwasserspiegels W_0 über dem Wasserspiegel des Abflussbehälters, mit welchem dieser Seitenstrang an seinem Ende in Verbindung ist oder gedacht wird; es ist dann $H_i - x_i$ die wirksame Druckhöhe des ganzen Seitenstranges, welche zur Berechnung der Weiten y seiner einzelnen Strecken in den obigen Formeln an die Stelle von H gesetzt werden muss.

Wenn der Theil $A_0 A_1 A_2 \ldots A_i$ des Hauptstranges sich bei A_i in einer solchen Weise verzweigte, dass es zweifelhaft wäre, welcher der hier sich anschliessenden verschiedenen Röhrenstränge als die Fortsetzung des Hauptstranges betrachtet werden soll, so kann man die Durchmesser der Strecken $A_0 A_1, A_1 A_2 \ldots A_{i-1} A_i$ unter jeder dieser Voraussetzungen nach obigem Verfahren berechnen und schliesslich die arithmetischen Mittel der gefundenen Werthe dafür annehmen. Indem dann auch die Widerstands-

höhen dieser Strecken nach Gl. (1) bekannt sind und somit x_i nach Gl. 7 gefunden wird, sind die bei A_i sich anschliessenden Röhrenstränge alle so zu berechnen, als ob sie Seitenstränge wären, indem zu dem Ende $H - x_i$ an die Stelle von H in den obigen Formeln gesetzt wird, wenn jetzt H die Höhe des Oberwasserspiegels W_0 über dem Wasserspiegel irgend eines der Abflussbehälter bedeutet, mit denen die fraglichen Röhrenstränge an ihren Enden in Verbindung sind oder gedacht werden. —

Schliesslich ist nun aber zu bemerken, dass die den obigen Rechnungen zu Grunde liegende Voraussetzung, es sei ausser den Höhenlagen der freien Wasseroberflächen W der Abflussbehälter auch die Höhe der Oberfläche W_0 des Wassers im Zuflussbehälter gegeben, häufig insofern nicht erfüllt ist, als das Wasser durch eine Kraftmaschine erst in den Zuflussbehälter gehoben werden muss. Dann entsteht die Frage nach der vortheilhaftesten Hubhöhe des Wassers, somit der vortheilhaftesten Höhe der Horizontalebene W_0 über den Horizontalebenen W, als welche diejenige zu bezeichnen ist, bei welcher die Summe aus dem jährlichen Aufwand für die Erhebung des Wassers und den jährlichen Kosten für Verzinsung und Amortisation des Anlagecapitals R der Röhrenleitung unter den gegebenen Umständen ein Minimum ist.

Zur Beantwortung dieser Frage muss R wenigstens angenähert als Function der Höhe von W_0 ausgedrückt werden. Wenn man aber R als proportional Σly betrachtet und erwägt, dass dann für irgend einen Röhrenstrang, der sich vom Zuflussbehälter bis zu einem Abflussbehälter erstreckt, jedes y nach Gl. (3) proportional μ, und μ nach Gl. (4) proportional $H^{-\frac{1}{5}}$ ist, so lässt sich begreifen, dass näherungsweise innerhalb mässiger Grenzen von H auch R proportional $H^{-\frac{1}{5}}$ wird gesetzt werden können, wenn jetzt unter H die Höhe von W_0 über einer Horizontalebene W' verstanden wird, deren Höhenlage ein abgeschätztes Mittel der Höhenlagen aller Ebenen W ist. Wenn man dann zur Correctur der Fehler dieser Schätzung und der zu Grunde liegenden Annahmen überhaupt noch etwas besser

$$R = aH^{-\frac{1}{5}} + b \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

setzt, so können die Constanten a und b genau genug für den vorliegenden Zweck gefunden werden, indem man nach den obigen Regeln die Werthe aller Durchmesser und somit die Werthe von $R = C\Sigma ly(1 + \beta y)$ für zwei verschiedene Werthe von H berechnet, die am besten so angenommen

werden, dass sie den gesuchten vortheilhaftesten Werth von H voraussichtlich zwischen sich enthalten.

Ist nun H_0 die Höhe, auf welche das Wasser bis zur Ebene W' gehoben werden muss, also $H_0 + H$ die ganze Hubhöhe desselben, so ist der erforderliche Nutzeffect der Kraftmaschine, um pro Sec. V_0 Cubikm. Wasser auf diese Höhe zu heben,

$$= \frac{1000}{75} V_0 (H_0 + H) \text{ Pferdestärken.}$$

Sind also K die jährlichen Kosten einer Pferdestärke (mit Rücksicht auf den Betrieb sowie auf Verzinsung und Amortisation des Anlagecapitals für die Kraftmaschine), und werden p Procent für Verzinsung und Amortisation des Anlagecapitals für die Röhrenleitung gerechnet, so entspricht der Forderung, dass

$$\frac{1000}{75} V_0 (H_0 + H) K + \frac{p}{100} \left(a H^{-\frac{1}{5}} + b\right)$$

ein Minimum sei, die Gleichung:

$$\frac{1000}{75} V_0 K - \frac{ap}{500} H^{-\frac{6}{5}} = 0; \quad H = \left(0{,}00015 \frac{ap}{V_0 K}\right)^{\frac{5}{6}} \quad \ldots (9).$$

Wenn man behufs einer ersten Annäherung $R = aH^{-\frac{1}{5}}$ setzt und mit Rücksicht auf Gl. (3) und (4), die Summenzeichen aber hier auf alle Strecken des ganzen Rohrsystems und H auf die mittlere Ebene W' bezogen, auch

$$R = C\Sigma l y = C\mu \Sigma l P^{\frac{1}{6}} = C \frac{(\Sigma l P^{\frac{1}{6}})^{\frac{6}{5}}}{H^{\frac{1}{5}}},$$

so folgt $a = C(\Sigma l P^{\frac{1}{6}})^{\frac{6}{5}}$, also nach Gl. (9)

$$H = \left(0{,}00015 \frac{Cp}{V_0 K}\right)^{\frac{5}{6}} \Sigma l P^{\frac{1}{6}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Hiernach kann H näherungsweise berechnet werden, um dann für einen grösseren und einen kleineren Werth von H die entsprechenden Werthe von R zu finden, welche gemäss dem Ausdrucke (8) die Constanten a und b bestimmen. Gl. (9) liefert schliesslich einen corrigirten Werth der vortheilhaftesten Höhe H.

§. 98. Bewegung des Wassers durch Sandfilter.

Um das Wasser für eine städtische Wasserleitung möglichst rein zu erhalten, wird es entweder an solchen Stellen dem Erdboden entnomm[illegible], wo derselbe aus reinem Sand besteht, den also das Wasser durchdrin[illegible] muss, um in den darin eingegrabenen Bassins oder Canälen sich zu sa[illegible], oder es wird auf künstliche Weise durch eine horizontale Sand[illegible] filtrirt; letztere ruht dabei entweder auf einem durchbrochenen B[illegible], durch dessen Oeffnungen das filtrirte Wasser in einen darunter befindl[illegible] Behälter gelangt, oder sie ruht auf einer Steinschicht mit grösseren Zwi[illegible] räumen, in denen das Wasser seitwärts auf einem undurchlässigen B[illegible] abfliesst. Die Gesetzmässigkeit der Bewegung des Wassers in der Sa[illegible] schicht wird in allen diesen Fällen im Wesentlichen gleich sein, am d[illegible] lichsten aber hervortreten bei der künstlichen Filtration von oben [illegible] unten durch eine horizontale Schicht von gleichförmiger Dicke oder H[illegible], wie solche hier vorausgesetzt werden soll. Ihre obere und untere F[illegible] sei $= F$, und H die wirksame Druckhöhe, d. h. die Höhe der freien [illegible] fläche des über der Sandschicht befindlichen Wassers über der Grund[illegible] dieser Schicht, vermehrt event. um die Differenz der Druckhöhen in d[illegible] beiden Horizontalflächen.

Der von dem Wasser durchströmte Zwischenraum zwischen den Sa[illegible] körnern ist als ein Netzwerk von Haarröhrchen zu betrachten, [illegible] Leitungswiderstandshöhe pro Längeneinheit proportional $\frac{u}{d^2}$ gesetzt w[illegible] kann, wenn d die mittlere Weite eines solchen Haarröhrchens und u [illegible] mittlere Geschwindigkeit des Wassers in demselben bedeutet; denn in [illegible] allgemeinen Ausdrucke der specifischen Leitungswiderstandshöhe

$$B_1 = a\frac{u^2}{d} + b\frac{u}{d^2} = (aud + b)\frac{u}{d^2} \qquad §. 90, (\ldots)$$

verschwindet das erste Glied gegen das zweite um so mehr, je kl[illegible] und d sind. Andere Widerstände werden durch die vielfachen Quers[illegible] und Richtungsänderungen der fraglichen Haarröhrchen verursacht. [illegible] der durchschnittliche Widerstandscoefficient für jede einzelne solche [illegible] deren n pro Längeneinheit vorkommen mögen, so ist für diese di[illegible] sprechende Widerstandshöhe $= n\zeta\frac{u^2}{2g}$; sie kann proportional $\frac{u^2}{d}$ [illegible] werden, sofern n als umgekehrt proportional d zu erachten ist. [illegible] nun endlich die mittlere Länge eines in der Sandschicht durchl[illegible]

Haarröhrchens der Schichtdicke h proportional gesetzt werden muss, ist die gesammte Widerstandshöhe für den Durchgang des Wassers durch die Sandschicht

$$B = \left(\alpha \frac{u}{d^2} + \beta \frac{u^2}{d}\right) h,$$

unter α und β Coefficienten verstanden, deren Werthe besonders davon abhängig sein werden, ob die Sandkörner mehr oder weniger glatt und abgerundet und ihre Grössen mehr oder weniger gleichartig sind; dem mittleren Durchmesser eines Korns ist die mittlere Weite d eines Haarröhrchens proportional zu setzen.

Sofern nun die Geschwindigkeitshöhe, mit der das Wasser die Sandschicht verlässt, im Vergleich mit B verschwindend klein ist, müsste für den Beharrungszustand $B = H$ sein, wenn nicht noch zu berücksichtigen wäre, dass das Durchfliessen des Wassers durch die Sandschicht selbst bei verschwindend kleiner Geschwindigkeit wenigstens eine solche wirksame Druckhöhe erfordert, die der Höhe h' gleich ist, bis zu welcher das Wasser durch Capillarität im Sande aufsteigt. Mit Rücksicht hierauf muss $B = H - h'$ gesetzt werden, und ergiebt sich somit

$$\alpha \frac{u}{d^2} + \beta \frac{u^2}{d} = \alpha \frac{u}{d^2}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} ud\right) = \frac{H - h'}{h}$$

oder, wenn $\frac{\beta}{\alpha} ud$ ein kleiner Bruch ist,

$$u = \frac{d^2}{\alpha} \frac{H - h'}{h} \left(1 - \frac{\beta}{\alpha} ud\right)$$

oder endlich, wenn in dem untergeordneten Gliede auf der rechten Seite

$$u = \frac{d^2}{\alpha} \frac{H - h'}{h}$$

gesetzt wird

$$u = \frac{d^2}{\alpha} \frac{H - h'}{h} \left(1 - \frac{\beta d^3}{\alpha^2} \frac{H - h'}{h}\right) \ldots\ldots\ldots (1).$$

Das Wasservolumen V, welches in der Zeiteinheit durch die Sandschicht hindurchfliesst, ist dem Horizontalschnitte F derselben und jener Geschwindigkeit u proportional zu setzen, also etwa

$$\frac{V}{F} = x \frac{H - h'}{h} - y \left(\frac{H - h'}{h}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Hier sind x, y und h' von der Beschaffenheit des Sandes in solcher Weise abhängig, dass die betreffenden Werthe nur durch Versuche bestimmt

werden können; aus Gl. (1) ist aber zu schliessen, dass unter sonst gleichen Umständen die Coefficienten x und y sowie auch das Verhältniss $\frac{y}{x}$ um so kleiner sein werden, je feiner der Sand ist, während umgekehrt h' mit abnehmender Korngrösse des letzteren zunimmt (§. 63).

Zur Prüfung dieser Gleichung können namentlich Versuche dienen, welche Darcy* in Dijon angestellt hat. Der dabei benutzte Kiessand, bestehend zum grössten Theil aus Sand von ungefähr 0,8 Millim. Siebgrösse, zum kleineren Theil aus Sand von 1 und 2 Millim. Siebgrösse und aus feinem Kies der Art, dass die Zwischenräume ungefähr 0,38 des ganzen Volumens ausmachten, wurde in einer vertical stehenden Röhre von 0,35 Mtr. innerem Durchmesser auf einem durchbrochenen Boden aufgeschichtet, der von zwei sich rechtwinkelig kreuzenden Rosten mit einem darauf gelegten Metallsieb gebildet war. Zu möglichster Vermeidung von Luftblasen in den Zwischenräumen wurde die Röhre mit Wasser gefüllt, bevor der Sand eingestampft wurde; die Dicke der Sandschicht $= h$ wurde am Ende jeder Versuchsreihe gemessen. Im Vergleich mit den beträchtlichen Werthen, welche die Druckhöhe H fast durchweg hatte, konnte die höchstens wenige Centimeter betragende Höhe h' nur eine ganz untergeordnete Rolle bei diesen Versuchen spielen, so dass mit

$$h' = 0, \quad \frac{H}{h} = a, \quad \frac{V}{a} = v$$

die obige Gl. (2) in der Form

$$v = Fx - Fy \,.\, a \,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,.$$

geschrieben werden kann. Im Folgenden sind die gemessenen Werthe von V (Liter pro Minute) und H (Mtr.) und die daraus abgeleiteten Werthe von a und v der 3 ersten Versuchsreihen, verschiedenen Werthen von h entsprechend, zusammengestellt; eine vierte Versuchsreihe, die sich auf Sand von etwas gröberem Korn bezieht, umfasst nur 3 einzelne Versuche für $h = 1{,}70$ Mtr. und solche Druckhöhen H, welche nicht verschieden genug sind, um bei so wenigen Versuchen die Gesetzmässigkeit deutlich hervortreten zu lassen.

---

* Les fontaines publiques de la ville de Dijon, Paris 1856.

V	H	a	v	Δ
		1) $h = 0{,}58$ Mtr.		
3,60	1,11	1,914	1,881	0,014
7,65	2,36	4,069	1,880	0,050
12,00	4,00	6,897	1,740	—0,041
14,28	4,90	8,448	1,690	—0,064
15,20	5,02	8,655	1,756	0,006
21,80	7,63	13,155	1,657	—0,015
23,41	8,13	14,017	1,670	0,013
24,50	8,58	14,793	1,656	0,012
27,80	9,86	17,000	1,635	0,030
29,40	10,89	18,776	1,566	—0,009
		2) $h = 1{,}14$ Mtr.		
2,66	2,60	2,281	1,166	0,059
4,28	4,70	4,123	1,038	—0,027
6,26	7,71	6,763	0,926	—0,078
8,60	10,34	9,070	0,948	—0,003
8,90	10,75	9,430	0,944	0,001
10,40	12,34	10,825	0,961	0,050
		3) $h = 1{,}71$ Mtr.		
2,13	2,57	1,503	1,417	0,016
3,90	5,09	2,977	1,310	—0,041
7,25	9,46	5,532	1,311	0,047
8,55	12,35	7,222	1,184	—0,023

Wenn man nach der Methode der kleinsten Quadrate aus jeder dieser 3 Versuchsreihen die wahrscheinlichsten Werthe der Coefficienten Fx und Fy von Gl. (3) berechnet, dann damit die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler Δ, die in obiger Zusammenstellung hinzugefügt wurden (d. h. die Differenzen der beobachteten und der mit den wahrscheinlichsten Werthen von Fx und Fy nach Gl. (3) berechneten Werthe von v), endlich aus diesen Beobachtungsfehlern Δ die wahrscheinlichen Fehler $= \xi$ und η ableitet, welche den so bestimmten wahrscheinlichsten Werthen von Fx und Fy anhaften, so findet man:

1) $Fx = 1{,}900$, $\xi = 0{,}017$; $Fy = 0{,}0173$, $\eta = 0{,}0014$

2) $Fx = 1{,}159$, $\xi = 0{,}040$; $Fy = 0{,}0229$, $\eta = 0{,}0051$

3) $Fx = 1{,}452$, $\xi = 0{,}036$; $Fy = 0{,}0339$, $\eta = 0{,}0074$.

Die Grössen ξ und η sind klein genug im Vergleich mit Fx und Fy,

um das durch Gl. (2) ausgedrückte Abhängigkeitsgesetz zwischen $\frac{V}{F}$ und H als hinlänglich bestätigt durch diese Versuche betrachten zu dürfen, insoweit es wenigstens bei ihrer mässigen Zahl und bei der von einem zum anderen Versuch derselben Reihe wechselnden Beschaffenheit des Sandes erwartet werden konnte. Die drei Werthsysteme von Fx und Fy sind freilich zu sehr verschieden, als dass darin eine genügende Bestätigung auch des Gesetzes erblickt werden könnte, nach welchem $\frac{V}{F}$ gemäss Gl. (2) von der Schichthöhe h abhängen sollte. Indessen wird auch diesem durch die Versuche wenigstens nicht widersprochen, weil die 3 Werthe des Hauptgliedes Fx von Gl. (3) keine Beziehung zu h erkennen lassen; ihre Verschiedenheiten können deshalb hauptsächlich der verschiedenen Beschaffenheit des Sandes bei den 3 Versuchsreihen zugeschrieben werden, womit dann auch die scheinbare Abhängigkeit des Coefficienten Fy von der Schichtdicke h illusorisch wird. Erlaubt man sich, im Durchschnitt für alle 20 Versuche

$$Fx = 0{,}5 \,.\, 1{,}900 + 0{,}3 \,.\, 1{,}159 + 0{,}2 \,.\, 1{,}452 = 1{,}588$$

$$Fy = 0{,}5 \,.\, 0{,}0173 + 0{,}3 \,.\, 0{,}0229 + 0{,}2 \,.\, 0{,}0339 = 0{,}0223$$

zu setzen, so ist wegen

$$F = \frac{\pi}{4} \overline{0{,}35}^2 = 0{,}0962 \text{ Quadratm.}$$

$$x = 16{,}5; \quad y = 0{,}232,$$

falls $h' = 0$, V in Litern pro Min. ausgedrückt, und übrigens das Meter als Längeneinheit vorausgesetzt wird; doch haben diese Zahlen nur geringen Werth, weil sie speciell für die mittlere Beschaffenheit des Sandes bei jenen Versuchen gelten, diese aber zu wenig bestimmt definirt ist, als dass eine Uebertragung auf andere Fälle dadurch ermöglicht würde. Das Hauptresultat der obigen Rechnung ist vielmehr nur darin zu suchen, dass Gl. (2) ihrer allgemeinen Form nach durch die Darcy'schen Versuche in befriedigender Weise (wenigstens in Betreff der Beziehung zwischen V und H) bestätigt wird, während die Coefficienten x und y (eventuell auch $\ldots$) für verschiedene Fälle durch Versuche zu bestimmen bleiben. Die Beziehung

$$V = x\, F \frac{H}{h},$$

die Darcy selbst aus seinen Versuchen folgerte, kann nur als eine erste Näherung gelten.

Dass V unter übrigens gleichen Umständen nahe proportional H ist, wird auch durch Versuche von Weiss* bestätigt; der vermeintliche Widerspruch mit der Theorie, den er darin finden zu müssen glaubt, dass nicht vielmehr V proportional $\sqrt{H}$ sich ergiebt, fällt bei der obigen Ableitung von Gl. (2) mit Rücksicht auf die in §. 90 begründete Bedeutung des zweiten Gliedes im Ausdrucke für die Leitungswiderstandshöhe hinweg. Was die Beziehung zwischen V und h betrifft, so schliesst Weiss aus den beiden ersten der Darcy'schen Versuchsreihen, dass die Durchflussmenge einer höheren, als der ersten Potenz der Schichthöhe umgekehrt proportional gesetzt werden müsse, wie freilich auch aus den oben unter 1) und 2) gefundenen Werthen von Fx geschlossen werden könnte, wenn die Gleichartigkeit des Filtermaterials und der Dichte seiner Gruppirung bei diesen zwei Versuchsreihen genügend constatirt wäre. In der That ist aber letzteres nicht in solchem Grade der Fall, die Annahme einfacher Proportionalität zwischen der mittleren Weglänge eines Wassertheilchens in der Sandschicht und deren Höhe h aber zu plausibel, als dass jene Folgerung aus Versuchen mit nur zwei verschiedenen Werthen von h überzeugend wäre. —

Bezüglich auf den technischen Zweck der Filtration, die Reinigung des Wassers von Schmutztheilchen, ist es bemerkenswerth, dass letztere erfahrungsmässig nur wenige Centimeter tief in die Sandschicht eindringen, wie lange auch das Filter benutzt werden mag, dessen Durchflussmenge V dabei freilich durch Verengung der haarröhrchenförmigen Canäle immer kleiner wird. Dieser Umstand ist übrigens wesentlich an die Bedingung gebunden, dass die Geschwindigkeit u des Wassers in der Sandschicht sehr klein ist, und weil er insofern erwünscht ist, als er die Erhaltung resp. Wiederherstellung der Wirksamkeit eines Filters durch die periodische Erneuerung einer nur wenige Centimeter dicken oberflächlichen Sandschicht ermöglicht, so muss durch entsprechende Wahl von H und h dafür gesorgt werden, dass u, somit die Durchflussmenge V pro Quadratmeter der Filterfläche F eine gewisse erfahrungsmässig angemessene Grenze nicht überschreitet, während andererseits mit Rücksicht auf die mit F wachsenden Anlagekosten auch das Verhältniss $V : F$ nicht viel kleiner als nöthig gewählt werden soll. Dupuit empfiehlt (für künstliche Filter) $V = 3$ bis

* Dr. Th. Weiss, Studien über die Filtration des Wassers im Grossen und Theorie derselben. Der Civilingenieur, 1865, S. 17 und 175. In demselben Aufsatze wird u. A. auch die Darcy'sche Beschreibung seiner Versuche wörtlich mitgetheilt.

5 Cubikmeter pro Quadratmeter Filterfläche in 24 Stunden; hiernach wäre in Metern pro Sec. höchstens etwa

$$u = 3\frac{V}{F} = \frac{3.5}{24.60.60} = \frac{1}{5760}$$

zu setzen, und umsomehr das Product ud für Meter und Secunde als Einheiten in der That ein äusserst kleiner Bruch, wie bei der obigen Ableitung von Gl. (2) vorausgesetzt wurde.

Derselbe Umstand, dass bei kleiner Filtrationsgeschwindigkeit die Schmutztheilchen des Wassers nur in einer dünnen Oberflächenschicht der Filtermasse sich ablagern, erklärt auch die ohne Nachhülfe unbegrenzt andauernde Wirksamkeit der natürlichen Filtration des Flusswassers durch eine sein Bett örtlich begrenzende Sandschicht (Sandbank) unter übrigens günstigen localen Umständen, sofern nämlich vor allem der Fluss in Folge seiner mit dem Wasserstande wechselnden Strömungsgeschwindigkeit periodisch die schmutzig gewordene äusserste Sandschicht wegschwemmt und später durch neue Ablagerung reinen Sandes wieder ersetzt.*

2. Permanente Bewegung der Luft.

§. 99. Fundamentalgleichungen.

Die Luft gilt hier als Repräsentant irgend eines Gases oder Gasgemenges. Dafür sind die beiden Gleichungen, welche nach §. 75 in Verbindung mit Gl. (1) und irgend zwei der Gleichungen (2), (3), (4) daselbst die 5 Grössen p, v, T, U, u und somit den inneren und äusseren Zustand unter gegebenen Umständen als Functionen von s, d. h. für jeden Querschnitt F bestimmen, nämlich die Zustandsgleichung und die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens nach §. 18, Gl. (4) und §. 19, Gl. (5)

$$pv = RT \quad \text{und} \quad dU = \frac{1}{n-1}\,d(pv),$$

worin $n = \frac{c_1}{c}$ das Verhältniss der specifischen Wärmen für constante Pressung und für constantes Volumen bedeutet. Wenn in den allgemeinen

* Eine nähere Untersuchung der Bedingungen für eine vortheilhafte Ausführung des natürlichen Filtrationssystems enthält der vorhin angeführte Aufsatz von Dr. Th. Weiss.

Gleichungen (2), (3), (4), §. 75 für dU dieser Ausdruck und ferner zur Abkürzung

$$\frac{u^2}{2g} = H, \quad \text{folglich} \quad \frac{udu}{g} = dH$$

gesetzt wird, ergiebt sich als Gleichung der lebendigen Kraft:

$$dH + vdp = dM - dB \qquad (1),$$

als Wärmegleichung:

$$\frac{1}{n-1} d(pv) + pdv = WdQ + dB \qquad (2)$$

und als Gleichung des Arbeitsvermögens:

$$dH + \frac{n}{n-1} d(pv) = dM + WdQ \qquad (3).$$

Von diesen 3 Gleichungen ist jede die Folge der beiden anderen; irgend zwei derselben nebst der Continuitätsgleichung (§. 75, Gl. 1)

$$Fu = Gv \qquad (4)$$

und der Zustandsgleichung dienen zur Bestimmung von p, v, T, u unter gegebenen Umständen, überhaupt zur Lösung der betreffenden Aufgaben, sofern dabei von der Verschiedenheit des inneren und äusseren Zustandes in verschiedenen Punkten eines Querschnitts abstrahirt, dieser Zustand vielmehr nur als mittlerer in Betracht gezogen wird. Der dadurch begangene Fehler ist (§. 73) um so kleiner, je weniger die von den Lufttheilchen durchlaufenen Bahnen und die (auf den Bahnen senkrechten) Querschnitte gekrümmt, je kleiner diese Querschnitte sind, und je weniger das specifische Volumen veränderlich ist; aus letzterem Grunde kann die Voraussetzung eines gleichförmigen mittleren Zustandes in den einzelnen Querschnitten hier mit grösseren Fehlern verbunden sein, als bei der Bewegung des Wassers.

Für die Arbeit dM der Massenkräfte und die mitgetheilte Wärme dQ pro 1 Kgr. Luft auf dem Wege ds gelten die Ausdrücke (5) und (6) in §. 75, wenn die Massenkräfte ausser von der eigenen Bewegung des Gefässes oder der Röhre nur von der Schwere herrühren und die Wärmemittheilung (worunter die Wärmeerzeugung durch die Bewegungswiderstände nicht begriffen ist) nur durch die Wand des Gefässes oder der Röhre vermittelt wird (nicht etwa zugleich durch einen chemischen Process im Innern des Gasgemenges, wie z. B. im Cylinder einer Gaskraftmaschine). Die Widerstandsarbeit dB bleibt näherer Bestimmung in einzelnen Fällen vorbehalten. Uebrigens haben die in den obigen Gleichungen vorkommenden Buchstaben die in §. 74 und §. 75 erklärten Bedeutungen.

α. Ausfluss der Luft aus Gefässen.

§. 100. Ausflussmenge und Zustand der ausfliessenden Luft.

Durch eine Oeffnung $= A$ in der Wand eines Gefässes fliesse die in demselben befindliche Luft auf unveränderliche Weise in einen äusseren Raum von geringerer Pressung. Zu grösserer Allgemeinheit werde vorläufig angenommen, dass die Luft schon im Innern des Gefässes in strömender Bewegung begriffen ist (z. B. in einer Gebläsewindleitung vor dem Ausflusse aus den Düsen), und es seien

$$p_0 \quad v_0 \quad T_0 \quad u_0 \quad H_0$$

die unveränderlich gegebenen Mittelwerthe der Pressung, des specifischen Volumens, der absoluten Temperatur, der Geschwindigkeit und Geschwindigkeitshöhe im Querschnitte F_0 des Luftstroms im Gefässe. Die entsprechenden Grössen seien:

$$p \quad v \quad T \quad u \quad H$$

für den Ausflussquerschnitt $= \alpha A$, der hier ebenso wie beim Ausfluss des Wassers von der Mündung oder Ausflussöffnung $= A$ wesentlich verschieden sein kann (wenn es auch vorläufig dahin gestellt bleibt, ob hier wie dort stets $\alpha \overline{\overline{<}} 1$ ist), indem darunter der Querschnitt des Luftstroms ausserhalb der Mündung verstanden wird, in welchem zuerst die Bahnen der Lufttheilchen hinlänglich gerade geworden sind, um darin überhaupt einen gleichförmigen Zustand, insbesondere eine gleichförmige Pressung $p =$ derjenigen des äusseren Raumes ohne wesentlichen Fehler voraussetzen zu dürfen; ob diese Bahnen daselbst auch parallel sind oder nicht, der sie rechtwinkelig schneidende Ausflussquerschnitt folglich eben ist oder nicht, hat auf das Aenderungsgesetz der Pressung in demselben nur untergeordneten Einfluss, wie schon aus der für Wasser angestellten Untersuchung in §. 95 — Gl. (4) und (6) daselbst — geschlossen werden kann. In den Querschnitten des Luftstroms, welche zwischen der Ausflussöffnung und dem Ausflussquerschnitte liegen, ist nur am Rande die Pressung auch $= p$ (sofern überhaupt von einer bestimmten Grenze zwischen dem Luftstrom und dem äusseren Medium die Rede sein kann, an der dann Gleichheit der beiderseitigen Pressungen herrschen muss), während nach innen hin durch die Krümmungen der mit grossen Geschwindigkeiten durchlaufenen Bahnen wesentlich andere Pressungen bedingt werden können.

Das Ausflussgefäss sei ohne eigene Bewegung, so dass als äussere

Massenkraft nur die Schwerkraft in Betracht kommt; h sei die Höhe des Schwerpunktes von F_0 über dem Schwerpunkte des Ausflussquerschnitts. Die Gefässwand sei hinlänglich wenig durchlässig für die Wärme, und die äussere Temperatur hinlänglich wenig von derjenigen des Luftstroms verschieden, um mit Rücksicht auf die Zeit, in der die Bewegung vom Querschnitte F_0 bis zum Ausflussquerschnitte αA erfolgt, von irgend einer äusseren Wärmemittheilung oder Entziehung unterdessen abstrahiren zu dürfen. Ist dann ausser h und den obigen Grössen, die den Zustand im Querschnitte F_0 charakterisiren, auch p = der äusseren Pressung an der Mündung gegeben, so seien zu bestimmen: das Gewicht der pro Sec. ausfliessenden Luft = G Kgr. und ihr Zustand im Ausflussquerschnitte; letzterer ist als äusserer Zustand durch die Ausflussgeschwindigkeit $u = \sqrt{2gH}$, als innerer oder Wärmezustand durch eine der Grössen v, T in Verbindung mit p bestimmt.

Unter diesen Umständen ist in den Gleichungen (1)—(3) des vorigen §. zu setzen:

$$dQ = 0 \quad \text{und} \quad dM = dh;$$

Gl. (3) ist dann ohne Weiteres integrabel und liefert mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung ($pv = RT$) durch Integration von F_0 bis αA:

$$H - H_0 + \frac{n}{n-1} R(T - T_0) = h$$

$$T = T_0 - \frac{n-1}{n} \frac{H - H_0 - h}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Hierdurch ist T und dann durch die Zustandsgleichung auch v bestimmt, sobald H bekannt ist. Zur Bestimmung von H würde die Gleichung der lebendigen Kraft

$$dH + vdp = dh - dB$$

dienen, wenn die sich gegenseitig bedingenden Gesetze der successiven Einwirkung des Bewegungswiderstandes und der Beziehung zwischen p und v für die ganze Bewegung von F_0 bis αA bekannt wären. Sofern aber der Bewegungswiderstand hier nur erfahrungsmässig im Ganzen beurtheilt, nicht rationell in seine Elementarbestandtheile für die einzelnen Elemente der Bewegung von F_0 bis αA zerlegt werden kann, liegt es nahe, zuvörderst H ohne Rücksicht auf den Widerstand zu berechnen und den gefundenen Werth mit einem Erfahrungscoefficienten zu multipliciren. Ohne Wärmemittheilung von aussen und ohne Wärmeentwickelung durch Widerstände in der Luftmasse selbst befolgt ihre Zustandsänderung das Gesetz:

$$pv^n = Const. \text{ nach §. 20 unter 3)}$$

und ergiebt sich dann mit Rücksicht auf die daselbst angeführten Formeln durch Integration der obigen Differentialgleichung mit $dB = 0$:

$$H - H_0 = h - \int_{p_0}^{p} v\,dp = h + p_0 v_0 - pv + \int_{v_0}^{v} p\,dv =$$

$$= h + p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] + \frac{p_0 v_0}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]$$

und schliesslich bei Multiplication von H mit dem Erfahrungscoefficienten $\frac{1}{\varphi^2}$:

$$\frac{1}{\varphi^2} H = H_0 + h + \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] \ldots . (2).$$

Der Coefficient φ hat die Bedeutung des in §. 76 erklärten Geschwindigkeitscoefficienten, der aber hier nicht in der einfachen Beziehung zum Widerstandscoefficienten ζ steht, wie es bei Wasser der Fall ist; es ist vielmehr, wie gleichfalls a. a. Orte bemerkt wurde,

$$\zeta > \frac{1}{\varphi^2} - 1.$$

Nachdem durch Gl. (1) und (2) der Zustand ermittelt ist, in welchem die Luft den Ausflussquerschnitt durchströmt, findet man die Ausflussmenge aus Gl. (4) des vorigen §. mit $F = \alpha\mathcal{A}$:

$$G = \frac{\alpha A u}{v} = \alpha A u \frac{p}{RT} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Wenn die Mündung im Verhältniss zu den Dimensionen des Ausflussgefässes klein genug ist, um $H_0 = 0$ setzen zu dürfen, was unter ähnlichen Umständen mit entsprechender Annäherung geschehen kann, wie bei Wasser die Vernachlässigung der Geschwindigkeit u_0 an der freien Oberfläche im Gefässe (§. 79), und wenn auch $h = 0$ resp. sehr klein ist, oder wenn die Geschwindigkeit u_0 an der Beobachtungstelle von p_0 und die Höhe h dieser Stelle über der Mündung dadurch näherungsweise berücksichtigt werden, dass unter p_0 die daselbst beobachtete Pressung vermehrt um $\frac{H_0 + h}{v_0}$ verstanden wird, so folgt aus den Gleichungen (1)—(3):

$$u = \varphi \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]} \ldots\ldots (4).$$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{n-1}{n}\frac{H}{p_0 v_0} = 1 - \varphi^2\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] \quad \ldots (5),$$

$$\frac{G}{A} = \alpha\varphi\frac{p}{p_0}\frac{\sqrt{2g\frac{n}{n-1}\frac{p_0}{v_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}}{1 - \varphi^2\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]} \quad \ldots (6).*$$

Der Ausdruck für die Ausflussgeschwindigkeit u ist aus der Gleichung der lebendigen Kraft erhalten worden unabhängig von den besonderen Formen der Zustandsgleichung und der Gleichung des inneren Arbeitsvermögens für Gase, nur auf Grund des Gesetzes

$$pv^n = Const. \quad \text{oder} \quad p^{\frac{1}{n}}v = Const.$$

für eine Zustandsänderung ohne Wärmemittheilung von aussen und ohne Verwandlung von Widerstandsarbeit in Wärme. Mit $n = \infty$ gilt dieses Gesetz, indem es $v = Const.$ liefert, auch für Wasser, und folgt dann die Ausflussgeschwindigkeit u desselben aus Gl. (2)

$$u = \varphi\sqrt{u_0^2 + 2g[h + (p_0 - p)v_0]} =$$

$$= \varphi\sqrt{u_0^2 + 2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)},$$

wie anderweitig bekannt ist, während die Ausflussmenge aus der Continuitätsgleichung gefunden wird:

$$Gv = V = \alpha A u.$$

Die Berücksichtigung von u_0 und h kann hier ohne Fehler dadurch geschehen, dass $\frac{H_0 + h}{v_0}$ in p_0 eingerechnet wird, woraus zu schliessen, dass damit bei der Anwendung auf Gase ein um so kleinerer Fehler verbunden sein

*) Obige Formeln sind vom Verfasser im Jahrgange 1863 der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure entwickelt worden, nachdem Weisbach schon vorher (1855) dieselbe Gleichung für u aufgestellt, bei der Beurtheilung des auch die Ausflussmenge bedingenden Zustandes der ausfliessenden Luft jedoch den Einfluss der Wärmeentwickelung durch die Widerstände übersehen hatte. Indessen war es irrthümlich, wenn auch der Verfasser a. a. O. $\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1$ setzte.

wird, je weniger v veränderlich, also p_0 von p verschieden ist. Die obigen Gleichungen für T und G, sofern sie auf den besonderen Formen der Zustandsgleichung und des inneren Arbeitsvermögens für Gase beruhen, sind natürlich nicht auf Wasser anwendbar.

Sind p_0 und p verhältnissmässig wenig verschieden, ist also, wenn

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \frac{p_0 - p}{p_0} = 1 - \delta$$

gesetzt wird, δ ein kleiner Bruch, so ist näherungsweise

$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{n-1}{n}\,\delta = \frac{n-1}{n}\,\frac{p_0 - p}{p_0}$$

und gehen damit die Gleichungen (4)—(6) bei consequenter Vernachlässigung von δ^2 gegen 1 über in:

$$u = \varphi \sqrt{2g\,(p_0 - p)\,v_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \varphi^2\,\frac{n-1}{n}\,\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{G}{A} = \alpha\varphi \left[1 - \left(1 - \varphi^2\,\frac{n-1}{n}\right)\delta\right] \sqrt{2g\,\frac{p_0 - p}{v_0}} \quad \ldots\ldots$$

Die Ausflussgeschwindigkeit kann also in diesem Falle ebenso, die Ausflussmenge nur mit geringerer Annäherung ebenso berechnet werden wie für Wasser.

Sofern der Wärmezustand eines Gases nicht sowohl durch Pressung und specifisches Volumen, als vielmehr durch Pressung und Temperatur (messbar durch Manometer und Thermometer) charakterisirt zu werden pflegt, kann für den praktischen Gebrauch in allen obigen Formeln v_0 durch T_0 ausgedrückt, nämlich

$$v_0 = \frac{RT_0}{p_0}$$

gesetzt werden. Dabei ist insbesondere für **atmosphärische Luft** zu setzen (§. 17):

$$R = 29{,}3; \quad n = 1{,}41$$

$$\frac{1}{n} = 0{,}709; \quad \frac{n-1}{n} = 0{,}291; \quad \frac{n}{n-1} = 3{,}44.$$

Bei der Anwendung auf Gebläse pflegt es sich um solche Pressungsdifferenzen zu handeln, für welche höchstens etwa $\delta = 0{,}2$ ist. Indem …

$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} = 1 - (0,8)^{0,291} = 0,0628$$

$$\frac{n-1}{n}\,\delta = 0,291\,.\,0,2 = 0,0582$$

ist, können die Formeln (7)—(9) immerhin schon als zu wenig zutreffend erscheinen; eine genügende Annäherung wird dann aber erhalten, wenn die Entwickelung bis zu dem Gliede mit δ^2 ausgedehnt, also

$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} = 1 - (1-\delta)^{\frac{n-1}{n}} = \frac{n-1}{n}\,\delta\left(1 + \frac{1}{2n}\,\delta\right),$$

insbesondere für atmosphärische Luft $= 0,291\,\delta\,(1 + 0,355\,\delta)$ gesetzt wird ($= 0,0623$ für $\delta = 0,2$).

Für den praktischen Gebrauch kann übrigens in solchen Fällen, wo es nur auf die Ausflussmenge ankommt, die Berechnung derselben mit Hülfe eines einzigen erfahrungsmässig zu bestimmenden sogenannten Ausflusscoefficienten (statt der beiden Coefficienten α und φ) vorgezogen werden. Wird derselbe mit μ bezeichnet und darunter das Verhältniss der effectiven zu derjenigen Ausflussmenge G verstanden, die der Voraussetzung $\alpha = 1$, $\varphi = 1$ (d. h. der Voraussetzung einer widerstandslosen Bewegung und der Gleichheit von Ausflussquerschnitt und Ausflussöffnung) unter übrigens gleichen Umständen entspricht, so folgt aus Gl. (6)

$$\frac{G}{A} = \mu \sqrt{2g\,\frac{n}{n-1}\,\frac{p_0}{v_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]} \quad \ldots\ldots (10).$$

Dieser Coefficient μ ist nicht $= \alpha\varphi$, wie bei Wasser, sondern

$$\mu < \alpha\varphi.$$

Wenn dann wieder

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \delta; \quad \delta = \frac{p_0 - p}{p_0}$$

gesetzt wird, und bei Voraussetzung mässiger Grösse von δ (etwa $\overline{\overline{<}}\ 0,2$) die in Gl. (10) vorkommenden Potenzen von $\frac{p}{p_0}$ bis zu den Gliedern mit δ^2 entwickelt werden, so findet man mit $v_0 = \frac{RT_0}{p_0}$

$$\frac{G}{A} = \mu p_0 \sqrt{\frac{2g}{RT_0}\,\delta\left(1 - \frac{3}{2n}\,\delta\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (11),$$

insbesondere für **atmosphärische Luft** ($R = 29{,}3$; $n = 1{,}41$; $g = 9{,}81$)

$$\frac{G}{A} = 0{,}818 \mu p_0 \sqrt{\frac{\delta}{T_0}} (1 - 1{,}06\delta) \quad \ldots\ldots\ldots (12),$$

eine Formel, welche z. B. zur Beurtheilung der aus den Düsen eines Gebläses unter gegebenen Umständen ausströmenden Windmenge um so mehr ausreichend ist, als dabei der Coefficient μ, die Gesammtgrösse A der (durch Schlackenansätze möglicher Weise verengten) Düsenmündungen und die äussere Pressung p (mit Rücksicht auf den Widerstand der Schmelzmassen) gewöhnlich mit grösseren Fehlern behaftet sind, als die Formel an sich. —

Wenn nun aber auch für die technischen Anwendungen vorzugsweise nur der Fall einer mässigen Verschiedenheit der inneren und äusseren Pressung Wichtigkeit hat, ist es doch von Interesse, die **Gesetze der Luftausströmung innerhalb des ganzen Aenderungsgebietes des Verhältnisses** $\frac{p}{p_0}$ **von 1 bis 0 zu prüfen.** Unter der Voraussetzung, dass p_0, v_0, T_0 gegeben sind, also p von p_0 bis 0 abnimmt, und dass der φ denselben Werth beibehält, ergiebt sich zunächst aus Gl. (4), dass die Ausflussgeschwindigkeit beständig wächst

$$\text{von 0 bis } max.\ u = \varphi \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_0 v_0} = \varphi \sqrt{2g \frac{n}{n-1} RT_0},$$

während die Temperatur der Luft im Ausflussquerschnitte nach Gl. (5) beständig abnimmt

$$\text{von } T_0 \text{ bis } min.\ T = (1 - \varphi^2) T_0,$$

dagegen das specifische Volumen v gemäss der Gleichung

$$\frac{v}{v_0} = \frac{T}{p} \frac{p_0}{T_0} = (1 - \varphi^2) \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-1} + \varphi^2 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

beständig wächst von v_0 bis ∞. Wenn man also annehmen dürfte, dass ausser φ auch α unverändert bleibt, so würde

$$\frac{G}{A} = \alpha \frac{u}{v} \text{ von } \alpha \frac{0}{v_0} \text{ bis } \alpha \frac{max.\ u}{\infty}, \text{ d. h. von 0 bis 0}$$

sich ändern und für einen gewissen mittleren Werth von $\frac{p}{p_0}$ ein Maximum werden, nämlich, wie aus Gl. (6) leicht gefunden wird, für

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p}{p_0} = x^{\frac{n}{n-1}}, \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{unter } x \text{ die positive Wurzel der Gleichung} \\ x^2 - \left(\frac{3n+1}{n+1} - \frac{3n-1}{n+1}\frac{1}{\varphi^2}\right)x = -\frac{2n}{n+1}\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) \end{array}\right\} \quad (13)$$

verstanden; mit $\varphi = 1$, also auch gemäss Gl. (10) würde das Maximum von G dem Verhältnisse

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

entsprechen, und sich ergeben:

$$\frac{max.\ G}{A} = \mu \sqrt{2g\frac{n}{n+1}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}}\frac{p_0}{v_0}} \ldots\ldots (15),$$

insbesondere für atmosphärische Luft mit $\frac{1}{v_0} = \frac{p_0}{RT_0}$, $R = 29{,}3$, $n = 1{,}41$, $g = 9{,}81$:

$$\frac{max.\ G}{A} = 0{,}3972\mu\frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \quad \text{bei} \quad \frac{p}{p_0} = 0{,}5266 \ldots\ldots (16).$$

Diese Folgerungen aus den oben entwickelten Formeln haben, was u, T und v betrifft, nichts Widersinniges an sich; dagegen erscheint es von vornherein unmöglich, dass unter übrigens gleich bleibenden Umständen bei abnehmender äusserer Pressung p von einer gewissen Grenze an die Ausflussmenge abnehmen sollte der Art, dass nach einem luftleeren Raume hin gar kein Ausströmen mehr stattfände. Daraus ist zu schliessen, dass die hier zu Grunde gelegte Voraussetzung eines constanten Werthes von α unzulässig ist, dass vielmehr dieser Coefficient wenigstens von einer gewissen Grenze an bei abnehmender äusserer Pressung ins Unendliche zunimmt. In der That fanden de Saint-Venant und Wantzel,* dass von einem gewissen Werthe der abnehmenden äusseren Pressung an gerechnet die Ausflussmenge der Luft fast constant bleibt, und wenn auch gegen ihre Versuchsmethode gegründete Bedenken erhoben wurden, so dass die Resultate derselben im Uebrigen wenig Vertrauen verdienen, so ist

* Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air, déterminé par des différences de pressions considérables. Journal de l'École polytechnique, 1839. In diesem Aufsatze findet sich auch schon die obige Gleichung (10) zum ersten Mal aufgestellt.

doch die obige Thatsache an und für sich auch durch die (später näher zu besprechenden) Versuche Napier's über den Ausfluss des Wasserdampfes und kürzlich (1871) durch Versuche Zeuner's über den Ausfluss der Luft bei starkem Ueberdruck bestätigt worden: die Ausflussmenge wurde immer fast constant gefunden, sobald p bis zu einem solchen Werth abgenommen hatte, bei welchem unter der Voraussetzung eines constanten Ausflussquerschnittes der Theorie zufolge das Maximum von G hätte stattfinden sollen. Für solche Mündungen, aus denen die Luft ohne äussere Contraction ausfliesst (cylindrische oder wenigstens nach aussen cylindrisch verlaufende Ansatzröhren), ist nach Zeuner dieser Satz als unbedingt richtig zu betrachten, in anderen Fällen, namentlich bei Mündungen in der dünnen Wand, allerdings nur näherungsweise in Folge einer Abhängigkeit der Contraction von dem Verhältnisse $\frac{p}{p_0}$.

Diese Contraction des Strahls ist hier offenbar von anderer Art als bei Wasser; sie findet, wenn wenigstens $\frac{p}{p_0}$ unter einer gewissen Grenze liegt, nur vorübergehend statt, indem der Strahl nach seiner anfänglichen Zusammenziehung alsbald sich wieder ausdehnt um so schneller, je kleiner $\frac{p}{p_0}$ ist, so dass im kleinsten Querschnitte die Bahnen der Lufttheilchen zwar vorübergehend parallel werden, dabei aber doch sehr stark gekrümmt sein können. Nur dadurch scheint es erklärlich, dass die mittlere Pressung in diesem kleinsten Querschnitte wesentlich $> p$ sein kann, wie doch angenommen werden muss, damit der stets nur endlichen Geschwindigkeit selbst bei unendlich kleiner Grösse von p gleichwohl eine Durchflussmenge G von endlicher Grösse entsprechen könne. —

Schliesslich mag darauf hingewiesen werden, wie der Satz, dass die Pressung im kleinsten Querschnitte nur so lange = der äusseren Pressung p sein, und somit dieser kleinste Querschnitt $= \alpha A$ (unter α einen wirklichen Contractionscoefficienten < 1 verstanden) nur so lange mit dem in obiger Weise definirten Ausflussquerschnitte identisch sein könne, als das Verhältniss $= \frac{p}{p_0}$ der äusseren zur inneren Pressung nicht unter eine gewisse Grenze hinab sinkt, auch anderweitig, nämlich durch eine ähnliche Betrachtung begründet werden kann, wie in §. 80 der kleinstmögliche Contractionscoefficient α des ausfliessenden Wassers $= {}^1/_2$ gefunden war. Sofern nämlich allgemein die Reaction R der Flüssigkeit (hier der Luft wie dort des Wassers) entgegengesetzt dem Sinne der Ausflussgeschwindigkeit

keit u (identisch im vorliegenden Falle mit der Geschwindigkeit im kleinsten Querschnitte) = der Bewegungsgrösse der pro Sec. ausfliessenden Luft, also

$$R = \frac{G}{g} u$$

und diese Reaction zu betrachten ist als der Ueberschuss eines entgegengesetzt dem Sinne von u genommenen durch den Ausfluss der Luft bedingten Normaldruckes P derselben auf das Gefäss über eine gewisse Reibung $= R'$, womit im Sinne von u die Luft auf die Gefässwand wirkt, ist

$$P = R + R'$$

= derjenigen Reaction R, welche ohne Reibungswiderstände unter sonst gleichen Umständen stattfände, also

$$P = \frac{G}{g} u,$$

falls bei der Berechnung von u und G der Geschwindigkeitscoefficient $\varphi = 1$ gesetzt wird, d. h. mit

$$u = \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

$$\text{und} \quad G = \frac{\alpha A u}{v} = \frac{\alpha A u}{v_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$P = 2\alpha A \frac{u^2}{2g v_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} = 2\alpha A \frac{n}{n-1} p_0 \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} - \frac{p}{p_0}\right].$$

Indem aber andererseits auch dieser Druck wenigstens gleich ist dem Ueberschuss des Druckes, der im Zustande der Ruhe (bei geschlossener Mündung) auf die ebene Fläche A ausgeübt wird, über denjenigen, der im Zustande der Bewegung im gleichen Sinne im kleinsten Querschnitte αA nebst der seinen Umfang mit dem Umfange der Mündung verbindenden krummen Oberfläche des Luftstroms stattfindet, nämlich um so mehr grösser ist, je mehr die Luft schon längs dem die Mündung umgebenden Theil der Gefässwand der Mündung mit einer wesentlichen Geschwindigkeit zufliesst und dadurch auch hier der hydraulische Druck auf die Gefässwand im Sinne von u merklich kleiner ist als der hydrostatische, entsprechend einer ebenso grossen Vermehrung $= P'$ des Normaldruckes P entgegengesetzt dem Sinne von u, ist

$$P = P' + A(p_0 - p) > A(p_0 - p).$$

Aus beiden [illegible]

$$\frac{x^{[illegible]} - x}{1 - x} > [illegible]$$

Im Falle $n = \infty$ [illegible]

$$\frac{x^{[illegible]} - x}{1 - x} = [illegible]$$

und [illegible] der Bedingung [illegible]. Für [illegible] endlichen Werth > 1 [illegible] ist mit $x = 1 - \xi$ [illegible]

$$\frac{x^{\frac{1}{n}} - x}{1 - x} = [illegible]$$

$$= 1 - \frac{1}{n} [illegible] - \dots > \frac{n-1}{n},$$

folglich der Grenzwerth von α grösser als $\frac{1}{2}$, und es ist [illegible] für irgend einen gegebenen Werth von $\alpha > \frac{1}{2}$ durch die Bedingung [illegible] ein Grenzwerth von x bestimmt, unter welchen das Verhältniss $\frac{p}{p_0}$ [illegible] falls sinken kann, wenn p zugleich die Pressung im kleinsten Querschnitt, also dieser mit dem Ausflussquerschnitte identisch sein soll. [illegible] mit $n = 1,41$ ergiebt sich:

$$\frac{x^{0,7092} - x}{1 - x} > \frac{0.1454}{\alpha} \quad [illegible]$$

z. B. für $\alpha =$ 1	0,9	0,8	0,7	0,6
$x >$ 0,19	0,24	0,31	0,42	0,61

Diese Grenzwerthe von $x = \frac{p}{p_0}$, welche sich so erheblich abhängig [illegible] α zeigen, würden mit den durch Gl. (13) bestimmten Werthen von $\frac{p}{p_0}$, [illegible] von dem Geschwindigkeitscoefficienten φ abhängen, nur dann vergleichbar sein, wenn die vorhin mit P' bezeichnete Grösse hinsichtlich ihrer Beziehung zu α und φ rationell in Anschlag gebracht werden könnte.

§. 101. Andere Gestalt der Ausflussformeln, nach Zeuner.

Durch die im vorigen §. entwickelten Formeln, deren Buchstabenbezeichnungen auch im Folgenden unverändert beibehalten werden, ist der Einfluss des Bewegungswiderstandes auf die Weise berücksichtigt worden, dass dieser Widerstand gewissermassen am Ende der Bewegung bis zum Ausflussquerschnitte concentrirt einwirkend gedacht, demgemäss die Ausflussgeschwindigkeit u zunächst ohne Rücksicht auf denselben berechnet und erst nachträglich mit einem Correctionsfactor, dem Geschwindigkeitscoefficienten φ, multiplicirt wurde; durch die Fundamentalgleichungen war dann ohne Weiteres auch die Temperatur T, also wegen der gegebenen Pressung p überhaupt der Wärmezustand der Luft im Ausflussquerschnitte mit Rücksicht auf den Bewegungswiderstand bestimmt, während die Ausflussmenge G ausserdem von einem zweiten Erfahrungscoefficienten α bezüglich auf die Grösse des Ausflussquerschnitts abhängig gemacht werden musste.

Wenn nun auch das wahre Gesetz, nach welchem der Bewegungswiderstand die Zustandsänderung der ausströmenden Luft successive beeinflusst, nicht bekannt ist, und ohne näheres Eingehen auf die Natur des fraglichen Widerstandes und die Bewegungsart der einzelnen Lufttheilchen auch nicht würde erkannt werden können, so ist doch möglicher Weise ein immerhin besserer Anschluss an die thatsächlichen Verhältnisse dadurch zu erreichen, dass statt jener Aufeinanderfolge einer widerstandslosen Bewegung und eines dann plötzlich einwirkenden Widerstandes irgend eine stetige Zustandsänderung vorausgesetzt wird, die von Anfang an unter dem Einflusse des Widerstandes, also der dadurch bedingten Wärmeentwickelung stattfindet, vorbehaltlich erfahrungsmässiger Bestimmung eines in der vorausgesetzten Gleichung

$$f(p,v) = 0$$

der Zustandscurve (§. 13) vorkommenden Coefficienten. Wie schon in §. 20 bemerkt wurde, empfiehlt sich in solchen Fällen in Ermangelung sonstiger specieller Anhaltspunkte im Allgemeinen die Annahme:

$$p v^m = Const. \qquad (1),$$

unter m einen in jedem einzelnen Falle constanten Exponenten verstanden, der im vorliegenden Falle um so mehr $< n$ sein wird, je grösser der

Aus beiden Beziehungen hinsichtlich P folgt:

$$\frac{x^{\frac{1}{n}} - x}{1 - x} > \frac{1}{2\alpha}\,\frac{n-1}{n} \quad \text{mit} \quad x = \frac{p}{p_0} \quad \ldots\ldots\ldots (17).$$

Im Falle $n = \infty$, entsprechend einem constanten specif. Volumen, ist

$$\frac{x^{\frac{1}{n}} - x}{1 - x} = \frac{n-1}{n} = 1,$$

und folgt aus der Bedingung (17): $\alpha > \frac{1}{2}$, wie in §. 80. Hat aber n einen endlichen Werth > 1, so ist mit $x = 1 - \xi$:

$$\frac{x^{\frac{1}{n}} - x}{1 - x} = \frac{1}{\xi}\left[1 - \frac{1}{n}\,\xi + \frac{1}{2}\,\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right)\xi^2 - \ldots - 1 + \xi\right] =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{\xi}{2n} - \ldots\right) < \frac{n-1}{n},$$

folglich der Grenzwerth von α grösser als $\frac{1}{2}$, und es ist dann umgekehrt für irgend einen gegebenen Werth von $\alpha > \frac{1}{2}$ durch die Bedingung (17) ein Grenzwerth von x bestimmt, unter welchen das Verhältniss $\frac{p}{p_0}$ keinenfalls sinken kann, wenn p zugleich die Pressung im kleinsten Querschnitt, also dieser mit dem Ausflussquerschnitte identisch sein soll. Insbesondere mit $n = 1{,}41$ ergiebt sich:

$$\frac{x^{0,7092} - x}{1 - x} > \frac{0{,}1454}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

z. B. für $\alpha =$ 1	0,9	0,8	0,7	0,6
$x >$ 0,19	0,24	0,31	0,42	0,61

Diese Grenzwerthe von $x = \frac{p}{p_0}$, welche sich so erheblich abhängig von α zeigen, würden mit den durch Gl. (13) bestimmten Werthen von $\frac{p}{p_0}$, die von dem Geschwindigkeitscoefficienten φ abhängen, nur dann vergleichbar sein, wenn die vorhin mit P' bezeichnete Grösse hinsichtlich ihrer Beziehung zu α und φ rationell in Anschlag gebracht werden könnte.

§. 101. Andere Gestalt der Ausflussformeln, nach Zeuner.

Durch die im vorigen §. entwickelten Formeln, deren Buchstabenbezeichnungen auch im Folgenden unverändert beibehalten werden, ist der Einfluss des Bewegungswiderstandes auf die Weise berücksichtigt worden, dass dieser Widerstand gewissermassen am Ende der Bewegung bis zum Ausflussquerschnitte concentrirt einwirkend gedacht, demgemäss die Ausflussgeschwindigkeit u zunächst ohne Rücksicht auf denselben berechnet und erst nachträglich mit einem Correctionsfactor, dem Geschwindigkeitscoefficienten φ, multiplicirt wurde; durch die Fundamentalgleichungen war dann ohne Weiteres auch die Temperatur T', also wegen der gegebenen Pressung p überhaupt der Wärmezustand der Luft im Ausflussquerschnitte mit Rücksicht auf den Bewegungswiderstand bestimmt, während die Ausflussmenge G ausserdem von einem zweiten Erfahrungscoefficienten α bezüglich auf die Grösse des Ausflussquerschnitts abhängig gemacht werden musste.

Wenn nun auch das wahre Gesetz, nach welchem der Bewegungswiderstand die Zustandsänderung der ausströmenden Luft successive beeinflusst, nicht bekannt ist, und ohne näheres Eingehen auf die Natur des fraglichen Widerstandes und die Bewegungsart der einzelnen Lufttheilchen auch nicht würde erkannt werden können, so ist doch möglicher Weise ein immerhin besserer Anschluss an die thatsächlichen Verhältnisse dadurch zu erreichen, dass statt jener Aufeinanderfolge einer widerstandslosen Bewegung und eines dann plötzlich einwirkenden Widerstandes irgend eine stetige Zustandsänderung vorausgesetzt wird, die von Anfang an unter dem Einflusse des Widerstandes, also der dadurch bedingten Wärmeentwickelung stattfindet, vorbehaltlich erfahrungsmässiger Bestimmung eines in der vorausgesetzten Gleichung

$$f(p,v) = 0$$

der Zustandscurve (§. 13) vorkommenden Coefficienten. Wie schon in §. 20 bemerkt wurde, empfiehlt sich in solchen Fällen in Ermangelung sonstiger specieller Anhaltspunkte im Allgemeinen die Annahme:

$$p v^m = Const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

unter m einen in jedem einzelnen Falle constanten Exponenten verstanden, der im vorliegenden Falle um so mehr $< n$ sein wird, je grösser der

Widerstand ist, je mehr also durch die Wärmeentwickelung desselben die Pressungsabnahme bei der Expansion vermindert wird.

Nach §. 20 ist die durch das Gesetz (1) bestimmte Zustandsänderung auch dadurch charakterisirt, dass für jedes Element derselben die mitgetheilte Wärme dQ zur Temperaturveränderung dT ein constantes Verhältniss hat. Die Wärme dQ ist hier das Aequivalent der elementaren Widerstandsarbeit dB; dT, nach der Zustandsgleichung proportional $d(pv)$, ist nach Gl. 3, §. 99, auch proportional dH, wenn ausser von einer äusseren Wärmemittheilung auch von einer Schwerearbeit abstrahirt, also $M = h = 0$ gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung entspricht also der Zustandsänderung nach dem Gesetze (1) ein constantes Verhältniss:

$$\frac{dB}{dH} = Const., \text{ woraus } B = Const. (H - H_0)$$

folgt, also $Const. = \frac{B}{H} = \zeta$, d. h. = dem Widerstandscoefficienten (§. 76, Gl. 1), wenn auch $H_0 = 0$ wäre. Hiernach ist begreiflich, wie Zeuner* umgekehrt unter der Voraussetzung $h = 0$, $H_0 = 0$ aus der Annahme:

$$\frac{dB}{dH} = Const. = \zeta$$

die Gl. (1) der Zustandscurve als Folgerung erhalten konnte. Hier musste es vorgezogen werden, von Gl. (1) als Annahme auszugehen, weil sie nicht weniger willkürlich erscheint, als die Zeuner'sche Annahme, und weil dies der Allgemeinheit wegen wünschenswerth ist sowohl mit Rücksicht auf solche Fälle, in denen nicht $h = 0$, $H_0 = 0$ ist, als auch in Betreff einer späteren Anwendung auf Dämpfe, bei denen nach §. 41, Gl. 6 dem Gesetze $pv^m = Const.$ keineswegs ein constantes Verhältniss der elementaren Wärmeentwicklung und der Temperaturänderung entspricht.

Gemäss dieser Annahme (1) und der Gleichung des Arbeitsvermögens (§. 99, Gl. 3), aus welcher durch Integration vom Querschnitte F_0 im Gefässe bis zum Ausflussquerschnitte αA folgt:

$$H - H_0 = h + \frac{n}{n-1}(p_0 v_0 - pv),$$

---

* Neue Darstellung der Vorgänge beim Ausströmen der Gase und Dämpfe aus Gefässmündungen. Civilingenieur, 1871, S. 71.

ist nun mit Rücksicht auf §. 20, Gl. (3)

$$H = H_0 + h + \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right] \dots\dots (2).$$

Diese Gleichung bestimmt jetzt die Ausflussgeschwindigkeit $u = \sqrt{2gH}$ statt Gl. (2) im vorigen §., indem zur Berücksichtigung des Bewegungswiderstandes statt des Coefficienten φ jetzt die gleichfalls erfahrungsmässig zu bestimmende Zahl m dient, die Zeuner den Ausflussexponenten genannt hat. Die Beziehung zwischen beiden ist von dem Verhältnisse $\frac{p}{p_0}$ abhängig:

$$\frac{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{H - H_0 - h}{\frac{1}{\varphi^2} H - H_0 - h} \dots\dots\dots (3).$$

Einfacher und unabhängig von $\frac{p}{p_0}$ ist die Beziehung zwischen m und dem Widerstandscoefficienten ζ. Nach der Gleichung der lebendigen Kraft (§. 99, Gl. 1) ist nämlich:

$$B + H - H_0 = h - \int_{p_0}^{p} v\,dp = h + p_0 v_0 - pv + \int_{v_0}^{v} p\,dv,$$

also mit $B = \zeta H$ und gemäss Gl. (1) nach §. 20, Gl. (3) und (4)

$$(1 + \zeta) H = H_0 + h + p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right] +$$

$$+ \frac{p_0 v_0}{m-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right] =$$

$$= H_0 + h + \frac{m}{m-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right] \dots\dots (4);$$

hieraus und aus Gl. (2) folgt:

$$\frac{n-1}{n} (H - H_0 - h) = \frac{m-1}{m} (\zeta H + H - H_0 - h),$$

also mit

$$\zeta' = \frac{H}{H - H_0 - h} \zeta \dots\dots\dots\dots (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta' &= \frac{m}{m-1}\,\frac{n-1}{n} - 1 = \frac{n-m}{n(m-1)} \\ m &= \frac{n(1+\zeta')}{1+n\zeta'}; \quad \frac{m-1}{m} = \frac{n-1}{n(1+\zeta')} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6).$$

Der Zustand der Luft im Ausflussquerschnitte ist nach §. 20, Gl. (3) bestimmt durch:

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{m}}; \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

und die Ausflussmenge (Kgr. pro Sec.) durch die Continuitätsgleichung:

$$G = \frac{\alpha A u}{v} = \frac{\alpha A u}{v_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Ist $h = 0$ und $H_0 = 0$, oder wird der Einfluss dieser Grössen dadurch näherungsweise berücksichtigt, dass unter p_0 die im Querschnitte F_0 des Gefässes beobachtete Pressung vermehrt um $\frac{H_0 + h}{v_0}$ verstanden wird, so ergiebt sich die Ausflussgeschwindigkeit und Ausflussmenge aus Gl. (2) und (8):

$$u = \sqrt{2g\,\frac{n}{n-1}\,p_0 v_0\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right]} \ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\frac{G}{A} = \alpha\sqrt{2g\,\frac{n}{n-1}\,\frac{p_0}{v_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]} \ldots\ldots (10)$$

In diesem Falle ist $\zeta' = \zeta$, also

$$\zeta = \frac{n-m}{n(m-1)}; \quad m = \frac{n(1+\zeta)}{1+n\zeta}; \quad \frac{m-1}{m} = \frac{n-1}{n(1+\zeta)} \quad (11).$$

und die Beziehung zwischen φ und ζ kann nach Gl. (3), wenn $\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}} = q$ gesetzt wird, in der Form dargestellt werden:

$$\varphi^2 = \frac{1 - q^{\frac{1}{1+\zeta}}}{1-q}; \quad 1 + \zeta = \frac{lg\,q}{lg[1 - (1-q)\varphi^2]} \ldots (12)$$

Aus $\ln q = \ln[1-(1-q)] = -(1-q) - \frac{(1-q)^2}{2} - \ldots$

und $\ln[1-(1-q)\varphi^2] = -(1-q)\varphi^2 - \frac{(1-q)^2}{2}\varphi^4 - \ldots$

$$\text{folgt: } 1+\zeta = \frac{1}{\varphi^2}\,\frac{1+\frac{1-q}{2}+\ldots}{1+\frac{1-q}{2}\varphi^2+\ldots} > \frac{1}{\varphi^2},$$

wie schon früher aus allgemeinen Gründen geschlossen wurde (§. 76).

Die bekannte Formel für die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers ist hier nur in der aus der Gleichung der lebendigen Kraft abgeleiteten Gl. (4) als Grenzfall ($m = \infty$) enthalten. Die Gleichung (2) und die aus der Verbindung von Gl. (2) mit Gl. (4) hervorgegangenen Beziehungen (6) sind auf Wasser nicht anwendbar, weil Gl. (2) aus einer solchen Form der Gleichung des Arbeitsvermögens hervorging, in welcher die für Wasser nicht allgemein gültige Gleichung des inneren Arbeitsvermögens

$$dU = \frac{1}{n-1}\,d(pv)$$

schon enthalten war.*

Ist wieder $\frac{p}{p_0} = 1-\delta$ und $\delta = \frac{p_0 - p}{p_0}$ . . . . (13)

ein kleiner Bruch, so ist analog den Entwickelungen im vorigen §. näherungsweise

$$1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}} = \frac{m-1}{m}\,\delta\left(1+\frac{1}{2m}\,\delta\right)$$

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m+1}{m}} = \frac{m-1}{m}\,\delta\left(1-\frac{3}{2m}\,\delta\right),$$

---

* Wenn also Zeuner a. a. O. unter der Voraussetzung $h = 0$, $H_0 = 0$ für Wasser mit $n = \infty$ aus Gl. (11)

$$\frac{m-1}{m} = \frac{1}{1+\zeta}$$

und somit aus Gl. (9)

$$u = \sqrt{2g\,p_0 v_0\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{1+\zeta}}\right]}$$

folgert, so ist das nur für kleine Pressungsdifferenzen mit derjenigen Annäherung gültig, mit der in diesem Falle überhaupt die Formeln für Luft und für Wasser einerlei Form erhalten.

also nach Gl. (9) und (10) mit Rücksicht auf Gl. (11)

$$u = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta} p_0 v_0 \delta \left(1 + \frac{1}{2m} \delta\right)} \ldots \ldots \ldots 14$$

$$\frac{G}{A} = \alpha \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta} \frac{p_0}{v_0} \delta \left(1 - \frac{3}{2m} \delta\right)} \ldots \ldots \ldots 15$$

übereinstimmend mit den betreffenden Formeln für Wasser, wenn auch noch die Glieder mit δ^2 vernachlässigt werden.

Wenn schliesslich wieder angenommen wird, es werde die äussere Pressung p allmählig von p_0 bis Null erniedrigt, so nimmt nach Gl. (9) die Ausflussgeschwindigkeit zu

$$\text{von } 0 \text{ bis } max.\ u = \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_0 v_0} = \sqrt{2g \frac{n}{n-1} R T_0}$$

und nach Gl. (7) die Temperatur im Ausflussquerschnitte ab

$$\text{von } T_0 \text{ bis } min.\ T = 0.$$

Das Maximum von u ist hier also grösser, das Minimum von T kleiner, als nach den Formeln im vorigen §., während v hier wie dort bis ∞ wächst. Unter der Voraussetzung endlich, dass α und m, also α und ζ unverändert bleiben, würde nach Gl. (10) die Ausflussmenge am grössten für

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 16$$

und zwar

$$\frac{max.\ G}{A} = \alpha \sqrt{2g \frac{n}{n-1} \frac{m-1}{m+1} \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{2}{m-1}} \frac{p_0}{v_0}} \ldots 17,$$

während thatsächlich nach dem von Zeuner bestätigten Satze von de Saint Venant und Wantzel der Coefficient α von dem durch Gl. 16 bestimmten Werthe des abnehmenden Verhältnisses $\frac{p}{p_0}$ an gerechnet der Art wächst, dass G fast constant bleibt und somit auch für

$$\frac{p}{p_0} < \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}}$$

nach Gl. (17) berechnet werden kann, unter α jetzt nach wie vor einen nur mässig veränderlichen Contractionscoefficienten $\overline{\overline{<}}\ 1$ verstanden. Bezeichnet also p' den durch Gl. (16) bestimmten, von p_0 und m abhängigen

besonderen Werth von p, so ist zu schliessen, dass die mittlere Pressung im kleinsten Querschnitt des contrahirten Strahls nie wesentlich $< p'$ werden kann, dass sie nämlich nahe $= p$ ist, so lange $p > p'$, dagegen nahe $= p'$, wenn $p < p'$ ist; die Bahnen der Lufttheilchen sind an der Stelle des kleinsten Querschnitts im ersteren Falle fast parallel und geradlinig, wie bei Wasser, im zweiten dagegen auswärts concav gekrümmt um so mehr, je mehr $p < p'$ ist.

Ob übrigens die Berücksichtigung der Widerstände durch den Zeuner'schen Ausflussexponenten m oder durch den im vorigen §. benutzten Geschwindigkeitscoefficienten φ den thatsächlichen Verhältnissen besser entspricht, wird durch Versuche kaum entschieden werden können. Man könnte glauben, dass die verschiedenen Werthe, die sich für u und T beim Ausfluss in den leeren Raum in beiden Fällen ergeben haben, zur Entscheidung der Frage verhelfen können; allein diese Grössen lassen sich nicht unmittelbar messen. Man müsste sich auf eine Messung derjenigen Temperatur beschränken, mit welcher die Luft nach dem Ausflusse schliesslich in der Vorlage zur Ruhe kommt, und diese wäre nach beiderlei Formeln $= T_0$ unabhängig von den Widerständen und von der Pressung p in der Vorlage. In der That wird dadurch, dass die lebendige Kraft $\frac{u^2}{2g}$ bei constanter Pressung p sich in Wärme verwandelt, die Temperatur mit Rücksicht auf §. 19, Gl. (1), unter A hier den Wärmewerth der Arbeitseinheit verstanden, um

$$\frac{A}{c_1}\frac{u^2}{2g} = \frac{A}{nc}\frac{u^2}{2g} = \frac{n-1}{n}\frac{u^2}{2gR}$$

erhöht, und sie wird also

$$= T + \frac{n-1}{n}\frac{u^2}{2gR} = T_0$$

sowohl nach Gl. (4) und (5) im vorigen, wie nach Gl. (7) und (9) in diesem §., desgleichen im Grenzfalle $p = 0$ mit den Werthen von *max.* u und *min.* T im vorigen wie in diesem §., ein Resultat, welches übrigens schon daraus folgt, dass nach der Gleichung des Arbeitsvermögens (§. 99, Gl. 3), also hier nach der Gleichung

$$dH + \frac{n}{n-1}\, d(pv) = 0,$$

sobald H wieder $=$ Null geworden ist, auch wieder $pv = p_0 v_0$, also die absolute Temperatur $= T_0$ geworden sein muss.

Auch wenn etwa die Vergleichung der für verschiedene Werthe von

p und p_0 beobachteten Ausflussmengen mit Gl. (6) im vorigen und mit Gl. (10) in diesem §. den Werth von m, also auch von ζ hier weniger veränderlich erscheinen liesse, als den Werth von φ dort, so würde daraus noch kein Vorzug des Exponenten m vor dem Coefficienten φ zu folgern sein, so lange man nicht anderweitig wüsste, dass der Widerstandscoefficient ζ wirklich nur wenig veränderlich ist. Solchen Widerständen z. B., die von der inneren Reibung der längs einander hinströmenden Flüssigkeitsfäden herrühren, entspricht wenigstens für Wasser nach §. 90, Gl. 12 eine Widerstandshöhe, die proportional $\frac{u}{d^2}$, oder ein Widerstandscoefficient, der umgekehrt proportional ud^2 gesetzt werden kann (unter d die Strahldicke verstanden) und somit nicht constant ist.

An und für sich ist es gleicher Weise willkürlich, durch die Einführung des Exponenten m den Widerstand nach einem a priori angenommenen Gesetze die Zustandsänderung stetig beeinflussend anzunehmen, oder durch den Coefficienten φ diesen Einfluss an das Ende des ganzen Vorganges zu verlegen; das eine wie das andere Verfahren ist nur ein Nothbehelf mit Rücksicht auf die Unkenntniss des wahren Gesetzes, nach welchem irgend ein solcher besonderer, auf einer kurzen Strecke sich geltend machender Widerstand aus seinen Elementarbestandtheilen zusammengesetzt ist. Je nach den Umständen kann die im vorigen §. gemachte oder Zeuner's Annahme besser entsprechend sein, z. B. jene im Falle des Ausflusses durch eine cylindrische Ansatzröhre ohne Abrundung an der Gefässwand, diese für den Ausfluss aus einer Mündung in der dünnen Wand; sofern nämlich der Annahme von Zeuner ein constanter Werth des Verhältnisses $\frac{dB}{dH}$ entspricht, setzt sie streng genommen eine Veränderung von H oder u in beständig gleichem Sinne voraus, was bei dem Ausfluss aus der Ansatzröhre in Folge der inneren Contraction nicht der Fall ist.

Indessen hat die Zeuner'sche Annahme den Vorzug, dass die ihr entsprechende Gl. (10) von einfacherer Form ist, als Gl. (6, im vorigen §.

§. 102. Erfahrungscoefficienten.

Die experimentelle Bestimmung der Erfahrungscoefficienten, womit die für den Ausfluss der Luft in den vorigen Paragraphen entwickelten Formeln behaftet sind, wird dadurch erschwert, dass Strahlenmessungen

hier nicht wie bei Wasser (§. 82) ausführbar sind; die Begrenzung des ausfliessenden Luftstrahls ist weder genügend sichtbar, noch überhaupt in ebenso bestimmter Weise wie dort vorhanden. Die Versuche sind deshalb auf eine indirecte Messung der Ausflussmenge beschränkt, und wenn nun auch zwar die Coefficienten α und φ in Gl. (6), §. 100, oder α und m in Gl. (10), §. 101, der Art getrennt vorkommen, dass sie aus je zwei Versuchswerthen von G, die für verschiedene Werthe von $\frac{p}{p_0}$ unter übrigens gleichen Umständen gefunden wurden, berechnet werden konnten, so ist es doch eben fraglich, ob die Werthe der beiden Coefficienten bei solchen zwei Versuchen dieselben, d. h. von $\frac{p}{p_0}$ unabhängig sind. Eine weitere Schwierigkeit entsteht dadurch, dass die Permanenz des Ausflusses hier nicht durch eine constante Pressung ausserhalb der Mündung und im Inneren des Gefässes allein verbürgt wird, sondern dass dazu ferner eine constante Temperatur im Inneren des Gefässes nöthig wäre, weshalb es gerade bei den wichtigsten der betreffenden Versuche vorgezogen wurde, dieselben nicht im Beharrungszustande, sondern bei stetig veränderlichem Druck anzustellen; zur Ableitung der gesuchten Coefficienten aus denselben wird dann aber eine nicht nur weniger einfache, sondern auch weniger zuverlässige Rechnung nöthig.

Frühere Versuche, welche in den Jahren 1820—1826 von verschiedenen Experimentatoren (Schmidt, Lagerhjelm, Koch, d'Aubuisson) angestellt wurden, sind wenig maassgebend schon wegen der sehr kleinen Druckdifferenzen (p_0—p), worauf sie sich beschränkten. Bei den in den vorigen Paragraphen erwähnten Versuchen von de Saint-Venant und Wantzel (1839) waren zwar p und p_0 sehr bedeutend verschieden, indem dieselben atmosphärische Luft in den Recipienten einer Luftpumpe einströmen liessen, in welchem die Pressung zu Anfang der verschiedenen Versuchsreihen nur 10 bis 20 Millim. Quecksilbersäule entsprach; indem sie aber die Pressung im Recipienten entweder bei continuirlich andauernder Lufteinströmung nach gleichen Zeitintervallen (von 5 zu 5 Secunden) oder bei periodisch unterbrochener Einströmung nur unmittelbar nach dem Schluss der Mündung beobachteten und daraus die inzwischen ausgeströmte Luftmenge berechneten, musste bei Unkenntniss der entsprechenden Temperatur im Recipienten solche Bestimmung, wie Zeuner hervorhob, sehr unzuverlässig sein, abgesehen davon, dass diese Versuche auch wegen der Kleinheit des Maassstabes ($^2/_3$, 1 und $1^1/_2$ Millim. Mündungsdurchmesser bei einem Cubikinhalte des Recipienten von nur 0,0174 Cubikm.) nur

wenig entscheidend sein konnten, wie schon Poncelet geltend gemacht hatte.

Die umfangreichsten Versuche auch für grössere Pressungsdifferenzen (bis zu 2,5 Atm. innerem bei 1 Atm. äusserem Druck) und mit verschiedenen Arten von Mündungen und Mundstücken bis zu 25 Millim. Mündungsweite wurden im Sommer 1856 von Weisbach angestellt.* Er bediente sich dazu eines Dampfkessels von 5 Mtr. Länge, $1^1/_4$ Mtr. Weite und

$$V_0 = 4{,}672 \text{ Cubikm.}$$

Inhalt, der mit Manometer und Thermometer zur Messung des Drucks und der Temperatur im Inneren ausgerüstet war und mit verschiedenen Mündungen oder Mundstücken versehen werden konnte. Nachdem derselbe vermittels einer Druckpumpe mit comprimirter Luft gefüllt, das Absperrventil durch eine Druckschraube auf seinen Sitz fest niedergedrückt und die (durch die Compression vorübergehend erhöhte) Temperatur im Inneren der äusseren $= T_0$ wieder gleich geworden war, was wegen der Trägheit des Thermometers der constant gewordene Stand des Manometers am sichersten anzeigte, ergab sich aus letzterem und dem gleichzeitig beobachteten Barometerstande die innere Pressung $= p_0$ und die äussere $= p$. Nachdem dann die Mündung während einer gemessenen Zeit $t = 20$ bis 90 Secunden geöffnet worden war, wurde sogleich nach dem Schluss derselben der Manometerstand wieder abgelesen und so die innere Pressung $= p_1$ $(< p_0)$ bestimmt. Die entsprechende Temperatur T_1 $(< T_0)$ konnte natürlich nicht unmittelbar durch das Thermometer gefunden werden, weil es den Temperaturveränderungen in seiner Umgebung zu langsam folgt und auch, wenn einige Zeit später abgelesen, schon der Einfluss der unterdessen von aussen durch die Kesselwand eingedrungenen Wärme sich geltend gemacht hätte; indem dann aber gewartet wurde, bis der bei vollständig abgesperrtem Kessel allmählig wachsende Manometerstand wieder constant geworden war, entsprechend einer inneren Pressung $= p_2$ und einer wieder auf T_0 gestiegenen Temperatur, konnte daraus

$$T_1 = \frac{p_1}{p_2} T_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

berechnet werden.**

---

* Die vollständige Berechnung der Versuchsresultate wurde erst 18.. veröffentlicht im XII. Bande des „Civilingenieur".

** Nach der früher in §. 21 erklärten Methode sind die (dort mit p_1, p, p_2 bezeichneten Werthe von p_0, p_1, p_2 in einigen solchen Fällen, in denen ... und die Ausflussöffnung recht gross, t aber und folglich die unterdessen von

Hiernach ergiebt sich das im Zustande (p, T_0), d. h. bei der Pressung p und der absoluten Temperatur T_0 gemessene Luftvolumen, welches in t Secunden ausfloss, während die Pressung im Inneren von p_0 bis p_1 abnahm

$$V = \frac{p_0 - p_2}{p} V_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

und indem nun Weisbach dasselbe Volumen auch theoretisch mit Hülfe der bekannten Ausflussöffnung $= A$ und eines Ausflusscoefficienten μ berechnet, findet er letzteren durch Gleichsetzung beider Ausdrücke. Diese theoretische Berechnung betrifft zwar ein erst später zu behandelndes Problem nicht permanenter strömender Bewegung, doch muss das von Weisbach benutzte angenäherte Verfahren hier auseinander gesetzt werden, um über die Bedeutung und den Werth der von ihm gefundenen Coefficienten ein vollständiges Urtheil zu gewinnen. Indem er das Luftvolumen dV', gemessen im Zustande (p, T_0), welches in einem Zeitelement dt ausfliesst, im Verhältnisse $dt:1$ kleiner setzt, als dasjenige Volumen, welches in einer Secunde ausfliessen würde, wenn der augenblickliche Zustand im Inneren des Gefässes (Pressung $= p'$, specif. Volumen $= v'$, absolute Temperatur $= T'$) unterdessen constant bliebe, letzteres aber nach denselben Grundsätzen berechnet, auf denen Gl. (10) in §. 100 beruht, ergiebt sich

$$dV' = \frac{T_0}{T'} \frac{p'}{p} v' G dt$$

$$\text{mit} \quad G = \mu A \sqrt{2g \frac{n}{n-1} \frac{p'}{v'} \left[\left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]},$$

also

$$\frac{dV'}{dt} = \frac{T_0}{T'} \mu A \sqrt{2gp'v' \frac{n}{n-1} \left[\left(\frac{p'}{p}\right)^{2\frac{n-1}{n}} - \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]}$$

$$= \frac{T_0}{T'} \mu A \sqrt{2gRT' \frac{n}{n-1} \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left[\left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right]}$$

...ussen eingedrungene Wärme sehr klein waren, nebenbei zur Bestimmung des ...erhältnisses

$$n = \frac{lgp_0 - lgp_1}{lgp_0 - lgp_2}$$

...r specifischen Wärmen für constante Pressung und für constantes Volumen ...enutzt und dabei die dort angeführten Werthe gefunden worden.

$$\frac{dV'}{dt} = \mu A \sqrt{2gRT_0} \sqrt{\frac{T_0}{T'}} \cdot y \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\text{mit} \quad y = \sqrt{\frac{n}{n-1} x^{\frac{n-1}{n}} \left(x^{\frac{n-1}{n}} - 1\right)}; \quad x = \frac{p'}{p} \ldots (4).$$

Während des Ausflusses nimmt die in Gl. (3) vorkommende Temperatur T' von T_0 bis T_1 ab, also

$$\frac{T_0}{T'} \text{ von 1 bis } \frac{T_0}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \text{ (nach Gl. 1) zu.}$$

Weil aber bei den Versuchen $\frac{p_2}{p_1}$ höchtens $= 1{,}1$ und somit immer

$$1 \overline{\overline{<}} \sqrt{\frac{T_0}{T'}} < 1{,}05$$

war, setzt Weisbach für dieses wenig veränderliche Verhältniss den constanten Mittelwerth

$$\frac{T_0}{T'} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{p_2 - p_1}{p_1}\right) = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{p_2 - p_1}{p_1}$$

$$\sqrt{\frac{T_0}{T'}} = 1 + \frac{1}{4}\,\frac{p_2 - p_1}{p_1}$$

und somit nach Gl. (3)

$$dV' = \mu C y dt; \quad C = A\sqrt{2gRT_0}\left(1 + \frac{1}{4}\,\frac{p_2 - p_1}{p_1}\right) \ldots (5),$$

während y eine wesentlich veränderliche Grösse ist entsprechend der Aenderung des Verhältnisses

$$x = \frac{p'}{p} \text{ von } x_0 = \frac{p_0}{p} \text{ bis } x_1 = \frac{p_1}{p} \ldots\ldots\ldots (6).$$

Wenn nun aber auch diese Einführung eines constanten Mittelwerthes von $\frac{T_0}{T'}$ in Gl. (3) unter den obwaltenden Umständen allenfalls zu rechtfertigen wäre, so ist doch der weitere Rechnungsgang Weisbach's nicht als zulässig zu erachten. Aus Gl. (5) folgt nämlich

$$\mu C t = \int_0^V \frac{dV'}{y} = V \frac{1}{y'},$$

unter $\frac{1}{y'}$ einen gewissen Mittelwerth von $\frac{1}{y}$ verstanden, und indem Weisbach denselben ohne Begründung

$$\frac{1}{y'} = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{y} = \frac{1}{x_0 - x_1} \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{y}$$

setzt, erhält er mit Rücksicht auf den Ausdruck von V nach Gl. (2) die Gleichung:

$$\mu = \frac{V_0}{Ct} \frac{p_0 - p_2}{p} \frac{1}{x_0 - x_1} \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

die er vermittels einer zuvor nach der Simpson'schen Regel berechneten Hülfstabelle für das darin vorkommende Integral und mit Hülfe des Ausdrucks (5) der Constanten C zur Berechnung der Coefficienten μ für 62 verschiedene Fälle benutzt hat. Jener Ausdruck von $\frac{1}{y'}$, welcher darauf hinausläuft,

$$\frac{dV'}{dx} = Const. = \frac{V}{x_1 - x_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

zu setzen, ist nun aber in Widerspruch mit dem Umstande, dass der dem Verhältnisse $\frac{T_0}{T'}$ beigelegte constante Mittelwerth nothwendig > 1 ist. Denn analog Gl. (2) ist das ebenso wie V gemessene Luftvolumen V', welches bis zu dem Augenblicke ausfloss, in welchem die Pressung im Inneren des Gefässes $= p'$ geworden ist,

$$V' = \frac{p_0 - p''}{p} V_0,$$

unter p'' die Pressung verstanden, bis zu welcher p' stiege, wenn in dem betreffenden Augenblicke die Ausflussöffnung verschlossen und die Ausgleichung der inneren Temperatur T' mit der äusseren Lufttemperatur T_0 abgewartet würde. Diese Pressung ist analog Gl. (1)

$$p'' = p' \frac{T_0}{T'}$$

und somit

$$V' = \left(\frac{p_0}{p} - \frac{p'}{p} \frac{T_0}{T'}\right) V_0 = \left(x_0 - x \frac{T_0}{T'}\right) V_0 \quad \ldots\ldots (9),$$

folglich, wenn wieder für $\frac{T_0}{T'}$ ein constanter Mittelwerth gesetzt wird, auch hier

$$\frac{dV'}{dx} = Const., \text{ diese aber } = -\frac{T_0}{T'}V_0,$$

woraus in Verbindung mit Gl. (8) und mit Rücksicht auf Gl. (2) folgen würde:

$$\frac{T_0}{T'} = \frac{-V}{V_0(x_1 - x_0)} = \frac{p_0 - p_2}{p(x_0 - x_1)} = \frac{p_0 - p_2}{p_0 - p_1} < 1.$$

Zur Charakterisirung der nach Gl. (7) von Weisbach berechneten Werthe von μ ist ferner die Kenntniss der Constanten nöthig, womit er die Werthe von C nach Gl. (5) und von y nach Gl. (4) in die Rechnung eingeführt hat. Wenn, was den ersteren Umstand betrifft, eine vom Gefrierpunkte des Wassers aus gerechnete Temperatur mit τ und der Ausdehnungscoefficient der Luft mit α bezeichnet, also

$$T_0 = a + \tau_0 = a(1 + \varepsilon\tau_0)$$

gesetzt wird, so könnte in dem Factor

$$\sqrt{2gRT_0} = \sqrt{2gRa(1 + \varepsilon\tau_0)}$$

von C der Feuchtigkeitsgehalt der Luft entweder dadurch berücksichtigt werden, dass R etwas grösser gesetzt wird (§. 17), oder mit Weisbach durch entsprechende Vergrösserung von ε, während R wie für trockene Luft angenommen, also mit den in §. 17 angeführten Constanten und mit $g = 9{,}81$

$$\sqrt{2gRa} = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \frac{10333}{1{,}2932}} = 396$$

gesetzt wird. Wenn Weisbach diese Zahl = 395, dafür aber ε wesentlich grösser, als für trockene Luft, nämlich = 0,004 und somit

$$C = 395\varDelta\left(1 + \frac{1}{4}\frac{p_2 - p_1}{p_1}\right)\sqrt{1 + 0{,}004\tau_0}$$

setzt, so kann dadurch ein beachtenswerther Fehler nicht verursacht werden.

Wenn aber Weisbach ferner

$$y = \sqrt{\frac{10}{3}x^{0,3}(x^{0,3} - 1)}, \quad \text{entsprechend} \quad \varkappa = 1{,}429$$

setzt, so erscheint solche Abweichung von dem erfahrungsmässigen Werthe 1,41 dieser Constanten $\varkappa$ zu gross, und wenn durch eine kleine Aenderung desselben dem Einflusse der Bewegungswiderstände hätte Rechnung getra-

gen werden sollen, so wäre er nicht zu vergrössern, sondern zu verkleinern gewesen.

Eine vollständige Neuberechnung des umfangreichen Versuchsmaterials ist indessen sehr zeitraubend, und mögen deshalb in folgender Tabelle die von Weisbach gefundenen Werthe von μ einstweilen unverändert (nur abgekürzt auf 3 Decimalen) nebst den betreffenden Werthen von $x_0 = \frac{p_0}{p}$, $x_1 = \frac{p_1}{p}$ und den in Millimetern ausgedrückten Mündungsweiten d mitgetheilt werden. Die Buchstaben A, B, C . . . bezeichnen die Art der Mündung oder des Mundstücks, nämlich:

A. verschiedene Kreismündungen in der dünnen ebenen Wand,
B. eine Kreismündung in dünner ebener Wand, innen zur Hälfte von einer zur Mündungsebene senkrechten Wand eingefasst,
C. eine Kreismündung in conisch-convergenter Wand (Fig. 33, §. 83, mit $\varrho = 50^0$),
D. eine Kreismündung in conisch-divergenter Wand (Fig. 33 mit $\varrho = 130^0$) mit scharfkantigem Rande,
E. eine quadratische Mündung in der dünnen ebenen Wand (d bedeutet hier und bei F die Seitenlänge des Quadrats),
F. eine quadratische Mündung in dünner ebener Wand, innen an zwei Seiten von zur Mündungsebene senkrechten Wänden eingefasst,
G. kurze cylindrische Ansatzröhren, scharfkantig von der ebenen Gefässwand ausgehend,
H. dieselbe Röhre wie Nr. 26, aber von dreifacher Länge,
I. eine innere cylindrische Ansatzröhre mit scharfkantigem Rande an der Mündung,
K. eine kurze cylindrische Ansatzröhre, mit abgerundetem Rande von der ebenen Wand ausgehend,
L. kurzes conoidisches Mundstück mit cylindrischer Berührungsfläche an der Mündung auslaufend,
M. eine conische Ansatzröhre von $7^0 9'$ Convergenzwinkel der gegenüberliegenden Seiten, 4 Centim. lang mit scharfkantigem innerem Rande,
N. eine ähnliche Röhre wie M, aber mit abgerundetem innerem Rande,
O. ein Düsenmundstück (d. i. eine längere conische Ansatzröhre mit schwach conoidischer Erweiterung am inneren Ende) von 15,5 Centim. Länge,
P. ein solches von 10,5 Centim. Länge,
Q. ein grösseres Düsenmundstück von 20,5 Centim. Länge.

Nr.		d	$x_0 = \frac{p_0}{p}$	$x_1 = \frac{p_1}{p}$	$\frac{x_0 + x_1}{2}$	μ
1.	A	10,10	1,098	1,012	1,05	0,563
2.	"	"	1,144	1,036	1,09	0,584
3.	"	"	1,386	1,194	1,29	0,667
4.	"	"	1,551	1,306	1,43	0,692
5.	"	"	1,808	1,490	1,65	0,722
6.	"	"	2,082	1,694	1,89	0,754
7.	"	"	2,386	1,920	2,15	0,788
8.	"	14,08	1,092	1,006	1,05	0,557
9.	"	"	1,143	1,035	1,09	0,573
10.	"	"	1,569	1,152	1,36	0,634
11.	"	"	1,926	1,414	1,67	0,683
12.	"	"	2,351	1,677	2,01	0,723
13.	"	17,25	1,144	1,010	1,08	0,565
14.	"	"	1,622	1,126	1,37	0,627
15.	"	"	1,925	1,326	1,63	0,666
16.	"	19,80	1,149	1,011	1,08	0,580
17.	"	"	1,677	1,112	1,39	0,641
18.	"	25,46	2,267	1,335	1,80	0,715
19.	B	10,20	1,378	1,183	1,28	0,670
20.	C	10,20	1,414	1,214	1,31	0,723
21.	"	"	1,821	1,509	1,66	0,793
22.	D	10,20	1,398	1,216	1,31	0,589
23.	"	"	1,811	1,513	1,66	0,663
24.	E	9,03	1,391	1,193	1,29	0,656
25.	F	9,25	1,397	1,178	1,29	0,703
26.	G	10,12	1,398	1,192	1,29	0,828
27.	"	10,14	1,093	1,008	1,05	0,754
28.	"	"	1,146	1,047	1,10	0,770
29.	"	14,02	1,128	1,027	1,08	0,816
30.	"	"	1,680	1,137	1,41	0,810
31.	"	"	2,004	1,390	1,70	0,821
32.	"	24,88	2,175	1,316	1,75	0,833
33.	H	10,12	1,405	1,210	1,31	0,752
34.	"	"	1,810	1,517	1,66	0,761
35.	"	"	2,387	1,982	2,18	0,797
36.	I	10,10	1,407	1,196	1,30	0,713
37.	"	"	1,779	1,454	1,62	0,770
38.	K	10,14	1,402	1,163	1,28	0,928
39.	"	"	1,798	1,443	1,62	0,923
40.	L	10,02	1,134	1,020	1,08	0,915
41.	"	"	1,355	1,135	1,24	0,981
42.	"	"	1,518	1,241	1,38	0,986
43.	"	"	1,770	1,423	1,60	0,967

Nr.		d	$x_0 = \frac{p_0}{p}$	$x_1 = \frac{p_1}{p}$	$\frac{x_0 + x_1}{2}$	μ
44.	„	„	2,064	1,645	1,85	0,974
45.	„	„	2,396	1,901	2,15	0,980
46.	M	10,04	1,139	1,024	1,08	0,911
47.	„	„	1,382	1,153	1,27	0,922
48.	„	„	1,828	1,464	1,65	0,944
49.	N	10,12	1,372	1,145	1,26	0,944
50.	„	„	1,540	1,251	1,40	0,958
51.	„	„	1,801	1,439	1,62	0,946
52.	„	„	2,057	1,632	1,84	0,950
53.	„	„	2.403	1,901	2,15	0,955
54.	O	9,66	1,135	1,026	1,08	0,933
55.	„	„	1,400	1,180	1,29	0,934
56.	„	„	1,811	1,475	1,64	0,939
57.	„	„	2,390	1,927	2,16	0,984
58.	P	14,04	1,137	1,022	1,08	0,938
59	Q	15,80	1,135	1,031	1,08	0,952
60.	„	„	1,629	1,180	1,40	0,940
61.	„	„	1,978	1,377	1,68	0,953
62.	„	„	2,495	1,708	2,10	0,966

Es ergeben sich hieraus u. A. die nachstehenden Folgerungen:

1) Bei dem Ausflusse aus Kreismündungen in der dünnen ebenen Wand wächst μ mit dem inneren Ueberdruck, und zwar in höherem Grade, als für Wasser — §. 83, 1) — umgekehrt μ mit wachsender wirksamer Druckhöhe abnimmt. Von der Mündungsweite d ist dagegen μ bei Wasser und Luft in gleicher Weise abhängig: mit wachsender Mündungsweite nimmt μ auch hier ab; nach obiger Tabelle ergiebt sich z. B. (theilweise durch Interpolation)

für d = 10,10 14,08 17,25 Millim.

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \begin{cases} 1,08 \\ 1,37 \\ 1,63 \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} 0,579 & 0,569 & 0,565 \\ 0,671 & 0,635 & 0,627 \\ 0,721 & 0,680 & 0,666 \end{cases}$$

2) Die theilweise Einfassung einer Kreismündung (partielle Contraction) scheint nur geringe Vergrösserung von μ zur Folge zu haben.

3) Für eine Kreismündung in conisch convergenter Wand (geschwächte Contraction) ist μ wesentlich grösser, in conisch divergenter Wand (verstärkte Contraction) wesentlich kleiner, als für eine Kreismündung in der ebenen Wand, ähnlich wie bei Wasser.

4) Für eine quadratische Mündung in der ebenen dünnen Wand ist der Ausflusscoefficient nicht wesentlich verschieden von dem einer Kreismündung unter übrigens gleichen Umständen. Die theilweise Einfassung der quadratischen Mündung (partielle Contraction) vergrössert μ in ähnlichem Grade wie bei Wasser — §. 84, 4) —.

5) Auch für kurze cylindrische Ansatzröhren bestätigt sich das für Kreismündungen in der dünnen Wand gefundene Wachsen des Ausflusscoefficienten mit dem inneren Ueberdruck; eine Abhängigkeit von der Rohrweite ist aus den Versuchswerthen nicht deutlich zu erkennen.

6) Für eine innere cylindrische Ansatzröhre ist μ wesentlich kleiner. als für eine äussere.

7) Durch Abrundung des inneren Randes der cylindrischen Ansatzröhre wird μ bedeutend vergrössert, besonders wenn diese Abrundung, sehr allmählig stattfindend, sich bis zur Mündung erstreckt, und dadurch die cylindrische Röhre in ein nur cylindrisch auslaufendes conoidisches Mundstück übergeht. Auch im letzteren Falle scheint μ mit dem inneren Ueberdrucke anfangs zu wachsen, bald aber nahe constant zu bleiben $= 0,97$ bis 0,98.

8) Der Ausflusscoefficient conisch convergenter Ansatzröhren wächst nur in geringem Grade mit dem inneren Ueberdruck.

Für solche Pressungen im Inneren des Gefässes, welche wesentlich mehr als das Doppelte des äusseren Drucks betragen, dürfen diese Folgerungen nicht ohne Weiteres als gültig betrachtet werden, nach den Bemerkungen in §. 100 und 101 ist dann vielmehr bei weiter wachsendem innerem Ueberdruck in allen Fällen ein stetiges Wachsen des Ausflusscoefficienten über die Einheit hinaus zu erwarten, zu dessen Prüfung die Weisbach'schen Versuche nicht ausreichen.

Dieselben haben auch zunächst nur den Coefficienten μ ergeben, entsprechend der Gl. (10), §. 100. Die Vergleichung dieser Formel mit Gl. (6) desselben §. ergiebt aber

$$\mu = \frac{\alpha\varphi\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}}{1-\varphi^2\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right]} = \frac{\alpha\varphi}{\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{n-1}{n}}-\varphi^2\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{n-1}{n}}-1\right]} \quad (10)$$

und indem hierin $\frac{p_0}{p} = \frac{x_0+x_1}{2}$ gesetzt wird, könnte daraus einer der Coefficienten α, φ gefunden werden, wenn der andere bekannt wäre. F-

die cylindrischen Ansatzröhren und das conoidische Mundstück z. B. kann, so lange $\frac{x_0 + x_1}{2} < 2$ ist, $\alpha = 1$ gesetzt, und somit aus Gl. (10) der Geschwindigkeitscoefficient φ berechnet werden; für die Kreismündungen in der dünnen Wand wäre dieser Coefficient φ ohne erheblichen Fehler demjenigen des conoidischen Mundstücks gleichzusetzen, somit α aus Gl. (10) zu bestimmen. Durch φ ist der Widerstandscoefficient ζ nach Gl. (12), §. 101, und dadurch der Zeuner'sche Ausflussexponent m nach Gl. (11) desselben §. bestimmt. Diese Ableitungen mögen indessen hier unterlassen werden, da die oben besprochenen Mängel der Weisbach'schen Berechnungsweise seiner Versuche die daraus hervorgegangenen Werthe von μ zu unsicher erscheinen lassen. —

Zeuner benutzte bei seinen im Jahre 1871 angestellten Versuchen über den Ausfluss der Luft aus Kreismündungen in der dünnen Wand, aus cylindrischen Ansatzröhren und conoidischen Mundstücken einen ähnlichen Apparat wie Weisbach, liess aber die Versuche bis zu Pressungen p_0 von ungefähr 4 Atm. sich erstrecken, während die Ausflusszeit t im Gegensatze zu Weisbach auf etwa 10 Secunden beschränkt wurde, um die unterdessen von aussen in den Kessel eindringende Wärme möglichst zu beschränken. Ueber die Versuchsresultate sind von Zeuner z. Z. nur vorläufige Mittheilungen gemacht worden,* die hauptsächlich den Zweck hatten, die Richtigkeit des Satzes von de Saint-Venant und Wantzel (§. 100) zu constatiren, dass, wenn das Pressungsverhältniss $\frac{p_0}{p}$ über eine gewisse Grenze hinaus wächst, die Ausflussmenge unabhängig von der äus-

* Resultate experimenteller Untersuchungen über das Ausströmen der Luft bei starkem Ueberdruck; aus den Protokollen der 75. Hauptversammlung des Sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins abgedruckt im „Civilingenieur", Bd. XX (1874). Wenn übrigens Zeuner das Weisbach'sche Versuchs- und Rechnungsverfahren deshalb für ungenügend erachtet, weil es bei der von demselben angewendeten Ausflusszeit von t bis zu 90 Secunden unrichtig sei, anzunehmen, dass während des Ausströmens die Luft im Inneren des Kessels sich so ausdehne, als ob ihr Wärme weder mitgetheilt noch entzogen würde, so scheint uns dieser Einwand nicht ganz gerechtfertigt. Hätte Weisbach diese Annahme wirklich gemacht, so hätte er gar nicht nöthig gehabt, die Pressungen p_2 zu beobachten; es hätte dann T_1 aus T_0, p_1, p_0 und p_2 aus T_0, T_1 berechnet werden können. Allerdings wurde die Wärmeleitung der Gefässwand nicht ganz correct und vollständig von Weisbach berücksichtigt, doch lässt sich dieser Mangel durch das im folgenden §. erklärte Rechnungsverfahren corrigiren.

seren Pressung wird, indem dann die mittlere Pressung im kleinsten Querschnitte = einem gewissen aliquoten Theil der inneren Pressung p_0 wird, der wesentlich grösser ist, als die äussere Pressung p. —

Zeuner's Ausflussversuche mit zwei innen gut abgerundeten und nach aussen cylindrisch ausgehenden kurzen Mundstücken von 4,094 und 7,02 Millim. Mündungsweite sind von Prof. Fliegner in Zürich zusammen mit eigenen Versuchen an solchen Mundstücken von 4,085 und 7,314 Millim. Mündungsweite im Anschluss an die oben erwähnten Zeuner'schen Mittheilungen im „Civilingenieur" (1874) veröffentlicht und zugleich unter Rücksichtnahme auf Weisbach's Versuche mit einem ähnlichen Mundstück von 10,02 Millim. Mündungsweite (Nr. 40 bis 45 der obigen Tabelle) zur Prüfung der betreffenden Ausflussgesetze benutzt worden. Bei den eigenen Versuchen, die mit demselben Apparat angestellt wurden, den Zeuner s. Z. benutzt hatte, kam es Fliegner vorzugsweise darauf an, die Pressung des Luftstroms in der Mündungsebene oder wenigstens nahe derselben zu messen. Zu diesem Zwecke wurde das betreffende Mundstück mit einer engen Seitenröhre versehen, die vermittels einer höchstens 1 Millim. weiten Oeffnung möglichst dicht am äusseren scharfkantigen, recht gleichförmig aus dichtem Messing hergestellten Rande des Mundstücks abgezweigt und mit einem Manometer verbunden war, dessen Stand periodisch und gleichzeitig mit demjenigen des zur Messung der inneren Pressung p_0 dienenden Manometers abgelesen wurde. Die so ermittelte Pressung p' der Luft im Mundstück dicht vor der Mündungsebene wurde nun nicht erst von einem gewissen Werthe des wachsenden Verhältnisses $\frac{p_0}{p}$ an, sondern beständig grösser, als die äussere Pressung p gefunden, welche bei den Versuchen die einem Barometerstande von etwa 720 Millim. entsprechende atmosphärische Pressung war. Wenn $\frac{p_0}{p}$ von 1 an gleichmässig zunahm, so wurde auch das Verhältniss $\frac{p'}{p}$ von 1 an in anfangs geringem, aber stetig wachsendem Maasse grösser der Art, dass das Verhältniss $\frac{p'}{p_0}$ von 1 an in abnehmendem Maasse kleiner werdend, sich der Grenze

$$lim. \frac{p'}{p_0} = 0,5767 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11$$

näherte, von welcher es übrigens schon für $p_0 > 2p$ kaum mehr merklich

verschieden war. Das Abhängigkeitsgesetz dieses Verhältnisses $\frac{p'}{p_0}$ für $p_0 < 2p$ wurde graphisch dargestellt, die Aufstellung einer empirischen Formel zur analytischen Darstellung desselben jedoch unterlassen.

Bei der Aufstellung einer Formel für die Ausflussmenge der Luft aus solchen innen gut abgerundeten und aussen cylindrischen kurzen Mundstücken legt nun Fliegner das Resultat dieser Vorversuche zu Grunde, indem er ausserdem die Widerstände als verschwindend klein betrachtet, also $\zeta = 0$ oder $m = n$ setzt. Damit und mit $\alpha = 1$, sowie mit $p_0 v_0 = RT_0$ ergiebt sich aus Gl. (10) im vorigen §. zunächst durch Einführung des obigen Grenzwerthes von $\frac{p'}{p_0}$ statt $\frac{p}{p_0}$, d. h.

$$\text{für } p_0 > 2p\colon \frac{G}{A} = C\frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

und zwar mit $g = 9{,}81$, $R = 29{,}27$, $n = 1{,}41$:

$$C = 5{,}3728 \text{ resp. } C = 4083{,}33 \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

jenachdem die Pressung in Millimetern Quecksilbersäule oder in Atmosphären ausgedrückt wird. Für kleinere Werthe von $\frac{p_0}{p}$ wurde die statt p in Gl. (10) des vorigen §. einzusetzende Pressung p' der oben erwähnten graphischen Darstellung entnommen, und zeigte sich dann, dass die so mit $\alpha = 1$, $m = n$ berechneten Werthe von $\frac{G}{A}$ sehr nahe der folgenden Gleichung entsprachen:

$$\frac{G}{A} = 2C\sqrt{\frac{p(p_0 - p)}{T_0}} \text{ für } p_0 < 2p \quad \ldots\ldots\ldots (14),$$

unter C denselben Zahlencoefficienten wie in Gl. (12) verstanden.

Diese Formeln verglich dann Fliegner mit den oben erwähnten Ausflussversuchen von ihm selbst, von Zeuner und von Weisbach mit Mundstücken von der in Rede stehenden Art, indem er jedesmal den Werth ermittelte, welcher dem Coefficienten C beigelegt werden musste, damit das arithmetische Mittel der Ausflussmengen, die damit nach der betreffenden Formel dem Anfang und dem Ende des Ausflusses bei Voraussetzung des Beharrungszustandes entsprachen, der beobachteten resp. aus den Beobachtungsdaten sich ergebenden Ausflussmenge gleich wurde. Nach diesem einfachen Verfahren, das freilich nur für kleine Ausflusszeiten und entsprechende Zustandsänderungen, z. B. für die Versuche Zeuner's

von etwa 10 Secunden Ausflussdauer, hinlänglich zutreffend sein, dagegen auf Weisbach's Versuche von 60 Secunden Ausflusszeit sowie auch auf manche der eigenen Versuche Fliegner's kaum mit hinlänglicher Sicherheit anwendbar sein dürfte, ergab sich im Allgemeinen eine befriedigende Uebereinstimmung der so berechneten mit dem nach Gl. (13) bestimmten Werthe von C, mit Ausnahme eines der Weisbach'schen Versuche (Nr. 40 der Tabelle, S. 574), der aber auch schon seines sonst auffallend abweichenden Resultates wegen von zweifelhafter Zuverlässigkeit ist. Eine weitere Ausdehnung dieser Untersuchungen wird beabsichtigt, und muss abgewartet werden, ob dabei die vorläufigen bemerkenswerthen Resultate sich bestätigt finden, sowie auch mit welchen Modificationen sie sich [illegible] zugleich für anders geartete Mundstücke und für Mündungen in dünner Wand als gültig ergeben werden.

Wenn übrigens Fliegner der Meinung ist, dass der Grenzwerth des Verhältnisses $\frac{p'}{p_0}$, überhaupt der Grenzwerth des Verhältnisses der äusseren Pressung im kleinsten Querschnitte zur inneren Pressung und die dadurch bedingte Verschiedenheit des Ausflussgesetzes bei kleinem und grossem inneren Ueberdruck nur scheinbar mit dem Maximum des Ausdruckes (10), §. 101, der Ausflussmenge zusammenhängen, in Wahrheit vielmehr von anderen Umständen, als einer solchen Zufälligkeit [illegible] lytischen Ausdrucks abhängen werde, so ist dem ohne Zweifel beizupflichten, und entspricht dieser Ansicht auch der zu Ende von §. [illegible] gestellte, wegen Mangels an genügenden Daten freilich nicht [illegible] durchgeführte Versuch, den in Rede stehenden Grenzwerth mit [illegible] inneren und sachlichen Gründen in Verbindung zu bringen.

§. 103. Theilweise Neuberechnung der Weisbach'schen Versuche.

Da die im vorigen §. besprochenen Ausflussversuche von W[illegible] an und für sich das grösste Zutrauen verdienen und z. Z. [illegible] wichtigste Grundlage zur Beurtheilung der den Ausfluss der Luft [illegible] tenden Erfahrungscoefficienten bilden, so ist eine Controlberechnung [illegible] selben unter Vermeidung der im vorigen §. hervorgehobenen Mängel [illegible] Weisbach'schen Berechnungsweise wünschenswerth. Nimmt man an, es erfolge die Zustandsänderung der im Kessel zurückbleibenden [illegible] während des Ausflusses von t Secunden in solcher Weise, dass [illegible] sung einer gewissen [illegible] Grenze des specifischen Volumens un[illegible]

proportional bleibt (wo mit Rücksicht auf das Eindringen äusserer Wärme durch die Kesselwand $\nu < n$ sein wird), so findet, wenn übrigens die im vorigen §. gebrauchten Buchstabenbezeichnungen hier unverändert beibehalten werden, zwischen der augenblicklichen Pressung p' und absoluten Temperatur T' im Inneren des Kessels während des Ausflusses nach §. 20 die Beziehung statt:

$$\frac{T_0}{T'} = \left(\frac{p_0}{p'}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} = \left(\frac{p_0}{p'}\right)^{\varepsilon} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

mit

$$\varepsilon = \frac{\nu - 1}{\nu};\quad x = \frac{p'}{p};\quad x_0 = \frac{p_0}{p}.$$

Dabei ist ε mit Rücksicht auf Gl. (1) im vorigen §. bestimmt durch die Pressung p_2, die der Beobachtung zufolge nach dem Schlusse der Ausflussöffnung und Wiederherstellung der Temperatur T_0 im Inneren des Kessels stattfindet, nämlich

$$\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\varepsilon} = \frac{T_0}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\varepsilon = \frac{lg p_2 - lg p_1}{lg p_0 - lg p_1} = \frac{lg x_2 - lg x_1}{lg x_0 - lg x_1} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

mit

$$x_1 = \frac{p_1}{p};\quad x_2 = \frac{p_2}{p}.$$

Wenn nun wieder die in jedem Zeitelement dt ausfliessende Luftmenge im Verhältnisse $dt : 1$ kleiner gesetzt wird, als diejenige, welche in der Zeiteinheit ausfliessen würde, wenn der augenblickliche Zustand im Inneren des Kessels constant bliebe,* so ist nach Gl. (3) und (4) im vorigen §. mit Rücksicht auf obige Gl. (1)

$$\frac{dV'}{dt} = \mu A \sqrt{2gRT_0} \sqrt{\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\, x^{\varepsilon}\,(x^{\varepsilon} - 1)} \ldots\ldots (3),$$

---

* Diese Voraussetzung ist um so weniger fehlerhaft, je länger der mit der Geschwindigkeit = Null beginnende Ausfluss schon gedauert hat, und es ist deshalb um so mehr fraglich, ob die von Zeuner bei seinen Versuchen vorgezogene wesentlich kürzere Ausflusszeit t von nur etwa 10 (statt 20 bis 90) Secunden als Vorzug gelten kann, abgesehen nämlich davon, dass die unvermeidlichen Messungsfehler dieser Zeit das Resultat natürlich um so mehr beeinflussen werden, je kleiner t ist.

wenn zur Abkürzung

$$e = \frac{n-1}{n}$$

gesetzt wird. Andererseits ist nach Gl. (9) im vorigen §. mit Rücksicht auf obige Gl. (1)

$$V' = \left[x_0 - x\left(\frac{x_0}{x}\right)^\varepsilon\right] V_0 = (x_0 - x_0^\varepsilon\, x^{1-\varepsilon}) V_0,$$

also

$$\frac{dV'}{dx} = -(1-\varepsilon) V_0 \left(\frac{x_0}{x}\right)^\varepsilon,$$

woraus durch Verbindung mit Gl. (3) folgt:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\mu A}{(1-\varepsilon)V_0}\sqrt{\frac{2gRT_0}{e x_0^\varepsilon}}\sqrt{x^{e+\varepsilon}(x^e-1)}$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{x^{e+\varepsilon}(x^e-1)}} = -\frac{\mu A t}{(1-\varepsilon)V_0}\sqrt{\frac{2gRT_0}{e x_0^\varepsilon}}$$

$$\mu = \frac{(1-\varepsilon)V_0}{At}\sqrt{\frac{e x_0^\varepsilon}{2gRT_0}}\int_{x_1}^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{x^{e+\varepsilon}(x^e-1)}} \quad \ldots\ldots 4.$$

Wenn darin, den Weisbach'schen Versuchen entsprechend, $V_0 = 4,672$, ferner $e = 0,291$ (entsprechend $n = 1,41$), $g = 9,81$ und mit Rücksicht auf den Feuchtigkeitsgehalt der Luft $R = 29,4$ (§. 17) gesetzt, schliesslich aber der ganze Ausdruck mit 10000 multiplicirt wird, entsprechend der Voraussetzung, dass A in Quadratcentimetern ausgedrückt sei, so ergiebt sich:

$$\mu = 1049\,\frac{1-\varepsilon}{At}\sqrt{\frac{x_0^\varepsilon}{T_0}}\int_{x_1}^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{x^{e+\varepsilon}(x^e-1)}} \quad \ldots\ldots 5.$$

Die folgende Tabelle enthält die nach den Gleichungen (2) und (5) berechneten Werthe von ε und μ für die Weisbach'schen Versuche (s. die Tabelle im vorigen §.), welche sich auf

1) die Kreismündung in der dünnen ebenen Wand von 14,08 Millim. Durchmesser (Nr. 8—12),
2) die kurze cylindrische Ansatzröhre ohne innere Abrundung von 14,02 Millim. Weite (Nr. 29—31), und

3) das kurze conoidische Mundstück von 10,02 Millim. Mündungsdurchmesser (Nr. 40—45) beziehen.

Die Werthe von ε sind natürlich an die speciellen Umstände gebunden, wie sie bei den Versuchen stattfanden; der Umstand, dass sie wesentlich $< e$ ($= 0{,}291$) sind, lässt auf eine beträchtliche Wärmetransmission der Kesselwand schliessen, wobei es bemerkenswerth ist, dass die verschiedene Ausflussdauer $= t$ Sec. keinen erheblichen Einfluss auf ε ausübt.

Die Werthe von μ sind als für solche Werthe von $\frac{p}{p_0}$ (des Verhältnisses der äusseren zur inneren Pressung) gültig zu betrachten, welche den gleichfalls angeführten Werthen von $\frac{2}{x_0 + x_1}$ nahe gleich sind.* Bei ihrer Ableitung mit Hülfe von Gl. (5) ist das Integral

$$\int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x^{e+\varepsilon}(x^{\varepsilon} - 1)}} = \int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx$$

---

* Richtiger entsprechen sie denjenigen mittleren inneren Pressungen p', bei welchen im Beharrungszustande in t Secunden eine ebenso grosse Luftmenge, nämlich nach §. 102, Gl. (2) die Luftmenge

$$\frac{p}{RT_0}V = \frac{(p_0 - p_2)V_0}{RT_0} = p\frac{(x_0 - x_2)V_0}{RT_0} \text{ Kgr.}$$

ausfliessen würde, und welche nach §. 100, Gl. (10) bestimmt sind durch die Gleichung:

$$\mu A t \sqrt{\frac{2g}{e}\frac{p'}{v'}\left[\left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]} = p\frac{(x_0 - x_2)V_0}{RT_0}$$

oder, da nach obiger Gl. (1)

$$\frac{1}{v'} = \frac{p'}{RT'} = \frac{p'}{RT_0}\left(\frac{p_0}{p'}\right)^{\varepsilon} = \frac{p'}{RT_0}\left(x_0\frac{p}{p'}\right)^{\varepsilon}$$

, durch die Gleichung:

$$\left(x_0\frac{p}{p'}\right)^{\varepsilon}\left[\left(\frac{p'}{p}\right)^{2e} - \left(\frac{p'}{p}\right)^{e}\right] = \frac{e}{2gRT_0}\left[\frac{(x_0 - x_2)V_0}{\mu A t}\right]^2$$

$$\left(\frac{p'}{p}\right)^{e-\varepsilon}\left[\left(\frac{p'}{p}\right)^{e} - 1\right] = \frac{e}{2gRT_0 x_0^{\varepsilon}}\left[\frac{(x_0 - x_2)V_0}{\mu A t}\right]^2.$$

Sofern indessen die Ausflusscoefficienten μ nur wenig veränderlich sind, so folge das durch diese Gleichung bestimmte Verhältniss $\frac{p}{p'}$, den durch §. 100,

nach der Näherungsformel

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x)\,dx = \frac{x_0 - x_1}{90}\,[7f(x_1) + 32f(x_1 + \Delta x) + 12f(x_1 + 2\Delta x) + $$
$$+ 32f(x_1 + 3\Delta x) + 7f(x_0)]\,; \quad \Delta x = \frac{x_0 - x_1}{4}$$

berechnet worden, entsprechend dem Ersatz der Curve $y = f(x)$ durch die Curve 4ten Grades

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4,$$

die mit jener die 5 Punkte gemein hat, deren Abscissen $= x_1, x_1 + \Delta x, x_1 + 2\Delta x, x_1 + 3\Delta x, x_0$ sind. Unter der Ueberschrift (μ) sind zur Vergleichung die von Weisbach berechneten Werthe dieses Coefficienten (aus der Tabelle im vorigen §.) beigesetzt worden.

Mit Hülfe der so berechneten Coefficienten μ konnten dann für die cylindrische Ansatzröhre und das conoidische Mundstück, entsprechend $\alpha = 1$, die Coefficienten φ aus der Gleichung:

$$\mu = \frac{\alpha\varphi q}{1 - (1 - q)\varphi^2} \quad (§.\ 102,\ Gl.\ 10)$$

mit $q = \left(\frac{2}{x_0 + x_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{2}{x_0 + x_1}\right)^{0,291}$ gefunden werden, damit die Widerstandscoefficienten ζ aus der Gleichung:

$$1 + \zeta = \frac{lg\,q}{lg[1 - (1 - q)\varphi^2]} \quad (§.\ 101,\ Gl.\ 12)$$

und die Ausflussexponenten m aus der Gleichung:

$$m = \frac{n(1 + \zeta)}{1 + n\zeta} = \frac{1{,}41(1 + \zeta)}{1 + 1{,}41\zeta} \quad (§.\ 101,\ Gl.\ 11).$$

Für eine Kreismündung in der dünnen Wand ist der Widerstandscoefficient demjenigen des kurzen conoidischen Mundstücks nahe gleich zu erachten. Indem aber ζ für letzteres sehr schwankend ausfiel ohne deutlich erkennbares Abhängigkeitsgesetz, und namentlich der erste dieser

Gl. (13) oder durch §. 101, Gl. (16) bestimmten Grenzwerth (des dort mit $\frac{p}{p_1}$ bezeichneten Verhältnisses) übertrifft, erschien es hier unbedenklich, dafür einfach $\frac{2p}{p_0 + p_1} = \frac{2}{x_0 + x_1}$ zu setzen, d. h. den berechneten Werth von μ auch als diesem mittleren Verhältnisse der äusseren zur inneren Pressung hinlänglich entsprechend anzunehmen.

6 Werthe ($\zeta = 0{,}181$) von den übrigen so auffallend abweicht, dass dadurch ein Zweifel an der Zuverlässigkeit dieses Versuches gerechtfertigt erscheint, so wurde für die Kreismündung in der dünnen Wand in allen Fällen $\zeta = 0{,}04$, entsprechend

$$m = \frac{1{,}41 \,.\, 1{,}04}{1 + 1{,}41 \,.\, 0{,}04} = 1{,}388$$

angenommen, wonach dann φ aus Gl. (12), §. 101, und damit α aus Gl. (10), §. 102, berechnet werden konnte.

Nr.	t	$\frac{2}{x_0 + x_1}$	ε	(μ)	μ	α	φ	ζ	m
8.	50	0,953	0,058	0,557	0,641	0,654	0,981	0,04	1,388
9.	40	0,918	0,089	0,573	0,638	0,651	0,981	0,04	1,388
10.	75	0,735	0,116	0,634	0,635	0,649	0,981	0,04	1,388
11.	60	0,599	0,133	0,683	0,685	0,701 ?	0,982	0,04	1,388
12.	60	0,497	0,143	0,723	0,727	0,746 ?	0,982	0,04	1,388
29.	30	0,928	0,147	0,816	0,815	1	0,821	0,490	1,243
30.	75	0,710	0,113	0,810	0,813	1	0,838	0,444	1,252
31.	60	0,589	0,137	0,821	0,831	1 ?	0,866	0,362	1,271
40.	60	0,928	0,144	0,915	0,917	1	0,921	0,181	1,327
41.	60	0,803	0,104	0,981	0,981	1	0,983	0,035	1,391
42.	60	0,725	0,105	0,986	0,988	1	0,990	0,022	1,398
43.	60	0,626	0,124	0,967	0,969	1	0,975	0,054	1,381
44.	60	0,539	0,130	0,974	0,977	1 ?	0,983	0,037	1,390
45.	60	0,465	0,144	0,980	0,986	1 ?	0,991	0,021	1,398

Nach Gl. (16), §. 101, sind die berechneten Werthe von α für die Kreismündung in der dünnen Wand nur so lange als Contractionscoefficienten (Verhältniss des kleinsten Strahlquerschnitts zur Ausflussmündung) zu betrachten, und ist für die anderen Fälle die Annahme $\alpha = 1$ nur so lange gerechtfertigt, als

$$\frac{2}{x_0 + x_1} > \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

ist. Für die Kreismündung ist mit $m = 1{,}388$ dieser Grenzwerth $=$ 0,530, folglich $\alpha = 0{,}746$ bei Nr. 12 jedenfalls grösser, als der Contractionscoefficient (der Ausflussquerschnitt $= \alpha A$ grösser, als der kleinste Querschnitt des contrahirten Strahls); thatsächlich macht sich die Zunahme von α schon bei Nr. 11 bemerklich, wobei wenigstens im Anfange des Ausflusses $\frac{p}{p_0}$ schon etwas $< 0{,}53$ war. Für die cylindrische Ansatzröhre ist

zwar die Bedingung (6) in allen drei Fällen erfüllt; bei Nr. 31 war indessen zu Anfang des Ausflusses $\frac{p}{p_0}$ schon kleiner, als der fragliche Grenzwerth, nämlich $< 0{,}551$ (entsprechend $m = 1{,}271$), und hätte deshalb vermuthlich α hier schon etwas > 1 gesetzt werden müssen, wodurch φ etwas kleiner, ζ etwas grösser, m etwas kleiner gefunden worden wäre. Für das conoidische Mundstück ist die Annahme $\alpha = 1$ bei Nr. 44 schon zweifelhaft, bei Nr. 45 jedenfalls nicht mehr gerechtfertigt; doch ist ein Einfluss dieses Umstandes auf die berechneten Werthe von φ, ζ, m hier nicht zu erkennen, indem dieselben vielmehr von zufälligen Umständen erheblich beeinflusst erscheinen.

Bei Ausschluss von Nr. 11 und Nr. 12 für die Kreismündung, von Nr. 31 für die cylindrische Ansatzröhre, zeigen sich die Coefficienten μ und α in beiden Fällen nur wenig variabel, für die Kreismündung etwa $\mu = 0{,}64$, $\alpha = 0{,}65$, für die cylindrische Ansatzröhre $\mu = 0{,}815$, also nahe ebenso gross wie beim Ausfluss des Wassers unter mittlerem Ueberdruck. Ob diesen Resultaten eine allgemeinere Bedeutung beizulegen ist, könnte durch eine vollständigere Neuberechnung der Weisbach'schen Versuche, als hier geschehen, geprüft werden.

Um für diejenigen Fälle, in denen die Bedingung (6) nicht erfüllt ist, z. B. für den Versuch Nr. 12 der vorstehenden Tabelle, den dafür in §. 101, Gl. (17) aufgestellten Ausdruck der Ausflussmenge, in welchem α die Bedeutung eines Contractionscoefficienten hat, auf seine Zulässigkeit zu prüfen, müsste constatirt werden, ob auf Grund dieses Ausdruckes bei Voraussetzung eines constanten Ausflussexponenten m sich solche Werthe des Coefficienten α aus den betreffenden Versuchen ergeben, die nur wenig von denjenigen verschieden sind, welche sich aus den der Bedingung (6) entsprechenden Versuchen mit demselben Mundstück ergaben, oder welche wenigstens mit Rücksicht auf ihre Grösse als wahre Werthe des möglicher Weise variablen Contractionscoefficienten angenommen werden können. Setzt man zu dem Ende wie in §. 102 mit denselben Bedeutungen der Buchstaben wie dort:

$$dV' = \frac{T_0}{T'}\frac{p'}{p}v'G\,dt,$$

so ist darin jetzt nach der fraglichen Gl. (17), §. 101

$$G = \alpha A\sqrt{2g\frac{n}{n-1}\frac{m-1}{m+1}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{2}{m-1}}\frac{p'}{v'}} = \alpha AM\sqrt{2g\frac{p'}{v'}}$$

zu setzen mit den abgekürzten Bezeichnungen:

$$e = \frac{n-1}{n}; \quad M = \sqrt{\frac{m-1}{m+1}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{2}{m-1}}}.$$

Somit ergiebt sich wegen $p'v' = RT'$

$$\frac{dV'}{dt} = \frac{T_0}{T'}\frac{p'}{p}\alpha AM\sqrt{\frac{2gRT'}{e}} = \alpha AM\sqrt{\frac{2gRT_0}{e}} \cdot \frac{p'}{p}\sqrt{\frac{T_0}{T'}}$$

oder mit $\frac{p'}{p} = x$, $\frac{T_0}{T'} = \left(\frac{x_0}{x}\right)^\varepsilon$ nach Gl. (1)

$$\frac{dV'}{dt} = \alpha AM\sqrt{\frac{2gRT_0}{e}} \cdot x\sqrt{\left(\frac{x_0}{x}\right)^\varepsilon}.$$

Wird dann diese Gleichung, welche jetzt an die Stelle von Gl. (3) getreten ist, wieder mit der Gleichung

$$\frac{dV'}{dx} = -(1-\varepsilon)V_0\left(\frac{x_0}{x}\right)^\varepsilon$$

verbunden, wie oben, so folgt:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\alpha AM}{(1-\varepsilon)V_0}\sqrt{\frac{2gRT_0}{ex_0^\varepsilon}} \cdot x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{x^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} = -\frac{2}{\varepsilon}\left[\left(\frac{1}{x_1}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} - \left(\frac{1}{x_0}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right] = -\frac{\alpha AMt}{(1-\varepsilon)V_0}\sqrt{\frac{2gRT_0}{ex_0^\varepsilon}}$$

$$\alpha = \frac{2(1-\varepsilon)V_0}{\varepsilon AMt}\sqrt{\frac{e}{2gRT_0}}\left[\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} - 1\right] \quad \ldots\ldots\ldots (4, a)$$

oder mit $V_0 = 4{,}672$, $e = 0{,}291$, $g = 9{,}81$, $R = 29{,}4$ und wenn wieder A in Quadratcentimetern ausgedrückt wird:

$$\alpha = 1049\,\frac{2(1-\varepsilon)}{\varepsilon AMt\sqrt{T_0}}\left[\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} - 1\right] \quad \ldots\ldots\ldots (5, a).$$

Setzt man hierin z. B. für A, t, T_0, x_0 und x_1 die Werthe, welche sich auf den Versuch Nr. 12 der obigen Tabelle beziehen, nebst $\varepsilon = 0{,}143$ und $m = 1{,}388$, so findet man $\alpha = 0{,}741$. Dass dieser Coefficient nur so wenig kleiner, als nach der früheren Rechnung sich ergiebt, ist dadurch erklärlich, dass das mittlere Verhältniss der äusseren zur inneren Pressung bei diesem Versuche nur wenig kleiner, als der durch die Bedingung (6) bestimmte Grenzwerth war, und muss man schliessen, dass auch der eigent-

liche Contractionscoefficient beim Ausfluss der Luft aus einer kreisförmigen Mündung in dünner Wand wirklich wächst, wenn jenes Pressungsverhältniss sich dem fraglichen Grenzwerthe nähert. Bei den **Weisbach**'schen Versuchen bleibt es aber diesem Grenzwerthe zu nahe, als dass auf Grund derselben eine entscheidende Prüfung der Gl. (17), §. 101, möglich wäre. —

Es ist endlich noch von Interesse zu prüfen, ob auch hier, wie es für den Ausfluss des Wassers aus cylindrischen Ansatzröhren — §. 86 unter 1 — gefunden wurde, die innere Contraction fast in gleichem Grade stattfindet wie die äussere beim Ausflusse aus einer Kreismündung in dünner Wand unter übrigens ähnlichen Umständen. Zu dem Ende seien:

p_1, v_1, u_1 die Pressung, das specif. Volumen und die Geschwindigkeit im kleinsten-Querschnitte des nach dem Eintritt in die Röhre contrahirten Luftstroms, während

p, v, u wie zuvor die entsprechenden Grössen für den Ausflussquerschnitt bedeuten unter der Voraussetzung, dass derselbe (wie bei Nr. 29 und 30 obiger Tabelle) mit dem Mündungsquerschnitte der Röhre identisch ist,

ζ_1 der Widerstandscoefficient, $pv^{m_1} = Const.$ das vorausgesetzte Gesetz der Zustandsänderung für die Bewegung bis zum kleinsten Querschnitte,

ζ_2 der Widerstandscoefficient und $pv^{m_2} = Const.$ das Aenderungsgesetz des Wärmezustandes für die Bewegung vom kleinsten Querschnitte bis zur Mündung, während

ζ und m wie zuvor sich als resultirende Werthe auf die ganze Bewegung vom Inneren des Gefässes bis zur Mündung beziehen.

Zwischen den Pressungen p_0, p_1, p und den Exponenten m, m_1, m_2 besteht dann wegen

$$\frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{v_1}\,\frac{v_1}{v}$$

die Beziehung:

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{m_1}} \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{m_2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7$$

Ferner ist die gesammte Widerstandshöhe

$$\zeta\frac{u^2}{2g} = \zeta_1\frac{u_1^2}{2g} + \zeta_2\frac{u^2}{2g}, \text{ also } \zeta_2 = \zeta - \zeta_1\left(\frac{u_1}{u}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad 8$$

und das in dieser Gleichung vorkommende Geschwindigkeitsverhältniss nach §. 101, Gl. (9):

$$\frac{u_1}{u} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{m_1-1}{m_1}}}{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9),$$

andererseits aber auch, wenn α den Coefficienten der inneren Contraction bedeutet,

$$\frac{u_1}{u} = \frac{1}{\alpha}\frac{v_1}{v} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{m_2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10).$$

Nach §. 76, Gl. (6) und mit Rücksicht auf §. 20, Gl. (4) ist endlich die Widerstandshöhe, welche dem Uebergange vom kleinsten Querschnitte des contrahirten Luftstroms bis zum vollen Rohrquerschnitte entspricht,

$$z\frac{u^2}{2g} = \frac{(u_1 - u)^2}{2g} + p_1(v_1 - v) + \frac{p_1 v_1}{m_2 - 1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m_2-1}\right]$$

$$= \left(\frac{u_1}{u} - 1\right)^2 \frac{u^2}{2g} + p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{m_2}} + \frac{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m_2-1}{m_2}}}{m_2 - 1}\right],$$

also mit Rücksicht auf den Ausdruck von $\frac{u^2}{2g}$ nach §. 101, Gl. (9):

$$z = \left(\frac{u_1}{u} - 1\right)^2 + \frac{n-1}{n}\frac{p_1 v_1}{p_0 v_0}\,\frac{1 - \left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{m_2}} + \frac{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m_2-1}{m_2}}}{m_2 - 1}}{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}}$$

$$= \left(\frac{u_1}{u} - 1\right)^2 - \frac{n-1}{n}\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{m_1-1}{m_1}} \frac{\left(\frac{p_1}{p}\right)^{\frac{1}{m_2}} - 1 + \frac{\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m_2-1}{m_2}} - 1}{m_2 - 1}}{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}} \quad (11).$$

Sind nun $\frac{p}{p_0} = \frac{2}{x_0 + x_1}$, ferner ζ und m gegeben, wie es nach obiger Tabelle der Fall ist, und werden ζ_1 und m_1 angenommen, etwa

$$\zeta_1 = 0{,}04 \quad \text{und} \quad m_1 = 1{,}388$$

wie für eine Kreismündung in der dünnen Wand, so sind die Unbekannten

$$\frac{p_1}{p} \quad \frac{u_1}{u} \quad m_2 \quad \zeta_2 \quad \alpha$$

durch die 5 Gleichungen (7)—(11) bestimmt. Wird etwa für $\frac{p_1}{p}$ ein Werth versuchsweise angenommen, wodurch auch $\frac{p_1}{p_0} = \frac{p_1}{p}\frac{p}{p_0}$ bestimmt ist, so findet man $\frac{u_1}{u}$ aus Gl. (9), m_2 aus Gl. (7), ζ_2 aus Gl. (8) oder (11), und ist dann der angenommene Werth von $\frac{p_1}{p}$ so lange zu corrigiren, bis diese beiden Werthe von ζ_2 genügend übereinstimmen. Schliesslich ist α durch Gl. (10) bestimmt. Auf diese Weise ergeben sich für Nr. 29 und Nr. 30 obiger Tabelle die folgenden Werthe.

Nr.	$\frac{p}{p_0}$	ζ	$\frac{p_1}{p}$	$\frac{p_1}{p_0}$	$\frac{u_1}{u}$	ζ_2	α
29.	0,928	0,490	0,935	0,868	1,638	0,383	0,637
30.	0,710	0,444	0,623	0,442	1,749	0,322	0,783

Bei kleinem Ueberdruck im Inneren des Gefässes (Nr. 29) ist hiernach α von fast gleicher Grösse wie für den Ausfluss aus einer Mündung in der dünnen Wand (Nr. 8, 9, 10). Bei grösserem Ueberdruck (Nr. 30) wird α bedeutend grösser, wobei aber bemerkt werden muss, dass in diesem Falle schon $\frac{p_1}{p_0}$ kleiner, als der durch die Bedingung (6) bestimmte Grenzwerth (nämlich $< 0,53$ entsprechend $m_1 = 1,388$) ist, so dass in diesem Falle entweder gar kein voller Ausfluss mehr stattfindet, oder wenigstens α nicht mehr die Bedeutung des inneren Contractionscoefficienten hat, vielmehr αA, unter A den Rohrquerschnitt verstanden, denjenigen Querschnitt des Luftstroms bedeutet, in welchem nach der inneren Contraction übrigens auch noch im Inneren der Ansatzröhre, die kleinste Pressung und grösste Geschwindigkeit stattfindet. Dieser Querschnitt kann der innere Ausflussquerschnitt genannt werden, der dann im Falle Nr. 30 ebenso wenig mit dem kleinsten Querschnitte des innerlich contrahirten Luftstroms verwechselt werden darf wie bei Nr. 11 und 12 der äussere Ausflussquerschnitt mit dem kleinsten Querschnitte des ausserhalb der Mündung contrahirten Strahls.

Im inneren Ausflussquerschnitte findet mit der kleinsten Pressung auch die kleinste Temperatur $= T_1$ statt, welche nebst der Temperatur

$= T$ in der Mündung, sofern diese wie bei Nr. 29 und 30 mit dem äusseren Ausflussquerschnitte identisch ist, durch die Gleichungen

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{m_1-1}{m_1}}; \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

bestimmt sind. Für Nr. 29 und 30 findet man entsprechend den beobachteten Temperaturen

$$\begin{aligned} t_0 &= T_0 - 273 = 21 \quad \text{resp.} \quad 18 \\ t_1 &= T_1 - 273 = 9{,}6 \quad \text{„} \quad -41{,}3 \\ t &= T - 273 = 16{,}7 \quad \text{„} \quad -1{,}4 \end{aligned}$$

Weisbach constatirte diese beträchtliche Abkühlung durch Umwickelung der messingenen Ansatzröhre mit einem nassen Bindfaden, von welchem bei einigermaassen beträchtlichem Ueberdruck im Inneren des Kessels) schon nach wenigen Secunden das gebildete Eis mit dem Messer abgeschabt werden konnte.

Bei grösserem innerem Ueberdruck, wenn nämlich die Pressung p_1 im inneren Ausflussquerschnitte $< 0{,}53 p_0$ und somit kleiner, als im kleinsten Querschnitte des innerlich contrahirten Luftstroms, dieser selbst also kleiner, als der innere Ausflussquerschnitt ist, kann die Ausflussmenge der Luft für eine cylindrische Ansatzröhre nach Gl. (17), §. 101 mit $m = m_1 = 1{,}388$ berechnet werden, also mit $n = 1{,}41$, $g = 9{,}81$ und $v_0 = \frac{29{,}4 T_0}{p_0}$ nach der Formel:

$$G = 2{,}0965\, \alpha A \sqrt{\frac{p_0}{v_0}} = 0{,}3866\, \alpha A \frac{p_0}{\sqrt{T_0}} \quad \ldots \ldots \ldots (13)$$

ebenso wie im Falle einer kreisförmigen Mündung in dünner Wand, wenn $p < 0{,}53 p_0$ ist. Darin bedeutet dann α den inneren (ebenso wie im Falle der Mündung in dünner Wand den äusseren) Contractionscoefficienten, der aus den Weisbach'schen oder ebenso angestellten Versuchen nach Gl. (5, a) mit $M = 0{,}2552$ entsprechend $m = m_1 = 1{,}388$ berechnet werden kann. So findet man insbesondere für die Versuche Nr. 30 und 31, also

$$\text{für} \quad \frac{p}{p_0} = 0{,}710 \quad 0{,}589$$
$$\alpha = 0{,}728 \quad 0{,}833$$

Derjenige Werth von $\frac{p}{p_0}$, welchem $\frac{p_1}{p_0} = 0{,}53$ entspricht, ergiebt sich aus Gl. (7):

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}}{\frac{1}{m} - \frac{1}{m_2}}} = (0,53)^{0,5125} = 0,722 \ldots\ldots\ldots (14,$$

wenn nämlich $m_1 = 1,388$ und, dem Versuch Nr. 29 entsprechend, $m = 1,243$ sowie $m_2 = 1,582$ gesetzt wird.

β. Bewegung der Luft in Röhren.

§. 104. Voraussetzungen und allgemeine Gleichungen.

Die Röhre, in welcher die Luft sich strömend bewegt, wird als fest liegend (bezüglich auf die Erde) vorausgesetzt, so dass als Massenkraft nur die Schwere in Betracht kommt, deren Arbeit pro 1 Kgr. Luft und für das Wegelement ds (Längenelement der Rohrmittellinie)

$$dM = \cos\psi\, ds$$

ist, unter ψ den Winkel verstanden, den die im Sinne der Bewegung genommene Mittellinie der Röhre an der betreffenden Stelle mit der Richtung der Schwere bildet.

Der Bewegungswiderstand bestehe nur in dem auf der ganzen Länge stetig einwirkenden Leitungswiderstande, vorbehaltlich einer Abtheilung der Röhre in einzelne Strecken an solchen Stellen, wo etwa besondere Widerstände von erheblicher Grösse concentrirt vorkommen. Wird dann wie bei der Bewegung des Wassers (§. 90, Gl. 6) die Widerstandshöhe pro Längeneinheit der Röhre (Arbeit des Leitungswiderstandes pro 1 Kgr Luft)

$$B_1 = \frac{\lambda}{d}\frac{u^2}{2g} = \frac{\lambda}{d}H$$

gesetzt, unter d den inneren Durchmesser der Röhre, event. ihren mittleren Durchmesser (vierfacher Inhalt dividirt durch den Umfang des Querschnitts) verstanden, so ist dieselbe für das Längenelement ds:

$$dB = B_1 ds = \frac{\lambda}{d} H ds.$$

Zur Bestimmung von p, v, T, u, d. h. der Pressung, des specif. Volumens, der Temperatur und der mittleren Geschwindigkeit, in der längs der Mittellinie gemessenen Entfernung s vom Anfangsquerschnitte der Röhre hat man dann nach §. 99 ausser der Zustandsgleichung

$$pv = RT$$

die Continuitätsgleichung:

$$Fu = Gv \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

sowie mit $H = \frac{u^2}{2g}$ die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$dH + vdp = \left(\cos\psi - \lambda\frac{H}{d}\right)ds \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

und die Gleichung des Arbeitsvermögens:

$$dH + \frac{n}{n-1}d(pv) = \cos\psi\, ds + WdQ \qquad \ldots \ldots \ldots (3).$$

In dieser letzten Gleichung ist nach §. 75, Gl. (6)

$$dQ = \frac{k}{G}(T' - T)dF' = \frac{kP'}{G}(T' - T)ds$$

zu setzen, wenn P' den Umfang des Rohrquerschnitts F resp. den Theil desselben bedeutet, an welchem eine Wärmeübertragung stattfindet, k den betreffenden Wärmetransmissions-Coefficienten und T' die äussere Temperatur an dieser Stelle.

In den folgenden Paragraphen sollen übrigens diese Gleichungen nur unter der Voraussetzung benutzt werden, dass

$$F, \quad d, \quad \psi, \quad kP', \quad \lambda$$

constante Werthe haben, vorbehaltlich einer Theilung der ganzen Röhre in solche Strecken, für welche diese Grössen mit constanten Mittelwerthen in Rechnung gestellt werden können.

§. 105. Bewegung der Luft in einer Röhre, durch deren Wand eine nur unwesentliche Wärmeleitung stattfindet.

Von der Wärmeleitung der Rohrwand kann abgesehen werden, wenn die Temperaturen innen und aussen nur wenig verschieden sind. Mit $dQ = 0$ und mit Rücksicht auf die Zustandsgleichung folgt dann aus Gl. (3) im vorigen §.

$$d(pv) = RdT = -\frac{n-1}{n}(dH - \cos\psi\, ds),$$

also, wenn p_0, v_0, T_0, u_0, H_0 die Werthe von p, v, T, u, H im Anfangsquerschnitte ($s = 0$) bedeuten,

$$R(T - T_0) = -\frac{n-1}{n}(H - H_0 - s\cos\psi) \quad \ldots\ldots 1,$$

eine Gleichung, die offenbar auch bei veränderlichem ψ gültig ist, falls für $s\cos\psi$ die Höhe des Anfangspunktes über dem Endpunkte von s gesetzt wird.

Um auch aus Gl. (2) im vorigen §. die Grössen p und v zu eliminiren, werde mit Rücksicht auf die Continuitäts- und die Zustandsgleichung

$$v\,dp = d(pv) - p\,dv = RdT - RT\frac{dv}{v} = RdT - RT\frac{du}{u} =$$
$$= RdT - RT\frac{dH}{2H}$$

gesetzt und sie dadurch auf die Form gebracht:

$$RT\frac{dH}{2H} - RdT - dH = \left(\lambda\frac{H}{d} - \cos\psi\right)ds \quad \ldots\ldots 2,$$

endlich durch Elimination von T vermittels Gl. (1):

$$\left[RT_0 - \frac{n-1}{n}(H - H_0 - s\cos\psi)\right]\frac{dH}{2H} + \frac{n-1}{n}(dH - \cos\psi\,ds) - dH$$
$$= \left(\lambda\frac{H}{d} - \cos\psi\right)ds$$

$$\left[RT_0 + \frac{n-1}{n}(H_0 + s\cos\psi)\right]\frac{dH}{2H} - \frac{n+1}{2n}dH = \left(\lambda\frac{H}{d} - \frac{\cos\psi}{n}\right)ds \quad 3.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich von der Form

$$\frac{ds}{dH} = s f(H) + \varphi(H),$$

deren Integral in bekannter Weise erhalten wird. Ist dadurch H, also $u = \sqrt{2gH}$ für irgend einen Werth von s gefunden, so ergiebt sich T aus Gl. (1) und p aus der Gleichung

$$\frac{RT}{p} = \frac{Fu}{G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4,$$

die durch Elimination von v zwischen der Continuitäts- und der Zustandsgleichung hervorgeht, oder auch mit Rücksicht auf den gegebenen Zustand im Anfangsquerschnitte aus der entsprechenden Gleichung

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0}\frac{u_0}{u} = \frac{T}{T_0}\sqrt{\frac{H_0}{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5.$$

Wenn die Röhre horizontal ist ($\cos\psi = 0$) oder wenigstens vom Einfluss der Schwere abstrahirt wird, kann Gl. (3) geschrieben werden:

$$\left(\frac{RT_0}{H_0} + \frac{n-1}{n}\right) H_0 \frac{dH}{H^2} - \frac{n+1}{n} \frac{dH}{H} = 2\lambda \frac{ds}{d},$$

so dass sich darin die Veränderlichen H, s getrennt finden und als Integral unmittelbar erhalten wird:

$$\left(\frac{RT_0}{H_0} + \frac{n-1}{n}\right)\left(1 - \frac{H_0}{H}\right) - \frac{n+1}{n} \ln \frac{H}{H_0} = 2\lambda \frac{s}{d} \quad \ldots (6).$$

Nach Gl. (1) ergiebt sich nun aber selbst für sehr lange Röhren und bedeutende Geschwindigkeiten eine nur so kleine Temperaturdifferenz $(T_0 - T)$, dass dieselbe im Vergleich mit der vernachlässigten Wärmeleitung der Rohrwand gar nicht in Betracht kommt. Im Falle einer horizontalen Röhre z. B. ist danach für atmosphärische Luft mit $n = 1{,}41$ und $R = 29{,}4$

$$T_0 - T = 0{,}0099\,(H - H_0)$$

erst dann $> 0{,}1$ Grad, wenn $H - H_0 > 10$ ist. Setzt man aber beispielsweise $T_0 = 300$, $\lambda = 0{,}03$, so folgt aus Gl. (6) für

$$H_0 = 20\,(u_0 = 19{,}8),\ H = 30:\ \frac{s}{d} = 2440,$$

$$H_0 = 40\,(u_0 = 28{,}0),\ H = 50;\ \frac{s}{d} = 730.$$

Hiernach kann für solche Fälle, in denen die Wärmeleitung der Rohrwand nicht besonders in Rechnung gestellt werden muss, und wenn die Luft nicht etwa mit ungewöhnlich grosser Geschwindigkeit in einer verhältnissmässig sehr langen oder engen Röhre strömt, die einfachere Voraussetzung

$$T = T_0 = Const.$$

der Rechnung zu Grunde gelegt werden. Dieselbe ersetzt die Gl. (1), während Gl. (2) übergeht in

$$\left(\frac{RT}{2H} - 1\right) dH = \left(\lambda \frac{H}{d} - \cos\psi\right) ds \quad \ldots\ldots\ldots (7),$$

woraus folgt:

$$\lambda \frac{ds}{d} = \frac{\frac{RT}{2} - H}{H\left(H - \frac{d\cos\psi}{\lambda}\right)} dH = \left(\frac{\frac{RT}{2}\frac{\lambda}{d\cos\psi} - 1}{H - \frac{d\cos\psi}{\lambda}} - \frac{\frac{RT}{2}\frac{\lambda}{d\cos\psi}}{H}\right) dH$$

$$\frac{2\cos\psi}{RT}\,ds = \left(\frac{1-\frac{2d\cos\psi}{\lambda RT}}{H-\frac{d\cos\psi}{\lambda}} - \frac{1}{H}\right)dH$$

$$\frac{2s\cos\psi}{RT} = \left(1-\frac{2d\cos\psi}{\lambda RT}\right) ln \frac{H-\frac{d\cos\psi}{\lambda}}{H_0-\frac{d\cos\psi}{\lambda}} - ln\frac{H}{H_0} \quad \ldots\ldots (8).$$

Hierdurch ist H, folglich $u = \sqrt{2gH}$ für jeden Werth von s bestimmt, dann die Pressung nach Gl. (5) durch

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{\frac{H_0}{H}} \quad \ldots\ldots (9).$$

Im Falle einer horizontalen Röhre ($\cos\psi = 0$) wird Gl. (8) identisch; nach Gl. (7) ist dann aber

$$\lambda\frac{ds}{d} = \frac{RT}{2}\frac{dH}{H^2} - \frac{dH}{H}$$

$$\lambda\frac{s}{d} = \frac{RT}{2H_0}\left(1-\frac{H_0}{H}\right) - ln\frac{H}{H_0} \quad \ldots\ldots (10),$$

wie auch aus Gl. (6) mit $n = 1$ (entsprechend $T = T_0$ nach Gl. 1) hervorgeht.

Uebrigens gestattet Gl. (8) meistens eine Vereinfachung mit Rücksicht darauf, dass $\frac{2d\cos\psi}{\lambda RT}$ ein sehr kleiner Bruch ist, z. B. $= \frac{d\cos\psi}{132,3}$ für $\lambda = 0{,}03$, $R = 29{,}4$, $T = 300$. Bei Vernachlässigung desselben ergiebt sich

$$\frac{2s\cos\psi}{RT} = ln\frac{1-\frac{d\cos\psi}{\lambda H}}{1-\frac{d\cos\psi}{\lambda H_0}} \quad \ldots\ldots (11),$$

oder auch mit $x = \frac{2s\cos\psi}{RT}$

$$\frac{1-\frac{d\cos\psi}{\lambda H}}{1-\frac{d\cos\psi}{\lambda H_0}} = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots$$

Sofern aber auch x ein sehr kleiner Bruch, z. B. für atmosphärische Luft mit $R = 29{,}4$, $T = 300$ schon dann $< 0{,}01$ ist, wenn nur $s\cos\psi$, d. h.

der Höhenunterschied beider Enden der betrachteten Rohrstrecke < 41,1 Mtr. ist, kann $e^x = 1 + x$ gesetzt und somit aus obiger Gleichung weiter gefolgert werden:

$$1 - \frac{d \cos \psi}{\lambda H} = 1 - \frac{d \cos \psi}{\lambda H_0} + \frac{2s \cos \psi}{RT}\left(1 - \frac{d \cos \psi}{\lambda H_0}\right)$$

$$\frac{d}{\lambda}\left(\frac{1}{H_0} - \frac{1}{H}\right) = \frac{2s}{RT}\left(1 - \frac{d \cos \psi}{\lambda H_0}\right)$$

$$1 - \frac{H_0}{H} = \frac{2s}{RT}\left(\lambda \frac{H_0}{d} - \cos \psi\right)$$

oder endlich, wenn

$$h = - s \cos \psi$$

die (positive oder negative) Ansteigung der Röhre für die Länge s bedeutet,

$$\frac{H_0}{H} = 1 - \frac{2}{RT}\left(\lambda \frac{s}{d} H_0 + h\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Sind die Geschwindigkeits- und Pressungsänderungen in der Röhre sehr klein (wie z. B. bei den Leitungen des Leuchtgases in Strassen und Gebäuden), so kann mit Rücksicht auf Gl. (9) aus Gl. (12) gefolgert werden:

$$\frac{p_0 - p}{p_0} = 1 - \sqrt{\frac{H_0}{H}} = \frac{1}{RT}\left(\lambda \frac{s}{d} H_0 + h\right) \quad \ldots\ldots (13).$$

§. 106. Bestimmung des Leitungswiderstandes.

Zur experimentellen Bestimmung des Coefficienten λ erscheint es am rathsamsten, eine möglichst lange horizontale Röhre zu verwenden, durch welche pro Sec. eine bekannte Luftmenge strömt, deren Temperatur von der äusseren Temperatur nur wenig verschieden ist, so dass die unter der Voraussetzung $T = Const.$ im vorigen §. entwickelten einfacheren Formeln Anwendung finden können; der dadurch begangene Fehler wird besonders dann sehr klein sein können, wenn die Temperatur im Inneren der Röhre etwas kleiner, als aussen ist und somit die bei wärmedichter Rohrwand streng genommen stattfindende kleine Temperaturabnahme durch eine mässige Wärmemittheilung von aussen compensirt wird. Wenn dann der innere Ueberdruck $= p_0 - p'$ und $= p - p'$, unter p' den gleichzeitig beobachteten äusseren Luftdruck verstanden, für die Enden einer langen

Rohrstrecke $= s$ durch daselbst angebrachte Manometer gemessen wird, so sind dadurch auch p_0 und p bekannt, wonach das Verhältniss $\frac{H_0}{H}$ aus Gl. (9) und λ aus Gl. (10) im vorigen §. gefunden werden kann, da u_0, folglich H_0 mit Rücksicht auf die bekannte Luftmenge G durch Gl. (4) im vorigen §. bestimmt ist.

Gewöhnlich wurde bisher die einfachste Formel (13) des vorigen §. zu Grunde gelegt, und ergab sich λ aus Versuchen von Pecqueur (nach Poncelet) $=$ 0,0237, von d'Aubuisson $=$ 0,0238, von Girard $=$ 0,0256, von Buff $=$ 0,0375.*

Spätere Versuche (1856) wurden von Weisbach in Verbindung mit seinen früher (§. 102) besprochenen Versuchen über den Ausfluss der Luft aus Mündungen und Mundstücken vermittels desselben Apparates und auf dieselbe Weise ausgeführt, indem statt der kurzen Mundstücke nur mehr oder weniger lange Röhren mit dem Versuchskessel verbunden wurden, nämlich

1) eine Glasröhre von 2,035 Mtr. Länge und 10,65 Millim. Weite,
2) eine Messingröhre von 2 Mtr. Länge und 10,38 Millim. Weite,
3) eine Glasröhre von 1,706 Mtr. Länge und 14,30 Millim. Weite,
4) eine Messingröhre von 2,981 Mtr. Länge und 14,34 Millim. Weite,
5) eine Zinkröhre von 10,16 Mtr. Länge und 24,95 Millim. Weite.

Die hier angegebenen Weiten $= d'$ sind mit Rücksicht auf kleine Abweichungen von der genauen cylindrischen Form (bei übrigens möglichst glatten inneren Oberflächen) als mittlere Weiten zu verstehen, welche durch Bestimmung des die Röhre anfüllenden Wasservolumens ermittelt wurden und von den Mündungsweiten $= d$ (gebildet durch je ein kurzes cylindrisches Ausmündungsstück) zwar möglichst wenig, doch immer etwas verschieden waren. Die Verbindung mit dem Kessel wurde durch ein kurzes Einmündungsstück vermittelt, und zwar bei den Röhren unter 1 bis 3), die vertical stehend auf den Kessel gesetzt wurden, durch eine kurze cylindrische Röhre mit abgerundeter innerer Kante, bei den in horizontaler Lage verwendeten längeren Röhren unter 4) und 5) dagegen durch ein solches cylindrisches kurzes Rohrstück nebst einer Kropfröhre von 90° Ablenkungswinkel.

Auf die in §. 102 angegebene Weise wurden nun bei verschiedenen Anfangspressungen der Luft im Kessel die Ausflusscoefficienten $= \mu$ für die ganze Rohrverbindung, sowie auch $= \mu_0$ für das (ohne eingeschaltete

* Weisbach, Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, Bd. I, 4te Aufl., S. 915

Röhre) unmittelbar mit dem Ausmündungsstück verbundene Einmündungsstück ermittelt. Aus diesen Coefficienten μ und μ_0, die Weisbach als identisch mit den betreffenden Geschwindigkeitscoefficienten φ und φ_0 betrachtete, leitete er die Widerstandscoefficienten

$$\zeta = \frac{1}{\mu^2} - 1\,; \quad \zeta_0 = \frac{1}{\mu_0^2} - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ab, daraus den Widerstandscoefficienten der eingeschalteten Röhre, bezogen (wie ζ und ζ_0) auf die Geschwindigkeit in der Mündung $= \zeta - \zeta_0$, bezogen dagegen auf die mittlere Geschwindigkeit in der Röhre

$$= (\zeta - \zeta_0)\left(\frac{d'}{d}\right)^4, \text{ welcher } = \lambda\,\frac{l}{d'}$$

gesetzt den Coefficienten λ lieferte. Indem endlich Weisbach sich den weiteren Fehler gestattete, dass er zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit $= u'$ in der Röhre mit Rücksicht auf die bekannte pro Sec. ausfliessende Luftmenge die Dichtigkeit dieser Luft in der Röhre derjenigen der äusseren Luft gleich setzte, fand er die folgenden (hier nur abgekürzt wiedergegebenen) Werthe von u' und λ.

1) Glasröhre von 10,65 Millim. Weite.

u' =	30,2	47,2	96,2	140,1 Mtr.
λ =	0,0328	0,0284	0,0207	0,0166

2) Messingröhre von 10,38 Millim. Weite.

u' =	34,1	51,1	93,6	148,7 Mtr.
λ =	0,0271	0,0230	0,0195	0,0152

3) Glasröhre von 14,30 Millim. Weite.

u' =	45,8	110,7	185,0 Mtr.
λ =	0,0256	0,0191	0,0139

4) Messingröhre von 14,34 Millim. Weite.

u' =	34,4	100,3	151,3 Mtr.
λ =	0,0273	0,0149	0,0117

5) Zinkröhre von 24,95 Millim. Weite.

u' =	26,8	63,7	87,1	108,2 Mtr.
λ =	0,0233	0,0179	0,0155	0,0137

Ohne Weiteres erkennt man hieraus eine wesentliche Abnahme von λ mit wachsender Geschwindigkeit; dass aber auch λ mit wachsender Rohrweite abnimmt, analog der für die Bewegung des Wassers in Röhren früher aufgestellten Gleichung

$$\lambda = \alpha + \frac{\beta}{ud} \quad (\S. 90, \text{Gl. } 7),$$

wird am deutlichsten, wenn aus obigen Zahlen durch Interpolation die Werthe von λ für gleiche Werthe von u' berechnet und dabei von den Werthen für die fast gleich weiten Röhren 1) und 2), sowie 3) und 4) die Mittel genommen werden; so man findet z. B.

	für $d' =$	10,51	14,32	24,95
und $u' = 30$:	$\lambda =$	0,0305	0,0276	0,0228
$u' = 70$:	$\lambda =$	0,0231	0,0219	0,0173
$u' = 110$:	$\lambda =$	0,0188	0,0167	0,0136

Die Art, wie Weisbach diese Werthe von λ aus seinen Versuchen abgeleitet hat, ist freilich in mehrfacher Hinsicht mangelhaft. Die Mängel seiner Berechnungsweise der Ausflusscoefficienten μ, μ_0 wurden in §. 102 besprochen, auch sind die nach Gl. (1) vorausgesetzten Beziehungen zwischen diesen Coefficienten und den Widerstandscoefficienten ζ, ζ_0 früheren Erörterungen zufolge ungenau, und endlich wurde auf die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten $= u_0$ und u im Anfangs- und Endquerschnitte der Röhre nicht die gebührende Rücksicht genommen. Diese Verschiedenheit konnte bei den längeren Röhren und den grösseren Geschwindigkeiten in der That sehr bedeutend sein; wenn z. B. der für die Zinkröhre bei u $= 108,2$ Mtr. oben angeführte Werth $\lambda = 0,0137$ als vorläufiger Näherungswerth zu Grunde gelegt und jene Geschwindigkeit von 108,2 Mtr. als diejenige am Ende der Röhre angenommen wird, weil hier mit dem geringsten Fehler die Dichtigkeit der Luft derjenigen der äusseren Luft gleich gesetzt werden konnte, so ergiebt sich aus Gl. (12) im vorigen §. mit $T = 280$ (nothwendig etwas kleiner, als die äussere Lufttemperatur, die bei dem betreffenden Versuch $= 273 + 20 = 293$ war) und $h = H$ das Verhaltniss der Geschwindigkeitshöhen am Ende und am Anfang der Rohre

$$\frac{H}{H_0} = 1 + \frac{2}{RT} \lambda \frac{s}{d} . H =$$

$$= 1 + \frac{2}{29{,}4 \,.\, 280} . 0{,}0137 . \frac{10{,}16}{0{,}02495} . \frac{(108{,}2)^2}{2 \,.\, 9{,}81} = 1{,}...$$

Behufs einer correcteren Verwerthung der Weisbach'schen Versuche kann man zunächst nach dem in §. 103 benutzten Verfahren die Coefficienten μ, φ, ζ für die vollständige Ausflussröhre sowie die entsprechenden μ_0, φ_0, ζ_0 für das aus dem Ein- und Ausmündungsstück ohne eingeschaltete Röhre zusammengesetzte Mundstück berechnen. Die Wider-

standscoefficienten ζ und ζ_0 beziehen sich auf die Mündung, also auf einen Querschnitt vom Durchmesser d, der indessen vom Rohrquerschnitte mit dem Durchmesser d' so wenig verschieden ist, dass ohne in Betracht kommenden Fehler die Geschwindigkeit im Endquerschnitte der Röhre selbst $= \left(\frac{d}{d'}\right)^2$ mal der Ausflussgeschwindigkeit gesetzt werden kann, so dass dann die auf jenen Endquerschnitt der Röhre bezogenen (den Quadraten der betreffenden Geschwindigkeiten umgekehrt proportionalen) Widerstandscoefficienten

$$\zeta' = \zeta\left(\frac{d'}{d}\right)^4; \quad \zeta_0' = \zeta_0\left(\frac{d'}{d}\right)^4 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

sind. Die weitere Rechnung bezieht sich nur auf den Fall, dass zwischen das Ein- und Ausmündungsstück die Röhre von der Länge l und Weite d' eingeschaltet ist, und zwar ist zunächst für ihren Endquerschnitt die Geschwindigkeitshöhe $= H$ (entsprechend der Ausflussgeschwindigkeitshöhe $= H\left(\frac{d'}{d}\right)^4$) und die absolute Temperatur $= T$ im Mittel während des Ausflusses zu berechnen. Sind zu dem Ende, wie in §. 103, die Pressung und die absolute Temperatur im Kessel vor dem Ausflusse $= p_0$ und T_0, unmittelbar nach demselben $= p_1$ und T_1, nach erfolgter Temperaturausgleichung $= p_2$ und T_0, ist also T_0 auch die äussere Temperatur, dagegen p die äussere Pressung, ferner $x_0 = \frac{p_0}{p}$, $x_1 = \frac{p_1}{p}$, $x_2 = \frac{p_2}{p}$, so ist **während** des Ausflusses das mittlere Verhältniss der äusseren zur inneren Pressung

$$= \frac{2p}{p_0 + p_1} = \frac{2}{x_0 + x_1}$$

und die mittlere Temperatur im Kessel

$$= \frac{T_0 + T_1}{2} = \frac{T_0}{2}\left(1 + \frac{p_1}{p_2}\right) = T_0\frac{x_1 + x_2}{2x_2}$$

zu setzen. Mit der Bezeichnung $q = \left(\frac{2}{x_0 + x_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$ ist also nach §. 100, Gl. (4) und (5)

$$H\left(\frac{d'}{d}\right)^4 = \varphi^2\frac{n}{n-1}RT_0\frac{x_1 + x_2}{2x_2}(1 - q) \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

$$T = T_0\frac{x_1 + x_2}{2x_2}[1 - \varphi^2(1 - q)] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Um jetzt unter der angenäherten Voraussetzung, dass diese Temperatur gleichmässig in der ganzen Röhre herrscht (was in der That nur wenig fehlerhaft sein wird, da $T < T_0$ ist und somit ein mässiges Eindringen äusserer Wärme durch die Rohrwand stattfinden muss), auch die mittlere Geschwindigkeitshöhe $= H_0$ für ihren Anfangsquerschnitt zu finden, hat man ihre Widerstandshöhe (= der gesammten Widerstandshöhe resp. Widerstandsarbeit pro 1 Kgr. minus derjenigen, welche durch das Ein- und Ausmündungsstück verursacht wird)

$$B = \zeta' H - \zeta_0' H_0.$$

Andererseits ist aber auch, wenn y die Geschwindigkeitshöhe in einem beliebigen Querschnitte der Röhre bedeutet, mit Rücksicht auf §. 105, Gl. 7

$$B = \int \lambda \frac{ds}{d'} y = \int_{H_0}^{H} \left(\frac{RT}{2y} - 1\right) dy = \frac{RT}{2} \ln \frac{H}{H_0} - (H - H_0),$$

und die Gleichsetzung beider Ausdrücke von B liefert die Gleichung

$$\frac{RT}{2H} \ln \frac{H}{H_0} + (1 + \zeta_0') \frac{H_0}{H} = 1 + \zeta' \quad \ldots\ldots\ldots 5.$$

wodurch das Verhältniss $\frac{H}{H_0}$, folglich auch H_0 bestimmt ist. Endlich ist nach §. 105, Gl. (10)

$$\lambda = \frac{d'}{l} \left[\frac{RT}{2H}\left(\frac{H}{H_0} - 1\right) - \ln \frac{H}{H_0}\right] \quad \ldots\ldots\ldots 6.$$

und zwar kann dieser Werth von λ als entsprechend betrachtet werden der mittleren Geschwindigkeit

$$u' = \sqrt{g(H_0 + H)} \quad \ldots\ldots\ldots 7.$$

Auf diese Weise ergeben sich mit Hülfe der **Weisbach**'schen Versuchswerthe von t (Ausflusszeit in Secunden), T_0, x_0, x_1, x_2 für die oben unter 5) genannte Zinkröhre von

$l = 10{,}16$ Mtr. Länge,
$d' = 0{,}02495$ Mtr. mittlerer Weite
und $d = 0{,}02441$ Mtr. Mündungsweite

die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe von μ, φ, ζ und zwar beziehen sich die Zahlen in der ersten Horizontalreihe auf die dabei benutzte Kropfröhre mit Ein- und Ausmündungsstück allein, so dass die ersten Zahlen in den mit μ, φ, ζ bezeichneten Columnen die Werthe der oben mit μ_0, φ_0, ζ_0 bezeichneten Coefficienten sind.

t	T_0	x_0	x_1	x_2	μ	φ	ζ
40	288	2,0808	1,1832	1,2915	0,6599	0,7100	1,0565
„	287	1,1360	1,0083	1,0239	0,3046	0,3100	9,4958
50	291,5	1,4639	1,0850	1,1306	0,3339	0,3556	7,1511
„	292,9	1,6980	1,1816	1,2422	0,3520	0,3858	6,0279
„	293	1,9320	1,2898	1,3660	0,3678	0,4132	5,2031

Wären auch mit der Kropfröhre nebst Ein- und Ausmündungsstück (ohne die eingeschaltete Zinkröhre) mehrere Versuche bei verschiedenen Anfangspressungen im Kessel angestellt worden, so würden sich die entsprechenden Widerstandscoefficienten ζ_0 voraussichtlich etwas verschieden ergeben haben; in Ermangelung anderweitiger Anhaltspunkte müssen indessen hier die 4 Versuche mit der Zinkröhre bei Voraussetzung eines constanten Coefficienten $\zeta_0 = 1,0565$ berechnet werden, und findet man dann nach obigen Gleichungen (3) bis (7) die folgenden Werthe von T, H, $\frac{H}{H_0}$, λ, u':

T	H	$\frac{H}{H_0}$	λ	u'	(λ)
284,26	50,88	1,1219	0,02430	30,7	0,02429
283,16	227,90	1,4968	0,02129	61,1	0,02116
281,48	396,24	1,8482	0,02024	77,4	0,02031
278,52	583,18	2,2606	0,01973	90,8	0,01979

Diese Werthe von λ und u' sind von den oben angeführten nach Weisbach's Rechnungen erheblich verschieden; sie können recht gut in der Formel

$$\lambda = 0,01355 + \frac{0,0595}{\sqrt{u'}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

zusammengefasst werden, wie die danach berechneten in der letzten Columne unter (λ) eingetragenen Zahlen erkennen lassen. —

Wenn man, unter u die mittlere Geschwindigkeit in der Röhre verstanden, allgemein

$$\lambda = \alpha + \frac{\beta}{\sqrt{u}}$$

setzt, so würden, wenn auch die Weisbach'schen Versuche mit den zweierlei Glas- und Messingröhren in derselben Weise wie hier die Versuche mit der Zinkröhre berechnet würden, für die Coefficienten α und β

ohne Zweifel andere, besonders mit der Rohrweite d variirende Zahlenwerthe gefunden werden. Wenn man aber analog dem Gesetze der Bewegung des Wassers in Röhren diese Abhängigkeit von d nur bei dem Coefficienten β voraussetzt und somit die Formel

$$\lambda = 0{,}01355 + \frac{\beta}{\sqrt{u}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 9)$$

zu Grunde legt, so kann zu einer vorläufig angenäherten Bestimmung von β als Function von d die Annahme dienen, dass die richtiger berechneten Werthe von λ bei gleichen Werthen von u wenigstens dieselben Verhältnisse zu einander behalten wie nach der Weisbach'schen Berechnungsweise, also

für $d = 0{,}01051 \quad 0{,}01432 \quad 0{,}02495$ Mtr.
und z. B. $u = 30$ die Verhältnisse 305 : 276 : 228
$u = 70$ „ „ 231 : 219 : 173
$u = 110$ „ „ 188 : 167 : 136

entsprechend den obigen Folgerungen aus den Weisbach'schen Resultaten. Auf diese Weise und auf Grund von Gl. (8) für $d = 0{,}02495$ Mtr. findet man die in folgender Zusammenstellung enthaltenen Werthe von λ, endlich damit nach Gl. (9) die gleichfalls angeführten Werthe von β.

	λ			β		
$d =$	0,01051	0,01432	0,02495	0,01051	0,01432	0,02495
$u = 30$	0,03265	0,02955	0,02441	0,1046	0,0876	0,0595
$u = 70$	0,02759	0,02615	0,02066	0,1175	0,1054	0,0595
$u = 110$	0,02657	0,02360	0,01922	0,1366	0,1054	0,0595

Die Mittelwerthe von β, nämlich

$\beta = 0{,}1196 \quad 0{,}0995 \quad 0{,}0595$
für $d = 0{,}01051 \quad 0{,}01432 \quad 0{,}02495$ Mtr.

können mit ziemlicher Annäherung durch die Formel

$$\beta = \frac{0{,}001235 - 0{,}01\,d}{d}$$

ausgedruckt, und mag somit vorläufig gesetzt werden:

$$\lambda = 0{,}01355 + \frac{0{,}001235 - 0{,}01\,d}{d\sqrt{u}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

Eine genauere Bestimmung von λ vermittels der Weisbach'schen Versuche wird übrigens durch den Umstand erschwert, dass bei manch-

derselben die Geschwindigkeit am Anfang und am Ende der Röhre schon allzu verschieden war, um, nachdem sich λ als wesentlich abhängig von u ergeben hat, die den Formeln des vorigen §. zu Grunde liegende Voraussetzung eines constanten Werthes von λ noch als hinlänglich zutreffend erscheinen zu lassen. Bei dem letzten der hier berechneten 4 Versuche mit der Zinkröhre z. B. änderte sich vom Anfang bis zum Ende derselben die Geschwindigkeitshöhe von 257,98 bis 583,18, also die Geschwindigkeit von 71,14 bis 106,97 und nach Gl. (8) somit λ von 0,0206 bis 0,0193. Die Berücksichtigung dieser Verschiedenheiten würde aber die an sich schon sehr zeitraubenden Rechnungen zu rationeller Verwerthung der Weisbach'schen Versuche noch wesentlich erschwert haben.

§. 107. Beispiele.

1) Windleitungen von grosser Länge spielen u. A. bei Tunnelarbeiten eine wesentliche Rolle zur Ventilation und namentlich zum Betriebe der Steinbohrmaschinen mit comprimirter Luft. Dabei ist es von Interesse, im Voraus den Druckverlust beurtheilen zu können, der unter gegebenen Umständen durch die Leitung verursacht werden, und somit den Ueberdruck, der zum Betriebe der Bohrmaschinen verwendbar bleiben wird.

Beispielsweise sei von einem Orte A_0 im Thalgrunde nahe der Tunnelmündung pro Sec. 1 Kgr. Luft, welche am Orte A_0 auf das 6fache des dortigen Luftdrucks comprimirt wird, durch eine im Ganzen $l =$ 5000 Mtr. lange Röhrenfahrt an den Arbeitsort A im Tunnel zu leiten; die Ansteigung derselben betrage $h = 150$ Mtr., wovon etwa $^3/_4$ auf die aussen am Bergabhange bis zur Tunnelmündung reichende Röhrenstrecke, $^1/_4$ auf die im Tunnel selbst liegende Hauptstrecke komme. Am Orte A_0 sei der mittlere Barometerstand $= 0{,}7$ Mtr., die mittlere Lufttemperatur $= 7^0$ C., während die mittlere Temperatur im Tunnel zu 27^0 angenommen werde. Der Ueberdruck der comprimirten Luft am Anfange der Leitung entspricht dann einer Quecksilbersäule von $5 \,.\, 0{,}7 = 3{,}5$ Mtr., und es soll die Weite d der Leitung so gewählt werden, dass nur etwa 10% dieses Ueberdrucks durch die Leitung verloren gehen, also bei A ein Ueberdruck von etwa 3,15 Mtr. Quecksilbersäule zum Betriebe der Bohrmaschinen verwendbar bleibt.

Wenn die Compression der Luft auf die 6fache Pressung durch die

betreffenden Compressionsmaschinen unter solchen Umständen erfolgt, dass nicht etwa schon während dieses Vorganges eine merkliche Wärmeentziehung stattfindet, so erhöht sich dabei ihre absolute Temperatur (nach §. 20 mit $n = 1{,}41$, also $\frac{n-1}{n} = 0{,}2908$) von $273 + 7 = 280$ auf

$$280 \, . \, 6^{\frac{n-1}{n}} = 471{,}5.^*$$

Indem aber zur Ermöglichung eines dauernden Betriebes der Compressionsmaschinen trotz veränderlichen Verbrauches der comprimirten Luft dieselbe zunächst in einen Windkessel von grossen Dimensionen und entsprechend bedeutender Abkühlung geleitet werden soll, mag mit Rücksicht auf letztere und auf die weitere Abkühlung besonders in der bis zur Tunnelmündung reichenden, von nur 7° warmer Luft umgebenen Rohrstrecke die mittlere Temperatur in der ganzen Röhrenleitung = 27° wie die der äusseren Luft im Tunnel, also T constant = 300 angenommen werden. Dann ist, da die Anfangspressung der Luft in der Leitung:

$$p_0 = 10333 \frac{4{,}2}{0{,}76} = 57103 \text{ Kgr. pro Quadratm.}$$

---

* Um 1 Kgr. Luft vom Zustande p_0, v_0 ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme bis zur Pressung p zu comprimiren und aus dem Raum von der Pressung p_0, worin sie das Volumen v_0 hatte, mit dem entsprechend verkleinerten Volumen v in einen Raum von der Pressung p zu versetzen, ist die Arbeit

$$= \frac{p_0 v_0}{n-1}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right] + pv - p_0 v_0$$

oder wegen

$$pv - p_0 v_0 = p_0 v_0 \left[\frac{p}{p_0}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right] = p_0 v_0 \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right]$$

$$\text{eine Arbeit} = \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right],$$

hier also mit $n = 1{,}41$, $\frac{p}{p_0} = 6$, $p_0 v_0 = RT_0 = 29{,}4 \, . \, 280$ eine Arbeit

$$= \frac{29{,}4}{0{,}2908}(471{,}5 - 280) = 19357 \text{ Kgmtr. pro Sec oder}$$

$$= \frac{19357}{75} = 258 \text{ Pferdestärken}$$

erforderlich; entsprechend weniger, wenn schon während der Compression Wärme abgegeben wird.

ist ihr specifisches Volumen daselbst:

$$v_0 = \frac{RT}{p_0} = \frac{29,4 \,.\, 300}{57103} = 0,15446$$

und, wenn versuchsweise die Rohrweite zu

$$d = 0,2 \text{ Mtr., also } F = \frac{\pi d^2}{4} = 0,031416$$

angenommen wird, die Anfangsgeschwindigkeit und entsprechende Geschwindigkeitshöhe:

$$u_0 = \frac{v_0}{F} = 4,9166\,; \quad H_0 = \frac{u_0^{\,2}}{2 \,.\, 9,81} = 1,2321 \text{ Mtr.}$$

Dieser Geschwindigkeit u_0 und $d = 0,2$ entspricht nach Gl. (10) im vorigen §.

$$\lambda = 0,02084, \text{ wonach } \lambda = 0,0205$$

als jedenfalls ausreichender Mittelwerth angenommen werde, da die Geschwindigkeit gegen das Ende der Röhre hin wächst. Für die Geschwindigkeitshöhe H am Ende hat man dann nach §. 105, Gl. (12)

$$\frac{H_0}{H} = 1 - \frac{2}{29,4 \,.\, 300}\left(0,0205 \,.\, \frac{5000}{0,2} \,.\, 1,2321 + 150\right) = 0,8228$$

und nach Gl. (9) für die Pressung p:

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{\frac{H_0}{H}} = 0,9071,$$

so dass dieselbe einer Quecksilbersäule

$$= 0,9071 \,.\, 4,2 = 3,810 \text{ Mtr.}$$

entspricht. Weil aber mit der Ansteigung um 150 Mtr. auch der äussere Luftdruck abnimmt, und zwar, da das specifische Gewicht der betreffenden Luftschicht (bei nahe 0,7 Mtr. Barometerstand und 285° absoluter Temperatur)

$$= 10333 \,.\, \frac{0,7}{0,76} : 29,4 \,.\, 285 = 1,1358$$

gesetzt werden kann, um

$$\frac{150 \,.\, 1,1358}{13596} = 0,013 \text{ Mtr.}$$

Quecksilbersäulenhöhe, so würde bei $d = 0,2$ Mtr. Weite am Ende der Röhrenleitung auf einen mittleren Manometerstand

$$= 3,810 - 0,687 = 3,123 \text{ Mtr.}$$

zu rechnen sein, entsprechend einem Ueberdruck

$$= 3{,}123 . 13596 = 42460 \text{ Kgr. pro Quadratm.},$$

jene angenommene Rohrweite folglich der gestellten Forderung beinahe entsprechen. —

2) Als Beispiel des Falles, dass die Geschwindigkeits- und Pressungsänderungen in der Röhre klein genug sind, um letztere ohne wesentlichen Fehler nach der einfachen Gleichung (13) in §. 105 berechnen zu können, ist besonders die Leitung des Leuchtgases in den Strassen von Städten und in Gebäuden bemerkenswerth. Nach jener Gleichung ist, wenn $R = \frac{R'}{\delta}$ (siehe §. 17, Gl. 5) gesetzt wird, unter δ die Dichtigkeit des Gases in Beziehung auf atmosphärische Luft und unter $R' = 29{,}27$ den Werth der fraglichen Constanten für letztere verstanden,

$$p_0 - p = \Delta p = \frac{p_0 \delta}{R' T}\left(\lambda \frac{s}{d} H_0 + h\right)$$

= dem Druckverlust für die um h Mtr. ansteigende Strecke $= s$ einer Röhre von d Mtr. Weite. Dabei können die Pressungen (Kgr. pro Quadratm.) auch als die denselben entsprechenden Wassersäulen in Millimetern ausgedrückt verstanden werden, da eine Wasserschicht von 1 Quadratm. Fläche und 1 Millim. Dicke 1 Kgr. wiegt. Auch ist die Pressung hier so wenig veränderlich und so wenig (um höchstens etwa 50 Millim. Wassersäule) grösser, als der äussere Luftdruck, dass für p_0 im Ausdrucke von Δp die mittlere Pressung p in der Röhre gesetzt und diese ohne wesentlichen Fehler der atmosphärischen Pressung gleich gesetzt werden kann. Ebenso ist die Temperatur des Gases der äusseren Lufttemperatur gleich zu setzen, und somit die der Ansteigung um h Mtr. entsprechende Abnahme des Luftdrucks

$$\Delta p' = \frac{p}{R' T} h,$$

$$\Delta (p - p') = b = \frac{p}{R' T}\left[\delta \lambda \frac{s}{d} H_0 - (1 - \delta) h\right].$$

Ebenso wie die Pressung p kann auch die Geschwindigkeitshöhe H in dieser Gleichung als Mittelwerth verstanden, also

$$H_0 = \frac{1}{2g}\left(\frac{4V}{\pi d^2}\right)^2$$

gesetzt werden, wenn V das pro Sec. durch die Röhre strömende Gasvolumen bedeutet, bei dessen Messung und Preisberechnung ja auch von Variationen des Wärmezustandes abstrahirt wird. Dadurch wird

$$b = m\frac{V^2 s}{d^5} - nh \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\text{mit } m = \frac{p}{R'T}\frac{\delta\lambda}{2g}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \text{ und } n = \frac{p}{R'T}(1-\delta).$$

In runder Zahl mag

$$n = 1{,}25(1-\delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

gesetzt werden, mit $p = 10333$ entsprechend

$$T = \frac{10333}{1{,}25 \,.\, 29{,}27} = 282{,}4.$$

Was m betrifft, so würde die Substitution von $g = 9{,}81$ in obigem Ausdrucke dieses Coefficienten voraussetzen, dass d ebenso wie s in Metern, V in Cubikmetern pro Sec. ausgedrückt wird; wenn aber, wie hier vorausgesetzt werden soll, d die Rohrweite in Millimetern und V das Gasvolumen in Cubikm. pro Stunde bedeutet, ist mit $\frac{p}{R'T} = 1{,}25$ zu setzen:

$$m = \frac{10^{15} . 1{,}25}{3600 \,.\, 3600} \cdot \frac{\delta\lambda}{2 \,.\, 9{,}81}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 7969400\,\delta\lambda \quad \ldots\ldots (3).$$

Die Dichtigkeit δ, sehr verschieden je nach der Kohlensorte und dem Stadium des Destillationsprocesses, kann im Mittel zu 0,4 angenommen werden.

Die Gleichung (1) setzt nun aber voraus, dass durch alle Querschnitte der Röhre dieselbe Gasmenge strömt, während bei städtischen Strassenleitungen, wenn auch zunächst jene Gleichung nur auf eine solche Strecke derselben bezogen wird, auf welcher eine Verzweigung nach Seitenstrassen hin nicht stattfindet, doch die einzelnen Hausleitungen und die Strassenlaternen eine successive Gasentziehung bedingen. Wird dann letztere als stetig und gleichförmig längs der ganzen Länge l der fraglichen Rohrstrecke betrachtet der Art, dass V_0, V und $V_1 = \alpha V_0$ die stündlichen Durchflussmengen am Anfange, in der Entfernung s davon und am Ende sind, so ist nach Gl. (1) der Verlust an Ueberdruck in Millim. Wassersäule für ein um dh Mtr. ansteigendes Längenelement ds der Röhre

$$db = m\frac{V^2}{d^5}ds - n\,dh,$$

also der Verlust an Ueberdruck für die ganze, l Mtr. lange und h Mtr. ansteigende, Rohrstrecke wegen

$$\frac{V_0 - V}{(1-\alpha)V_0} = \frac{s}{l};\ V = V_0\left(1 - \frac{1-\alpha}{l}s\right)$$

$$b = m\frac{V_0^2}{d^5}\int_0^l\left[1 - 2\frac{1-\alpha}{l}s + \frac{(1-\alpha)^2}{l^2}s^2\right]ds - nh =$$

$$= m\frac{lV_0^2}{d^5}\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3} - nh$$

analog §. 95, Gl. (11). Indessen mag kürzer geschrieben werden:

$$b = m\frac{lV^2}{d^5} - nh \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

unter V jetzt ein mittleres Gasvolumen verstanden, entsprechend der Gleichung:

$$V = V_0\sqrt{\frac{1+\alpha+\alpha^2}{3}} = \sqrt{\frac{V_0^2 + V_0V_1 + V_1^2}{3}} \ldots (5).$$

Der Werth des Coefficienten m, der nach Gl. (3) proportional λ ist, wird hier am besten aus den mit Leuchtgasleitungen selbst gemachten Erfahrungen abgeleitet. Auf Grund derselben berechnet z. B. die deutsche Continental-Gasgesellschaft in Dessau unter der Voraussetzung $h = 0$ ihre Rohrdimensionen nach der Formel*

$$V = 3700d^2\sqrt{\frac{bd}{l}},\ \text{also}\ b = \left(\frac{1}{3700}\right)^2\frac{lV^2}{d^5},$$

wobei V in Cubikfussen pro Stunde, l in Fussen, b und d in Zollen englischen Maasses ausgedrückt sind und die Annahme $\delta = 0{,}4$ zu Grunde liegt. Für die hier vorausgesetzten Einheiten ergiebt sich

$$b = 80238\frac{lV^2}{d^5},$$

entsprechend nach Gl. (3) mit $\delta = 0{,}4$

$$\lambda = \frac{80238}{0{,}4 \,.\, 7969400} = 0{,}0252.$$

Bezeichnet B_0 den Ueberdruck (in Millimetern Wassersäule) am Anfange der ganzen Leitung, d. h. im Gasometer der Gasfabrik, so ist derselbe an irgend einer um h Mtr. höher gelegenen Stelle nach Gl. (4)

---

* Nach Mittheilungen des General-Directors jener Gesellschaft für „Des Ingenieurs Taschenbuch", herausgegeben von dem Verein „Hütte", 9 Aufl. S. 573.

$$B = B_0 + nh - m\Sigma\frac{lV^2}{d^5} \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

wobei das Summenzeichen sich auf alle Rohrstrecken bezieht, welche bis zu der fraglichen Stelle vom Gase durchströmt werden, und wobei h negativ zu setzen ist für solche Stellen, die etwa tiefer liegen, als die Gasfabrik. Der kleinste Werth von B (bei unebenem Terrain nicht nothwendig in der grössten Entfernung vom Anfange der Leitung stattfindend) muss noch ausreichend sein, um nach Abzug des Druckverlustes durch die Gasuhr und durch die Hausleitung die nöthige Höhe und Lichtstärke der Flammen bei den am niedrigsten gelegenen Brennern zu vermitteln (in den oberen Stockwerken der Häuser nimmt B wegen des wachsenden Werthes von h mehr zu, als wegen des Leitungswiderstandes ab). Dieser kleinste zulässige Werth von B (etwa = 15 bis 20 Millim.) sei allgemein mit B_1 bezeichnet; obschon bei mehr als nöthigem Druck in der Leitung durch entsprechende Stellung des Hahns vor dem Brenner die Flammenhöhe regulirt werden kann, soll doch das erforderliche Minimum von B möglichst wenig überschritten werden mit Rücksicht auf die mit dem Ueberdruck wachsenden Gasverluste durch Undichtigkeiten der Röhrenleitung. Der Bedingung

$$min. B = B_1 \; (= 15\text{—}20 \text{ Millim.})$$

wird durch einen um so kleineren Werth von B_0 entsprochen, je mehr von der Gasfabrik aus die Leitung ansteigt, weshalb es bei unebenem Terrain vortheilhaft ist, die Fabrik an einem tief gelegenen Orte anzulegen.

Wenn für den Ueberdruck B_0 im Gasometer ein den Umständen entsprechender Werth angenommen wird (etwa = 30 bis 50 Millim.), so würde die Bestimmung der Weiten d der einzelnen Rohrstrecken bei gegebenen Werthen von h, l, V am rationellsten gemäss der Bedingung zu geschehen haben, dass die Anlagekosten der ganzen Rohrleitung möglichst klein werden, ähnlich wie es für eine städtische Wasserleitung in §. 97 erklärt wurde. Behufs einer ersten Annäherung könnte man den Druckverlust durch den Leitungswiderstand pro Längeneinheit der ganzen Leitung constant, also das letzte Glied im Ausdrucke von B (Gl. 6) proportional Σl, d. h. $\frac{V^2}{d^5}$ constant setzen. Doch wird es besser sein, für die bei den Gesammtkosten vorzugsweise in's Gewicht fallenden Hauptstrecken, den grösseren Werthen von V entsprechend, eine grössere Druckabnahme pro Längeneinheit zuzulassen, also eine grössere Geschwindigkeit, um die

Durchmesser kleiner wählen zu dürfen; wenn man dann etwa die Druckabnahme durch den Leitungswiderstand pro Längeneinheit proportional d, also das letzte Glied in Gl. (6) proportional $\Sigma l d$, somit

$$\frac{V^2}{d^6} = Const. = \frac{1}{C^6}; \quad d = C\sqrt[3]{V} \qquad (7)$$

setzt, so wird wegen

$$\frac{V^2}{d^5} = \frac{V^2}{d^6}d = \frac{1}{C^5}\sqrt[3]{V},$$

$$B = B_0 + nh - \frac{m}{C^5}\Sigma l\sqrt[3]{V} \qquad (8)$$

und ist dann die Constante C, mit welcher nach Gl. (7) jede einzelne Rohrweite berechnet werden kann, bestimmt durch die Bedingung: $min. B = B_1$. Dabei wird in der Regel die Stelle, wo B am kleinsten ist (vorbehaltlich nachträglicher Controle) mit genügender Annäherung nach Schätzung zu bestimmen sein (in grösster Entfernung von der Gasfabrik, falls nicht etwa auf dem Wege dahin wesentlich tiefer gelegene Terrainstrecken von der Gasleitung zu passiren sind); ist h_1 die (positive oder negative) Ansteigung der Leitung von der Gasfabrik bis zu jener Stelle, und bezeichnet Σ_1 die Summe der bis dahin vom Gase zu durchströmenden Rohrstrecken, so liefert die Bedingung: $min. B = B_1$ nach Gl. (8)

$$C = \left(\frac{m\Sigma_1 l\sqrt[3]{V}}{B_0 - B_1 + nh_1}\right)^{\frac{1}{5}} \qquad (9)$$

Wenn die hiermit nach Gl. (8) berechneten Werthe von B für gewisse Zweige des Röhrennetzes, die das Gas nach höher gelegenen Terrainstellen und weiterhin nicht wieder abwärts zu leiten haben, durchweg grösser als nöthig ausfallen sollten, so können die Weiten d derselben nachträglich entsprechend kleiner angenommen werden, als sie nach Gl. (7) sein müssten. —

Bei der Leitung des Leuchtgases in den Häusern (in der Regel durch schmiedeeiserne Röhren von $d = 10$ bis 50 Millim. Weite) pflegt verlangt zu werden, dass, wenn auch alle Flammen brennen, doch nur etwa 2 bis 2,5 Millim. Druck vom Gasmesser bis zu den entferntesten Brennern durch den Leitungswiderstand verloren gehen, damit die Oeffnung oder Schliessung einzelner Brenner durch Aenderung des Druckverlustes und somit des resultirenden Ueberdrucks (um einen entsprechenden aliquoten Theil jenes zugelassenen Maximums), keinen allzu störenden

Einfluss auf die Flammenhöhe der übrigen Brenner ausübe. Wird dann ferner, wie erfahrungsmässig üblich, pro Flamme ein stündlicher Consum von 0,14 Cubikm. (5 Cubikfuss engl.) gerechnet, und bedeutet n die Zahl der Flammen, welche von dem Gase, das eine Rohrstrecke von l Mtr. Länge und d Millim. Weite durchströmt, noch zu speisen sind, so ist die Bedingung zu erfüllen:

$$(0,14)^2 m \Sigma \frac{l n^2}{d^5} = 2 \text{ bis } 2,5,$$

wobei es aber zweckmässig ist, den besonderen Widerständen, welche durch die bei Hausleitungen zahlreicher vorkommenden Richtungsänderungen der Röhren verursacht werden, durch einen etwas grösseren Werth von λ, folglich m Rechnung zu tragen, indem etwa gesetzt wird:

$$1700 \Sigma \frac{l n^2}{d^5} = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

nach Gl. (3) mit $\delta = 0,4$ entsprechend:

$$\lambda = \frac{1700}{7969400 \cdot 0,4 \cdot (0,14)^2} = 0,0272.$$

Die Abstufung der Rohrweiten d ist von ihren gangbaren Werthen abhängig, und kann der Gebrauch von Gl. (10) wesentlich erleichtert werden durch eine Tabelle, welcher für gegebene Werthe von d und l oder n ohne Weiteres der Werth von n resp. l zu entnehmen ist, dem eine bestimmte Druckabnahme z. B. von 1 Millim. durch den Leitungswiderstand entsprechen würde.

Nach Versuchen von Blochmann über den Leitungswiderstand der Luft oder des Gases in schmiedeeisernen Röhren von solchen Durchmessern und bei solchen Geschwindigkeiten $= u$ Mtr. pro Sec., wie sie bei Hausleitungen vorkommen, würde übrigens der Coefficient λ in der Regel noch erheblich grösser sein, als oben in Uebereinstimmung mit anderweitigen Erfahrungen angenommen wurde. Aus jenen Versuchen* mit Röhren von 16,5 und 26 Millim. Weite bei $u = 0,17$ bis 4,2 Mtr. wurde nämlich die empirische Formel abgeleitet:

$$\lambda = 0,00911 + \frac{0,06379}{\sqrt{u}} \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

nicht sehr verschieden von der aus den Weisbach'schen Versuchen mit einer 25 Millim. weiten Zinkröhre bei viel grösseren Geschwindigkeiten abgeleiteten Formel (8) im vorigen §., und da in der That hier

* „Der Civilingenieur", Jahrgang 1861, S. 490.

$$u = \frac{0,14n}{3600} \frac{4}{\pi(0,001d)^2} = 49,5 \frac{n}{d^2}$$

in der Regel nicht viel > 1 ist, so wäre λ nicht viel $< 0,0729$. Sofern aber andererseits die Bedingung (10) als Norm für die Wahl der Rohrweiten d erfahrungsmässig bewährt ist, würde ihr nach den **Blochmann**'schen Versuchen thatsächlich nur ein grösserer Druckverlust als 2 Millim. im Maximum entsprechen.

Die geringere Dichtigkeit des Gases, als die der atmosphärischen Luft, verursacht stets eine Zunahme an Ueberdruck nach den oberen Stockwerken der Gebäude hin und macht daselbst bei gleicher Flammenhöhe und gleichen Brennern eine engere Stellung der Regulirungshähne vor denselben nöthig; nach Gl. (6) und (2) beträgt diese Zunahme (abgesehen von der Abnahme durch den Leitungswiderstand)

$$1,25(1-\delta)h = 0,75h \text{ Millim. bei } \delta = 0,4$$

für h Mtr. Höhe, für jedes Stockwerk etwa 2,5 Millim.

§. 108. Einfluss besonderer Widerstände.

Ausser dem durch den Coefficienten λ gemessenen, stetig längs der ganzen Leitung einwirkenden Widerstande können an gewissen Stellen derselben hier ebenso wie bei Wasserleitungen durch Richtungs- oder Querschnittsänderungen besondere Widerstände verursacht werden, die durch Widerstandscoefficienten ζ in üblicher Weise in Rechnung zu stellen sind. Weil aber die entsprechenden Widerstandshöhen als Bestandtheile der Glieder B in den Gleichungen, die durch Integration der allgemeinen Differentialgleichungen (1) und (2), §. 99, erhalten werden, zugleich von den Geschwindigkeiten abhängen, womit die Luft von den fraglichen Stellen abfliesst, und diese hier nicht wie bei tropfbaren Flüssigkeiten ohne Weiteres durch die betreffenden Querschnittsverhältnisse ausgedrückt werden können, sondern zugleich von dem veränderlichen specifischen Volumen abhängig sind, so macht die Berücksichtigung des Einflusses solcher besonderen Widerstände auf die Bewegung und Zustandsänderung der Luft längs der ganzen Leitung hier im Allgemeinen eine Zerlegung der letzteren in einzeln zu betrachtende Strecken nöthig. Von dem durch die Grössen

$$p_0 \quad v_0 \quad T_0 \quad u_0 \text{ resp. } H_0 = \frac{u_0^2}{2g}$$

Pressung, specif. Volumen, absol. Temperatur und Geschwindigkeit resp. Geschwindigkeitshöhe) charakterisirten Endzustande der Luft für eine solche Strecke ist dann infolge des an der Uebergangsstelle einwirkenden besonderen Widerstandes der durch die analogen Grössen

$$p \quad v \quad T \quad u \text{ resp. } H = \frac{u^2}{2g}$$

bestimmte Anfangszustand der folgenden Strecke verschieden, und es besteht die Aufgabe darin, letztere Grössen zu finden, wenn erstere und der Widerstandscoefficient ζ sowie auch das Querschnittsverhältniss $\frac{F}{F_0}$ beider Strecken resp. das Verhältniss des Anfangsquerschnitts der folgenden zum Endquerschnitte der vorhergehenden Strecke, das hier im Allgemeinen $\gtrless 1$ sei, gegeben sind.

Dazu können die Formeln in §. 101 dienen, indem darin hier nur F an die Stelle des dortigen Ausflussquerschnitts αA tritt und h (die Höhe des Schwerpunktes von F_0 über dem Schwerpunkte von F) = Null zu setzen ist. Nach Gl. (4) daselbst ist dann

$$(1 + \zeta)H = H_0 + \frac{m}{m-1} p_0 v_0 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right] \ldots\ldots (1),$$

nach Gl. (7):

$$\frac{v}{v_0} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und nach Gl. (8):

$$\frac{Fu}{v} = \frac{F_0 u_0}{v_0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Durch diese 4 Gleichungen sind p, v, T und $u = \sqrt{2gH}$ bestimmt, da der Ausflussexponent m nach Gl. (5) und (6) a. a. O.

$$m = n\frac{1 + \zeta}{1 + n\zeta} = n\frac{H - H_0 + \zeta H}{H - H_0 + n\zeta H} = n\frac{(1+\zeta)H - H_0}{(1 + n\zeta)H - H_0} \ldots (4),$$

$$m - 1 = (n-1)\frac{H - H_0}{(1 + n\zeta)H - H_0}$$

ist. Zur Ausführung der Rechnung kann nach Gl. (2) und (3)

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{v_0}{v} = \frac{F_0 u_0}{Fu} = \frac{F_0}{F}\sqrt{\frac{H_0}{H}} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

gesetzt und dadurch Gl. (1) mit Rücksicht auf den Ausdruck von m auf die Form gebracht werden:

$$(1+\zeta)H-H_0$$
$$=\frac{n}{n-1}\,\frac{(1+\zeta)H-H_0}{H-H_0}\,p_0v_0\left[1-\left(\frac{F_0}{F}\sqrt{\frac{H_0}{H}}\right)^{(n-1)\frac{H-H_0}{(1+n\zeta)H-H_0}}\right]$$

$$\frac{n-1}{n}\,\frac{H-H_0}{p_0v_0}=1-\left(\frac{F_0}{F}\sqrt{\frac{H_0}{H}}\right)^{(n-1)\frac{H-H_0}{(1+n\zeta)H-H_0}}$$

$$(n-1)\frac{H-H_0}{(1+n\zeta)H-H_0}\,lg\left(\frac{F_0}{F}\sqrt{\frac{H_0}{H}}\right)=lg\left(1-\frac{n-1}{n}\,\frac{H-H_0}{p_0v_0}\right) \quad (6).$$

Hieraus ist H, dann m aus Gl. (4), p aus Gl. (5), v und T aus Gl. (2) zu berechnen.

Wenn übrigens von den Querschnitten F_0 und F nicht etwa der eine vielmal grösser ist, als der andere, wenn ferner die Geschwindigkeit nicht ungewöhnlich gross ist und ζ eine höchstens mit dem Leitungswiderstands-coefficienten $=\lambda\frac{l}{d}$ einer nicht ungewöhnlich langen oder engen Röhre vergleichbare Grösse hat, so kann hier ebenso wie in §. 105 von der Temperaturänderung abgesehen, nach Gl. (2) also

$$\frac{m-1}{m}=0 \text{ oder } m=1$$

gesetzt werden. Dadurch wird in Gl. (1)

$$\frac{m}{m-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right]=\frac{0}{0};$$

indem aber mit $\frac{m-1}{m}=x$ und $\frac{p}{p_0}=a$ der $x=0$ entsprechende Grenzwerth

$$lim.\,\frac{1-a^x}{x}=lim.\,\frac{-a^x\,ln\,a}{1}=-ln\,a=ln\,\frac{1}{a}$$

ist, so folgt

$$(1+\zeta)H=H_0+p_0v_0\,ln\,\frac{p_0}{p}$$

oder nach Gl. (5) durch Substitution von

$$\frac{p}{p_0}=\frac{v_0}{v}=\frac{F_0}{F}\sqrt{\frac{H_0}{H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$(1+\zeta)\frac{H}{H_0}=1+\frac{p_0v_0}{H_0}\,ln\left(\frac{F}{F_0}\sqrt{\frac{H}{H_0}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Diese Gleichungen (7) und (8) bestimmen H, p, v.

Ist die Pressungsänderung so klein, dass, wenn

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \delta$$

gesetzt wird, δ^2 gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist nach Gl. (8) mit

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{F_0}{F}\frac{p_0}{p}\right)^2 = \left(\frac{F_0}{F}\right)^2(1 + 2\delta) \text{ und } ln\left(\frac{F}{F_0}\sqrt{\frac{H}{H_0}}\right) = ln\frac{p_0}{p} = \delta$$

$$(1 + \zeta)\left(\frac{F_0}{F}\right)^2(1 + 2\delta) = 1 + \frac{p_0 v_0}{H_0}\delta$$

$$\delta = \frac{(1 + \zeta)\left(\frac{F_0}{F}\right)^2 - 1}{\frac{p_0 v_0}{H_0} - 2(1 + \zeta)\left(\frac{F_0}{F}\right)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\frac{p_0 v_0}{H_0} - 3(1 + \zeta)\left(\frac{F_0}{F}\right)^2 + 1}{\frac{p_0 v_0}{H_0} - 2(1 + \zeta)\left(\frac{F_0}{F}\right)^2}; \quad \frac{u}{u_0} = \frac{F_0}{F}\frac{p_0}{p} \quad \ldots . (10).$$

Die Pressungsänderung ist negativ, Null oder positiv, jenachdem

$$\frac{F}{F_0} \lesseqgtr \sqrt{1 + \zeta}$$

ist; für $F = F_0$, d. h. in einer mit gleicher Weite fortlaufenden Röhre nimmt durch jeden Widerstand die Pressung ab. —

Was die Werthe des in diesen Formeln vorkommenden Coefficienten ζ betrifft, so suchte Weisbach den Einfluss von Richtungsänderungen, nämlich die Widerstandscoefficienten von Knie- und Kropfröhren, beide einer rechtwinkeligen Ablenkung und die Kropfröhren einem der Rohrweite nahe gleichen Halbmesser der Mittellinie entsprechend, in Verbindung mit seinen in §. 102 und §. 106 besprochenen Versuchen über den Ausfluss der Luft aus Mündungen und durch Röhren für verschiedene Fälle zu bestimmen, indem er auf die in §. 102 angegebene Weise den Ausflusscoefficienten

1) für eine aus zwei trennbaren Theilen (einem innen abgerundeten Einmündungsstück und einem ebenso weiten Ausmündungsstück) bestehende gerade cylindrische Ansatzröhre $= \mu_0$,
2) für dieselbe Rohrverbindung nach Einschaltung einer gleich weiten Knie- oder Kropfröhre zwischen beiden vorgenannten Theilen $= \mu_1$

bestimmte, damit

$$\zeta_0 = \frac{1}{\mu_0^2} - 1, \quad \zeta_1 = \frac{1}{\mu_1^2} - 1$$

berechnete und endlich den Widerstandscoefficienten der eingeschalteten Knie- oder Kropfröhre

$$\zeta = \zeta_1 - \zeta_0$$

setzte. Die Mängel dieser Berechnungsweise wurden früher hervorgehoben. Sie machen sich weniger bei μ, als bei ζ bemerklich; z. B. für die mit Ein- und Ausmündungsstück verbundene Kropfröhre von 24,4 Millim. Weite, die zu den Versuchen über den Leitungswiderstand einer längeren Zinkröhre gedient hatte, ist in §. 106 gefunden worden:

$$\mu = 0{,}6599 \text{ und } \zeta = 1{,}0565,$$

während Weisbach $\mu = 0{,}6552$ und $\zeta = 1{,}3296$

fand. Unter diesen Umständen, und da besonders die corrigirte Berechnung von μ sehr zeitraubend gewesen wäre, sind im Folgenden die Weisbach'schen Werthe von μ (μ_0 und μ_1) unverändert benutzt und daraus nur die Werthe von ζ (ζ_0 und ζ_1) correcter abgeleitet worden, indem unter x_0, x_1, x_2 das Verhältniss des inneren zum äusseren Druck beziehungsweise zu Anfang und zu Ende des Ausflusses und nach der Temperaturausgleichung, sowie unter T_0 die absolute Temperatur der äusseren Luft (= der anfänglichen Temperatur im Kessel) verstanden, wie in §. 103 gesetzt wurde:

$$q = \left(\frac{2}{x_0 + x_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

und mit $\alpha = 1$:

$$\mu = \frac{\varphi q}{1 - (1-q)\varphi^2}; \quad \varphi = -\frac{1}{2\mu}\frac{q}{1-q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\mu}\frac{q}{1-q}\right)^2 - \frac{1}{1-q}}$$

$$\zeta = \frac{lg\, q}{lg[1-(1-q)\varphi^2]} - 1.$$

Mit Rücksicht auf die eventuelle Abhängigkeit dieses Widerstandscoefficienten von der Geschwindigkeit wurde die mittlere Ausflussgeschwindigkeit u aus der Gleichung (§. 106, Gl. 3)

$$u = \varphi \sqrt{2g\frac{n}{n-1}RT_0\frac{x_1+x_2}{2x_2}(1-q)}$$

berechnet. Auf diese Weise und mit

$$\frac{n-1}{n} = 0,291; \quad R = 29,4; \quad g = 9,81$$

rurden aus den Weisbach'schen Versuchen mit einer 14,02 Millim. reiten Knieröhre und einer ebenso weiten Kropfröhre die folgenden Reultate abgeleitet.

Nr.	T_0	x_0	x_1	x_2	μ	u	ζ_0	ζ_1	$\zeta_1 - \zeta_0$
1.	$295^1/_2$	1,1289	1,0077	1,0204	0,8119	86,0	0,5021	—	—
2.	$297^1/_2$	1,4094	1,1349	1,1749	0,8496	171,3	0,3478	—	—
3.	$294^1/_2$	1,7923	1,2433	1,3009	0,8718	228,4	0,2662	—	—
4.	$297^1/_4$	1,1335	1,0267	1,0438	0,6201	71,5	0,5649	1,5483	0,983
5.	$302^3/_4$	1,4106	1,1231	1,1583	0,6135	126,7	0,4026	1,4975	1,095
6.	298	1,1333	1,0149	1,0338	0,7454	82,6	0,5148	0,7756	0,261
7.	$292^3/_4$	1,4160	1,1258	1,1637	0,7435	150,2	0,3697	0,7305	0,361

Nr. 1—3 beziehen sich auf die Versuche mit der aus dem Ein- und usmündungsstück bestehenden geraden Röhre,

Nr. 4 und 5 auf die Versuche mit eingeschalteter Knieröhre,

Nr. 6 und 7 auf die Versuche mit eingeschalteter Kropfröhre.

Die Werthe von ζ_0 bei Nr. 4—7 sind mit Rücksicht auf die betrefnden Werthe von u mittels des Ausdrucks

$$\zeta_0 = 0,19227 + \frac{26,645}{u}$$

erechnet worden, der den Werthen von ζ_0 und u bei Nr. 1 und 2 entpricht.

Die Werthe von $\zeta_1 - \zeta_0$, die von den Weisbach'schen Angaben:

$$\zeta_1 - \zeta_0 = 1,083 \text{ und } 1,306 \text{ für die Knieröhre,}$$

$$\zeta_1 - \zeta_0 = 0,283 \text{ und } 0,459 \text{ für die Kropfröhre}$$

icht unerheblich abweichen, enthalten noch diejenigen Bestandtheile in ch, welche dem allgemeinen Leitungswiderstande entsprechen, nämlich $\frac{l}{d} = 3\lambda$, sofern die Mittellinien der eingeschalteten Knie- und Kropfihren ungefähr 3 Mal so lang als die Röhren weit waren. Die Subtracon auch dieser Bestandtheile, indem dabei λ nach §. 106, Gl. (10) mit $= 0,014$ berechnet wird, ergiebt die Coefficienten der nur durch die lichtungsänderung bedingten zusätzlichen Widerstände, und zwar

für die Knieröhre: $\zeta = 0,908$ und $1,028$

für die Kropfröhre: $\zeta = 0,188$ und $0,296$,

nicht sehr verschieden von den betreffenden Grössen für die Bew
des Wassers in Röhren von doppelt so grosser Weite (§. 91). Den Wi
standscoefficienten einer engeren Knieröhre von 10,12 Millim. Weite fand
Weisbach grösser, den einer solchen Kropfröhre dagegen etwas klein
doch müssten auch diese Versuche einer corrigirten Berechnung unt
worfen und erheblich vervielfältigt werden, um als zuverlässige Grundl
zur Ableitung empirischer Gesetze dienen zu können. —

Die Coefficienten der durch plötzliche Querschnittsan
rungen der Leitungsröhre verursachten Widerstände kön
zwar unter Umständen nach §. 76, Gl. (6) theoretisch bestimmt wer
doch ist solche Bestimmung selbst unter den einfachsten Voraussetzun
mit grossen Weitläufigkeiten verbunden. Directe experimentelle B
mungen mit Hülfe der Gleichungen dieses §. sind deshalb vorzuziehen
sind unentbehrlich, wenn mit den Querschnittsänderungen zugleich R
tungsänderungen und Stromzertheilungen verbunden sind, wie es z. B.
Durchgange durch Hahn-, Schieber-, Ventilöffnungen u. s. w. der F
sein pflegt.

Abgesehen von solchen Nebenumständen sei A die Grösse der Dur
flussöffnung an einer Stelle, wo im Allgemeinen zugleich eine Aender
des Rohrquerschnitts von F_0 in F stattfinden mag, so dass mit Rück
auf die Contraction, welche der Luftstrom auch nach dem Durchgan
durch die Oeffnung A zunächst noch erfahren kann, der Querschnitt d
Luftstroms auf einer kurzen Strecke unter Ablösung von der Rohrwa
(ausser am Rande der Oeffnung A) sich von F_0 durch A bis αA zusamm
zieht und dann von αA bis F wieder erweitert. Der Zustand des L
stroms (Pressung, specif. Volumen, absol. Temperatur und Geschwindi
resp. Geschwindigkeitshöhe) sei

im Querschnitte	F_0	durch	p_0,	v_0,	T_0,	u_0,	H_0,
„	„	αA	„	p_1,	v_1,	T_1,	u_1,	H_1,
„	„	F	„	p,	v,	T,	u,	H

charakterisirt, von welchen Grössen die auf den Querschnitt F_0 b
lichen ebenso wie die Querschnittsverhältnisse $F_0 : \alpha A : F$ als g
vorausgesetzt werden. Von F_0 bis αA findet Ausdehnung und Ges
digkeitszunahme statt, von dort bis F dagegen kann die Art der Zus
änderung je nach den Umständen verschieden sein. Wenn man
Bewegungswiderständen auf der ersteren dieser beiden Strecken ab
die Aenderung des Wärmezustandes somit von F_0 bis αA als nach
adiabatischen Curve stattfindend annimmt, so ist

$$p_1 v_1^n = p_0 v_0^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11).$$

Für die Bewegung von αA bis F werde auch die Pressung beständig derselben Potenz des specif. Volumens proportional, also

$$p v^m = p_1 v_1^m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

gesetzt, wobei aber m zunächst unbekannt ist. Die Temperatur kann im Querschnitte αA wesentlich kleiner sein, als in den Querschnitten F_0 und F; wenn aber in letzteren von ihrer Verschiedenheit abstrahirt, d. h. $T_0 = T$ gesetzt wird wie bei der Ableitung obiger Gleichungen (7) und (8), so ist

$$p v = p_0 v_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13).$$

Nach §. 76, Gl. (6) und mit Rücksicht auf die Gleichungen in §. 20 ist nun die Widerstandshöhe:

$$\zeta H = \frac{(u_1 - u)^2}{2g} + p_1(v_1 - v) + \frac{p_1 v_1}{m-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}\right]$$

und somit der Widerstandscoefficient

$$\zeta = \left(\frac{u_1}{u} - 1\right)^2 + \frac{p_1 v_1}{H}\left[1 - \frac{v}{v_1} + \frac{1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}}{m-1}\right]$$

oder wegen $\frac{u_1}{u} = \frac{F}{\alpha A}\frac{v_1}{v}$

und $$\frac{p_1 v_1}{H} = \frac{p_0 v_0}{H_0}\frac{H_0}{H}\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_0 v_0}{H_0}\left(\frac{F}{F_0}\frac{v_0}{v}\right)^2\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{F}{\alpha A}\frac{v_1}{v} - 1\right)^2 + \frac{p_0 v_0}{H_0}\left(\frac{F}{F_0}\frac{v_0}{v}\right)^2\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{n-1}\left[1 - \frac{v}{v_1} + \frac{1 - \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1}}{m-1}\right].$$

Wegen $\frac{v_1}{v} = \frac{v_1}{v_0}\frac{v_0}{v}$ ist hierdurch ζ ausgedrückt als Function gegebener Grössen und der Unbekannten $\frac{v_1}{v_0}$, $\frac{v}{v_0}$, m, von denen die letzte indessen durch die beiden anderen bestimmt ist; denn

$$\text{wegen } \frac{T}{T_1} = \frac{T_0}{T_1} \text{ ist } \left(\frac{v_1}{v}\right)^{m-1} = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^{n-1}$$

$$m - 1 = \frac{(n-1)\, lg\frac{v_1}{v_0}}{lg\frac{v_1}{v}} = \frac{(n-1)\, lg\frac{v_1}{v_0}}{lg\frac{v_1}{v_0} - lg\frac{v}{v_0}} \quad \ldots \ldots (14).$$

Dadurch wird

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A}\frac{v_1}{v_0}\frac{v_0}{v} - 1\right)^2 + \frac{p_0 v_0}{H_0}\left(\frac{F}{F_0}\frac{v_0}{v}\right)^2\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{n-1}\left[1 - \frac{v_0}{v_1}\frac{v}{v_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^{n-1}}{n-1}\;\frac{lg\frac{v_1}{v_0} - lg\frac{v}{v_0}}{lg\frac{v_1}{v_0}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15.$$

Zur Bestimmung des Verhältnisses $\frac{v_1}{v_0}$ hat man nach Analogie von Gl. (1) mit Rücksicht auf Gl. (11):

$$\frac{H_1}{H_0} = \left(\frac{F_0}{\alpha A}\frac{v_1}{v_0}\right)^2 = 1 + \frac{n}{n-1}\frac{p_0 v_0}{H_0}\left[1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{n-1}\right] \quad \ldots\ldots \quad 16.$$

Die Substitution des Werthes von $\frac{v_1}{v_0}$ in Gl. (15) liefert ζ als Function gegebener Grössen und der einzigen Unbekannten $\frac{v}{v_0}$. Indem aber nach Gl. (7) und (8) auch

$$(1+\zeta)\frac{H}{H_0} = (1+\zeta)\left(\frac{F_0}{F}\frac{v}{v_0}\right)^2 = 1 + \frac{p_0 v_0}{H_0}\,ln\,\frac{v}{v_0}$$

$$\zeta = \left(1 + \frac{p_0 v_0}{H_0}\,ln\,\frac{v}{v_0}\right)\left(\frac{F}{F_0}\frac{v_0}{v}\right)^2 - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17$$

ist, liefert die Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke von ζ eine Gleichung, durch welche $\frac{v}{v_0}$ und folglich auch ζ bestimmt ist.

Wenn übrigens hier αA als eine gegebene Grösse vorausgesetzt wurde, so ist es wesentlich zu bemerken, dass dem Coefficienten α nur dann die Bedeutung eines inneren Contractionscoefficienten beigelegt und derselbe dem anderweitig bekannten äusseren Contractionscoefficienten für den Fall des Ausflusses aus einer entsprechenden Gefässmündung nur dann nahe gleich gesetzt werden kann, wenn das Verhältniss $\frac{F_0}{A}$ eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Aus Gl. (16) folgt nämlich mit

$$a = \frac{n}{n-1}\frac{p_0 v_0}{H_0},\quad x = \frac{v_0}{v_1},\quad y = \left(\frac{F_0}{\alpha A}\right)^2$$

$$y = (a+1)x^2 - a x^{n+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(a+1)x - (n+1)a x^n,$$

onach $x = 1$, $y = 1$, $\frac{dy}{dx} = 2 - (n - 1)a$ zusammengehörige Werthe
nd. Dieser letzte Werth ist negativ, weil für alle praktischen Fälle a
ne grosse Zahl ist, z. B. für etwas feuchte atm. Luft mit $T_0 = 300$ und
$_0 = 20$ (entsprechend $u_0 = 19,8$)

$$\frac{p_0 v_0}{H_0} = \frac{29,4 \, . \, 300}{20} = 441 \, ; \quad a = \frac{1,41}{0,41} . 441 = 1516,6.$$

enn also $x = \frac{v_0}{v_1}$ von 1 angefangen abnimmt oder $\frac{v_1}{v_0}$ zunimmt, so wächst
ch y oder $\frac{F_0}{\alpha A}$, jedoch nur bis zu einem Maximum, welches erreicht
rd mit

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{also} \quad x^{n-1} = \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{a}\right).$$

hme x weiter ab bis Null, so würde auch y bis Null abnehmen; weil
r $\frac{F_0}{A}$ ohne Ende wachsen kann, wenn unter übrigens gleich bleibenden
ständen die Oeffnung A immer kleiner genommen wird, so ist zu
liessen, dass der Coefficient α nur bis zu jener dem Maximum von y
sprechenden Grenze nahe constant bleiben kann, darüber hinaus aber
e Ende zunehmen muss. Dieser Schluss ist analog der Bemerkung,
che in §. 100 und 101 bezüglich auf den Ausfluss der Luft aus Gefäss-
dungen bei abnehmendem Verhältnisse der äusseren zur inneren Pres-
gemacht wurde, und wenn man dann weiter analog den dort er-
ten Versuchsresultaten von de Saint-Venant und Wantzel, von
ier und von Zeuner annimmt, dass ebenso wie dort die Ausfluss-
ge, so hier das Verhältniss $\frac{F_0}{\alpha A}$ constant bleibt, sobald es bei gleich
enden Werthen von p_0, v_0, H_0 und bei zunehmendem Werthe von
ein Maximum erreicht hat, so ergiebt sich dieser Grenzwerth:

$$lim. \frac{F_0}{\alpha A} = lim. \sqrt{y} = x \sqrt{a + 1 - a x^{n-1}}$$

$$x = lim. \frac{v_0}{v_1} = \left[\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right]^{\frac{1}{n-1}} \quad \ldots\ldots\ldots (18),$$

$$lim. \frac{F_0}{\alpha A} = \left[\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right]^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}(a+1)} \quad \ldots (19).$$

Bei Vernachlässigung des meist sehr kleinen Bruchs $\frac{1}{a}$ neben 1 (oder von 1 neben a) folgt

$$lim. \frac{v_0}{v_1} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}}; \quad lim. \frac{F_0}{\alpha A} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{\frac{n}{n+1} \frac{p_0 r_0}{H_0}} \quad (20)$$

insbesondere mit $n = 1,41$:

$$lim. \frac{v_0}{v_1} = 0,6345; \quad lim. \frac{v_1}{v_0} = 1,576; \quad lim. \frac{F_0}{\alpha A} = 0,4854 \sqrt{\frac{p_0 r_0}{H_0}} \quad (21)$$

Dem Grenzwerthe

$$lim. \frac{v_0}{v_1} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \text{ entspricht } lim. \frac{p_1}{p_0} = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

in Uebereinstimmung mit §. 100, Gl. (14); in der That handelte es sich dort um den Ausfluss aus einem Gefässe, in welchem $H_0 = 0$ gesetzt wurde entsprechend $a = \infty$.

Ist nun also in irgend einem Falle, unter $\alpha < 1$ den betreffenden Contractionscoefficienten für den Ausfluss aus der Oeffnung A als Mündung (bei Wegnahme der Röhre vom Querschnitte F) verstanden, das Verhältniss $\frac{F_0}{\alpha A}$ grösser, als der obige Grenzwerth, so ist letzterer nebst den entsprechenden Grenzwerthen von $\frac{v_0}{v_1}$ und $\frac{r_1}{r_0}$ in Gl. (15) zu substituiren. Die Ausführung dieser Substitution für $n = 1,41$ (Gl. 21) und Gleichsetzung des so gefundenen Ausdrucks von ζ mit dem Ausdrucke 17 liefert die Gleichung

$$1 - \frac{H_0}{p_0 r_0} + 1,1006\, lg \frac{r}{r_0} - \left[0,5265 + 1,5298 \sqrt{\frac{H_0}{p_0 r_0}} \frac{F_0}{F}\right] \frac{r}{r_0} + 2 \frac{H_0}{p_0 r_0} \left(\frac{F_0}{F} \frac{r}{r_0}\right)^2 = 0 \ldots \ldots \ldots \ldots$$

zur Berechnung des Werthes von $\frac{r}{r_0}$, mit welchem dann ζ nach Gl. gefunden wird.

Ist z. B. $F_0 = F$, $T_0 = 300$, $H_0 = 20$,

$$\text{also } \frac{p_0 r_0}{H_0} = \frac{29,4 \cdot 300}{20} = 441,$$

und wird $\alpha = \frac{2}{3}$ angenommen, so findet man

für $\frac{F}{A} =$	2	4	6	8
$\frac{v_1}{v_0} =$	1,0134	1,067	1,223	1,576
$\frac{v}{v_0} =$	1,0094	1,067	1,243	2,416
$\zeta =$	4,03	25,0	61,8	66,8
$\left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2 =$	4	25	64	121

Nach Gl. (21) ist hier $lim. \frac{F}{A} = 6,7956$; für $\frac{F}{A} = 8$ musste deshalb dem Grenzwerthe nach Gl. (21) gleich gesetzt und $\frac{v}{v_0}$ aus Gl. (22) berechnet werden. Für die übrigen Fälle ist $\frac{v_1}{v_0}$ aus Gl. (16), dann $\frac{v}{v_0}$ durch ileichsetzung der Ausdrücke von ζ nach Gl. (15) und (17) berechnet orden. Während bis zum kleinsten Querschnitte stets Ausdehnung stattndet, findet von hier bis zum Querschnitte F Compression oder Ausdehnung statt und ist $\zeta \gtrless \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$, jenachdem $\frac{F}{A} \lessgtr 4$ ungefähr ist. Venn übrigens $\frac{F}{A}$ kleiner, als der durch Gl. (21) bestimmte Grenzwerth ist, o kann ohne erheblichen Fehler wie für Wasser (§. 92, Gl. 1)

$$\zeta = \left(\frac{F}{\alpha A} - 1\right)^2$$

esetzt werden, besonders wenn man sich vorbehält, zur Berücksichtigung er verschiedenen Nebenumstände den Coefficienten α aus entsprechenden ersuchen abzuleiten.

§. 109. Bewegung der Luft in einer Röhre, durch deren Wand eine wesentliche Wärmeleitung stattfindet.

Wenn aus den allgemeinen Gleichungen (1)—(3) in §. 104 das pecif. Volumen v vermittels der Zustandsgleichung ($pv = RT$) eliminirt ird, so hat man zur Bestimmung von p, T, u resp. $H = \frac{u^2}{2g}$ als Functionen des längs der Mittellinie gemessenen Abstandes s vom Anfangsquerchnitte die Gleichungen:

Nachdem so T als Function von s gefunden ist, sind die Gleichungen (1) und (2) noch zur Bestimmung von p und u resp. H disponibel. Aus Gl. (1) folgt

$$p = Const.\,\frac{T}{u} = Const.\,\frac{T}{\sqrt{H}}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{dH}{2H}$$

und damit durch Substitution in Gl. (2):

$$dH + RdT - \frac{RT}{2H}dH = \left(\cos\psi - \lambda\frac{H}{d}\right)ds$$

$$\frac{dH}{ds}\left(\frac{RT}{2H} - 1\right) - R\frac{dT}{ds} + \cos\psi - \lambda\frac{H}{d} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 10.$$

Durch diese Gleichung mit Rücksicht auf Gl. (8) oder (9) ist H bestimmt. Wenn, wie gewöhnlich, ohne wesentlichen Fehler 1 gegen $\frac{RT}{2H}$ vernachlässigt werden kann, hat sie die Form

$$\frac{dH}{ds} + Hf(s) + H^2\varphi(s) = 0$$

$$\text{mit } f(s) = \frac{2}{RT}\left(-R\frac{dT}{ds} + \cos\psi\right),\quad \varphi(s) = -\frac{2\lambda}{RTd}.$$

Ihr Integral ist dann:

$$\frac{1}{H} = \Phi(s)\left(\int\frac{\varphi(s)}{\Phi(s)}ds + Const.\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 11.$$

wobei die Constante durch $H = H_0$ für $s = 0$ bestimmt und, unter Φ eine willkürlich wählbare Constante verstanden,

$$\Phi(s) = e^{\int_{s_0}^{s} f(s)ds}$$

ist. Mit T und $u = \sqrt{2gH}$ findet man endlich p aus Gl. (1).

Zum praktischen Gebrauch ist diese Lösung nicht geeignet. Eine Vereinfachung kann aber gewöhnlich durch die Bemerkung begründet werden, dass die Geschwindigkeitsänderung hier in weit höherem Grade durch die Temperatur —, als durch die Pressungsänderung bedingt wird, besonders wenn letztere an sich nur klein ist. Setzt man dann nach Gl. (1 näherungsweise u proportional T, also H proportional T^2, somit

Während die Grössen F, d, ψ, kP' und λ constant gesetzt werden, so dass auch a eine Constante ist, soll in Betreff der äusseren Temperatur T' angenommen werden, dass sie einer Flüssigkeit zukommt, die sich ausserhalb der Rohrwand resp. des die Wärme übertragenden Theils derselben im Allgemeinen auch in strömender Bewegung in einem Canal befinden kann. Ist dann G' das Gewicht der durch jeden Querschnitt dieses Canals pro Sec. strömenden Flüssigkeit, c_1' ihre specif. Wärme bei constanter Pressung, so ist unter der Voraussetzung, dass nur durch denjenigen Theil der Wand dieses Canals eine merkliche Wärmetransmission stattfindet, welcher ihm und der Luftleitungsröhre gemeinschaftlich ist, analog Gl. (6)

$$\frac{dT'}{T'-T} = \mp \frac{kP'}{G'c_1'}\,ds,$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen gilt, jenachdem die Strömungsrichtungen der Luft und der äusseren Flüssigkeit gleich oder entgegengesetzt sind. Aus der Verbindung dieser Gleichung mit Gl. (6) folgt

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dT'}{dT} &= \pm\mu \quad \text{mit} \quad \mu = \frac{Gc_1}{G'c_1'} \\ \frac{T'-T_0'}{T_0-T} &= \pm\mu \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ (7),$$

unter T_0 und T_0' die Werthe von T und T' für $s = 0$ verstanden. Die Substitution des hieraus zu entnehmenden Ausdrucks von T' als Function von T in Gl. (6) liefert:

$$\frac{dT}{T - T_0' \mp \mu(T_0 - T)} = \frac{dT}{(1\pm\mu)\,T - T_0' \mp \mu T_0} = -\frac{ds}{a}$$

und daraus durch Integration:

$$\left.\begin{aligned} ln\,\frac{(1\pm\mu)\,T - T_0' \mp \mu T_0}{T_0 - T_0'} &= -(1\pm\mu)\,\frac{s}{a} \\ (1\pm\mu)T &= T_0' \pm \mu T_0 + (T_0 - T_0')\,e^{-(1\pm\mu)\frac{s}{a}} \end{aligned}\right\} \ldots\ (8).$$

Ist die äussere Flüssigkeit nicht in strömender Bewegung, oder ist sie von so überwiegender Masse, dass

$$T' = Const. = T_0'$$

gesetzt werden kann, so ist $\mu = 0$, also

$$\left.\begin{aligned} ln\,\frac{T-T'}{T_0-T'} &= -\frac{s}{a} \\ T &= T' + (T_0 - T')\,e^{-\frac{s}{a}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (9).$$

$$ln\frac{p_0}{p} = \frac{H_0}{RT_0}\left[\lambda\frac{T'}{T_0}\frac{s}{d} + \left(2 - \lambda\frac{a}{d}\right)\frac{T - T_0}{T_0}\right]$$
$$- \frac{\cos\psi}{RT'}\left(s + a\,ln\frac{T}{T_0}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

Ist die Pressungsänderung so klein, dass, wenn

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \delta$$

gesetzt wird, δ^2 gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist

$$ln\frac{p_0}{p} = -ln(1 - \delta) = \delta.$$

Durch T und p ist schliesslich auch u nach Gl. (1) bestimmt.

3. Permanente Bewegung der Dämpfe.

§. 110. Fundamentalgleichungen.

Es sind hier die beiden Fälle zu unterscheiden, ob der Dampf ungesättigt oder gesättigt, letzteren Falls im Allgemeinen zugleich feucht, d. h. mit Flüssigkeit von derselben Art gemischt ist.

1) Für ungesättigten Dampf ist nach §. 39, Gl. (16) die Zustandsgleichung:

$$pv = R(T - P) \text{ mit } P = \beta p^{\frac{n-1}{n}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

und nach §. 40, Gl. (4) die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens:

$$dU = \frac{1}{n-1}d(pv) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Dabei sind n, R, β Constante, die von der Art des Dampfes abhängen; insbesondere für Wasserdampf kann nach §. 39 gesetzt werden: $n = \frac{4}{3}$ und, wenn p in Atmosphären ausgedrückt wird,

$$R = 0{,}004924 \text{ und } P = 37{,}774\sqrt[4]{p},$$

also, wenn p in Kgr. pro Quadratm. ausgedrückt wird,

$$R = 50{,}88 \text{ und } P = 3{,}7465\sqrt[4]{p}.$$

Diese Gleichungen (1) und (2) in Verbindung mit den allgemeinen

Gleichungen in §. 75, nämlich mit Gl. (1) und irgend zwei der Gleichungen (2), (3), (4) daselbst, bestimmen unter übrigens gegebenen Umständen die 5 Grössen p, v, T, U, u als Functionen von s, also für jeden Querschnitt F. Da die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens hier dieselbe Form hat wie für Luft (für Gase), so ergiebt sich auch durch Elimination von U ebenso wie in §. 99, wenn wieder H die Geschwindigkeitshöhe $= \frac{u^2}{2g}$ bedeutet, die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$dH + v\,dp = dM - dB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

die Wärmegleichung:

$$\frac{1}{n-1}\,d(pv) + p\,dv = WdQ + dB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

und die Gleichung des Arbeitsvermögens:

$$dH + \frac{n}{n-1}\,d(pv) = dM + WdQ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Irgend zwei dieser drei Gleichungen, von denen jede aus den beiden anderen folgt, bestimmen in Verbindung mit der Continuitätsgleichung (§. 75, Gl. 1):

$$Fu = Gv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

und der obigen Zustandsgleichung (1) die Grössen p, v, T und u resp. H unter übrigens gegebenen Umständen.

2) Für ein Gemisch von gesättigtem Dampf und gleichartiger Flüssigkeit werden die Zustandsgleichung und die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens durch die Gleichungen (1) und (2) in §. 30:

$$v = w + y\Delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

$$dU = Wd(q + y\varrho) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

vertreten, in welchen w das specif. Volumen der Flüssigkeit, Δ den Ueberschuss des specif. Volumens des gesättigten Dampfes über das der Flüssigkeit, q (entsprechend der Annahme: $w = Const.$) die specif. Flüssigkeitswärme, ϱ die innere specif. Verdampfungswärme und y die specif. Dampfmenge, d. h. das Gewicht des Dampfes in 1 Kgr. des Gemisches (also $1 - y$ das Gewicht der Flüssigkeit) bedeuten. Obschon diese Grösse y zur Charakterisirung des inneren Zustandes hier als weiteres Element hinzukommt, genügen doch die Gleichungen (7) und (8) zur Ergänzung der allgemeinen Gleichungen in §. 75, weil die Temperatur und Δ, q, ϱ durch die Pressung p bestimmt sind. Indem nach Gl. (7) und (8) und mit Einführung der specif. Verdampfungswärme

$$ln\frac{p_0}{p} = \frac{H_0}{RT_0}\left[\lambda\frac{T'}{T_0}\frac{s}{d} + \left(2 - \lambda\frac{a}{d}\right)\frac{T - T_0}{T_0}\right]$$
$$- \frac{\cos\psi}{RT'}\left(s + a\,ln\frac{T}{T_0}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (13.$$

Ist die Pressungsänderung so klein, dass, wenn

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \delta$$

gesetzt wird, δ^2 gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist

$$ln\frac{p_0}{p} = -ln(1 - \delta) = \delta.$$

Durch T und p ist schliesslich auch u nach Gl. (1) bestimmt.

3. Permanente Bewegung der Dämpfe.

§. 110. Fundamentalgleichungen.

Es sind hier die beiden Fälle zu unterscheiden, ob der Dampf ungesättigt oder gesättigt, letzteren Falls im Allgemeinen zugleich feucht, d. h. mit Flüssigkeit von derselben Art gemischt ist.

1) Für ungesättigten Dampf ist nach §. 39, Gl. (16) die Zustandsgleichung:

$$pv = R(T - P) \text{ mit } P = \beta p^{\frac{n-1}{n}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1$$

und nach §. 40, Gl. (4) die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens:

$$dU = \frac{1}{n-1}\,d(pv) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2$$

Dabei sind n, R, β Constante, die von der Art des Dampfes abhängen; insbesondere für Wasserdampf kann nach §. 39 gesetzt werden: $n = \frac{4}{3}$ und, wenn p in Atmosphären ausgedrückt wird,

$$R = 0{,}004924 \text{ und } P = 37{,}774\sqrt[4]{p},$$

also, wenn p in Kgr. pro Quadratm. ausgedrückt wird,

$$R = 50{,}88 \text{ und } P = 3{,}7465\sqrt[4]{p}.$$

Diese Gleichungen (1) und (2) in Verbindung mit den allgemeinen

Gleichungen in §. 75, nämlich mit Gl. (1) und irgend zwei der Gleichungen (2), (3), (4) daselbst, bestimmen unter übrigens gegebenen Umständen die 5 Grössen p, v, T, U, u als Functionen von s, also für jeden Querschnitt F. Da die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens hier dieselbe Form hat wie für Luft (für Gase), so ergiebt sich auch durch Elimination von U ebenso wie in §. 99, wenn wieder H die Geschwindigkeitshöhe $= \frac{u^2}{2g}$ bedeutet, die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$dH + v\,dp = dM - dB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

die Wärmegleichung:

$$\frac{1}{n-1}\,d(pv) + p\,dv = W\,dQ + dB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

und die Gleichung des Arbeitsvermögens:

$$dH + \frac{n}{n-1}\,d(pv) = dM + W\,dQ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Irgend zwei dieser drei Gleichungen, von denen jede aus den beiden anderen folgt, bestimmen in Verbindung mit der Continuitätsgleichung (§. 75, Gl. 1)

$$Fu = Gv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

und der obigen Zustandsgleichung (1) die Grössen p, v, T und u resp. H unter übrigens gegebenen Umständen.

2) Für ein **Gemisch von gesättigtem Dampf und gleichartiger Flüssigkeit** werden die Zustandsgleichung und die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens durch die Gleichungen (1) und (2) in §. 30:

$$v = w + y\Delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7),$$

$$dU = W\,d(q + y\varrho) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

vertreten, in welchen w das specif. Volumen der Flüssigkeit, Δ den Ueberschuss des specif. Volumens des gesättigten Dampfes über das der Flüssigkeit, q (entsprechend der Annahme: $w = Const.$) die specif. Flüssigkeitswärme, ϱ die innere specif. Verdampfungswärme und y die specif. Dampfmenge, d. h. das Gewicht des Dampfes in 1 Kgr. des Gemisches (also $1 - y$ das Gewicht der Flüssigkeit) bedeuten. Obschon diese Grösse y zur Charakterisirung des inneren Zustandes hier als weiteres Element hinzukommt, genügen doch die Gleichungen (7) und (8) zur Ergänzung der allgemeinen Gleichungen in §. 75, weil die Temperatur und Δ, q, ϱ durch die Pressung p bestimmt sind. Indem nach Gl. (7) und (8) und mit Einführung der specif. Verdampfungswärme

$$r = \varrho + Ap\Delta \quad (\S. 27, \text{Gl. } 7)$$

$$dU + d(pv) = Wd(q + y\varrho) + wdp + d(py\Delta)$$
$$= Wd[q + y(\varrho + Ap\Delta)] + wdp = Wd(q + yr) + wdp$$

ist, ergiebt sich nach §. 75, Gl. (4) als Gleichung des Arbeitsvermögens:

$$dH + Wd(q + yr) + wdp = dM + WdQ \quad \ldots\ldots (9).$$

Hieraus und aus der Gleichung der lebendigen Kraft

$$dH + vdp = dM - dB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

folgt durch Subtraction mit Rücksicht auf Gl. (7) die Wärmegleichung:

$$Wd(q + yr) - y\Delta dp = WdQ + dB$$

oder auch bei Multiplication mit $A = \frac{1}{W}$ und weil nach der auf den Uebergang aus einer in eine andere Aggregatform bezüglichen allgemeinen Gleichung

$$A\Delta dp = \frac{r}{T}dT \quad (\S. 24, \text{Gl. } 3)$$

$$d(yr) - Ay\Delta dp = d(yr) - \frac{yr}{T}dT = \frac{Td(yr) - yrdT}{T} = Td\frac{yr}{T}$$

ist, in einfacherer Form:

$$dq + Td\frac{yr}{T} = dQ + AdB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Irgend zwei dieser Gleichungen (9), (3), (10) in Verbindung mit der Continuitätsgleichung (6) und der Zustandsgleichung (7) bestimmen hier die Grössen p, v, y und u resp. H mit Rücksicht darauf, dass T, Δ, q, r (insbesondere für Wasserdampf nach der Tabelle in §. 29) durch p bestimmt sind. —

In Betreff der Arbeit dM der Massenkräfte, der Widerstandsarbeit dB und der mitgetheilten Wärme dQ pro 1 Kgr. Dampf auf dem Wege ds gilt das in §. 99 bezüglich auf die entsprechenden Fundamentalgleichungen für Luft Gesagte.

Uebrigens kann es der Fall sein, dass der Anfangs ungesättigte Dampf von einer gewissen Stelle an gesättigt und demnächst durch theilweise Condensation feucht wird oder umgekehrt, erkennbar im ersten Falle daran, dass für v oder T sich Werthe ergeben, die kleiner sind, als diejenigen, welche der betreffenden Pressung p gesättigten trockenen Dampfes entsprechen, im zweiten Falle daran, dass $y > 1$ gefunden wird. Dann müssten auf einem Theil des Weges die Formeln unter 1), auf dem

anderen die Formeln unter 2) Anwendung finden, und würde die Ermittelung der Uebergangsstelle von dem einen in den anderen Zustand und die Bestimmung des betreffenden Grenzzustandes selbst eine besondere Untersuchung erfordern. —

Während dem Obigen zufolge die Fundamentalgleichungen für ungesättigte Dämpfe, folglich auch die unter gleichen Umständen daraus abzuleitenden Gleichungen von derselben Form sind wie für Gase, insoweit es sich nur um p, v, u handelt, die Temperatur aber nicht in Betracht kommt, sind die Gleichungen für Dampf- und Flüssigkeitsgemische von wesentlich anderer Form. Ob, wie es wünschenswerth wäre, auch bei den auf letztere bezüglichen Aufgaben, insoweit es sich nur um die Grössen p, v, u handelt und abgesehen vom Zahlenwerth der Constanten n, wenigstens näherungsweise Gleichungen von denselben Formen benutzt werden können, wie bei Gasen und ungesättigten Dämpfen, hängt davon ab, ob auch bei solchen Gemischen von gesättigtem Dampf und gleichartiger Flüssigkeit wenigstens mit hinlänglicher Annäherung dieselbe Form

$$dU = \frac{1}{n-1} d(pv) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

der Gleichung des inneren Arbeitsvermögens zu Grunde gelegt werden kann. Wäre es der Fall, so wäre die angenäherte Differentialgleichung der adiabatischen Curve (§. 13):

$$0 = dU + pdv = \frac{pdv + vdp}{n-1} + pdv$$

$$0 = npdv + vdp = n\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p},$$

also die Gleichung selbst:

$$pv^n = Const. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

In §. 35 wurde aber für ein Gemisch von Wasserdampf und Wasser, in welchem der Dampf überwiegend ($y > 0{,}7$) ist, nachgewiesen, dass durch diese Gleichung in der That bei angemessener Wahl des Exponenten n (dort mit m bezeichnet) das Aenderungsgesetz von p und v bei einer Zustandsänderung ohne Mittheilung oder Entziehung von Wärme mit genügender Annäherung darstellbar ist, und kann daraus umgekehrt geschlossen werden, dass mit entsprechender Annäherung auch Gl. (2) in solchen Fällen zu Grunde zu legen ist, in welchen eine bedeutende Mittheilung oder Entziehung von Wärme von aussen her oder eine bedeutende Wärmeerzeugung im Inneren durch die Bewegungswiderstände nicht

stattfindet, das Aenderungsgesetz von p und v folglich von dem durch Gl. (11) dargestellten nicht erheblich abweicht.

Wenn also unter solchen Umständen die früher für die Bewegung der Luft entwickelten Gleichungen im Folgenden auch für Dämpfe von beiderlei Zuständen Anwendung finden, so ist nur der Werth von n dem jedesmaligen Falle entsprechend zu wählen. Insbesondere für Wasserdampf ist, wenn ungesättigt, $n = \frac{4}{3}$, anderenfalls n nach §. 35 zu bestimmen.

α. Ausfluss der Dämpfe aus Gefässen.

§. 111. Theoretische Formeln.

Der Ausfluss aus Gefässmündungen ist ein solcher Fall, in welchem nicht nur für ungesättigten, sondern auch für gesättigten Dampf, dessen Flüssigkeitsgehalt eine gewisse Grenze nicht übersteigt, die früher für Luft gefundenen Gleichungen anwendbar sind, wenn der innere Zustand durch Pressung und specifisches Volumen charakterisirt, und wenn nur dem in jenen Gleichungen vorkommenden Coefficienten n ein entsprechend anderer Werth beigelegt wird wie dort. Dabei werde, wie in §. 101 für den Ausfluss der Luft, auch hier die Annahme zu Grunde gelegt, dass bis zum Ausflussquerschnitte sich die Pressung des Dampfes einer gewissen, der m^{ten} Potenz des specif. Volumens umgekehrt proportional ändert, wo dann wie dort für ein so grosses Gefäss, dass die Geschwindigkeit in demselben = Null gesetzt werden kann, dieser so genannte Ausflussexponent m zum Widerstandscoefficienten ζ der Mündung resp. des Mundstücks in der Beziehung steht:

$$\zeta = \frac{n - m}{n(m - 1)}; \quad m = \frac{n(1 + \zeta)}{1 + n\zeta}; \quad \frac{m - 1}{m} = \frac{n - 1}{n(1 + \zeta)} \quad . . (1)$$

während unter dem Ausflussquerschnitte, hier mit F bezeichnet, derjenige Querschnitt des Dampfstroms ausserhalb der Mündung verstanden wird, in welchem zuerst die Bahnen der Dampftheilchen hinlänglich gerade geworden sind, um darin einen gleichförmigen Zustand, insbesondere eine gleichförmige Pressung = derjenigen des äusseren Raumes voraussetzen zu dürfen (§. 100). Ist dann ferner

A die Ausflussöffnung,

α der Contractionscoefficient, also αA der kleinste Querschnitt des contrahirten Strahls,

p_0 die Pressung, v_0 das specif. Volumen im Inneren des Gefässes,

p die Pressung im äusseren Raume, also auch im Ausflussquerschnitte,

v das specif. Volumen des Dampfs in demselben,

so gelten nach §. 101 die folgenden Gesetze:

Die Ausflussgeschwindigkeit, verstanden als die Geschwindigkeit im Ausflussquerschnitte, ist allgemein:

$$u = \sqrt{2g\frac{n}{n-1}p_0 v_0\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots (2),$$

wachsend bei abnehmender äusserer Pressung bis

$$max.\, u = \sqrt{2g\frac{n}{n-1}p_0 v_0} \text{ für } p = 0.$$

Uebrigens sind zwei Fälle wesentlich zu unterscheiden, ob nämlich $p \gtrless p'$ ist, unter p' eine durch die Gleichung

$$\frac{p'}{p_0} = \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

bestimmte Pressung verstanden. Ist $p > p'$, so ist der Ausflussquerschnitt F mit dem kleinsten Querschnitte αA identisch, und die Ausflussmenge (Kgr. pro Sec.)

$$G = \alpha A\sqrt{2g\frac{n}{n-1}\frac{p_0}{v_0}\left[\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{m}}-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]} \quad \ldots\ldots (4).$$

Ist aber $p < p'$, so ist p' die mittlere Pressung im kleinsten Querschnitt αA, dieser also näher an der Mündung und kleiner als F; die mittlere Geschwindigkeit $= u'$ in ihm und die Ausflussmenge ergeben sich aus Gl. (2) und (4) mit $p = p'$ nach Gl. (3):

$$u' = \sqrt{2g\frac{n}{n-1}\frac{m-1}{m+1}p_0 v_0} = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta}\frac{m}{m+1}p_0 v_0} \quad \ldots (5)$$

$$G = \alpha A\sqrt{2g\frac{n}{n-1}\frac{m-1}{m+1}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{2}{m-1}}\frac{p_0}{v_0}}$$

$$= \alpha A\sqrt{\frac{gm}{1+\zeta}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m-1}}\frac{p_0}{v_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

sind also unabhängig von der äusseren Pressung, sofern nicht etwa α und ζ, also auch m mit ihr sich etwas ändern. Ist v' das mittlere specif. Volumen im kleinsten Querschnitte, also

$$p_0 v_0^m = p' v'^m = p v^m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

so folgt für den Ausflussquerschnitt F aus der Continuitätsgleichung

$$G = \frac{Fu}{v} = \frac{\alpha A u'}{v'}$$

mit Rücksicht auf Gl. (2), (3), (5) und (7):

$$\frac{F}{\alpha A} = \frac{v}{v'}\,\frac{u'}{u} = \left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{1}{m}} \sqrt{\frac{m-1}{m+1}}\;\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{m+1}\left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{m-1}{m}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{m-1}{(m+1)\left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{2}{m}} - 2\left(\frac{p}{p'}\right)^{\frac{m+1}{m}}}} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

unendlich wachsend, wenn p bis Null abnimmt.

Insbesondere für Wasserdampf kann in diesen Gleichungen gesetzt werden:

1) $n = \frac{4}{3}$, wenn er im Inneren des Gefässes ungesättigt ist und auch bis zum Ausflussquerschnitte ungesättigt bleibt, was daran erkannt wird, dass

$$v = v_0 \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{m}}$$

noch grösser ist, als das specif. Volumen gesättigten Wasserdampfes (= $\Delta + 0{,}001$ nach §. 29) für die Pressung p,

2) $n = 1{,}035 + 0{,}1\,y_0$ nach §. 35, Gl. (11), wenn er im Inneren des Gefässes gesättigt, im Allgemeinen feucht und $y_0 > 0{,}7$ seine specif. Dampfmenge ist, vorausgesetzt dass er auch bis zum Ausflussquerschnitte gesättigt bleibt, daran erkennbar, dass nach Gl. (7) im vorigen §.

$$y = \frac{v-w}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left[v_0\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{m}} - 0{,}001\right] < 1$$

gefunden wird.

3) Ergiebt sich aber mit dem auf solche Weise vorläufig angenommenen Werth von n der Dampf im Ausflussquerschnitte im ersten Falle feucht, im zweiten ungesättigt, so ist n anfangs, nämlich bis zu demjenigen

Querschnitt, in welchem (bei einer gewissen Pressung p_1 und dem entsprechenden specif. Volumen v_1) der Dampf gerade gesättigt, aber trocken ist, im ersten Falle $= 4/3$, im zweiten $= 1,135$, allgemein $= n_0$, später im ersten Falle $= 1,135$, im zweiten $= 4/3$, allgemein $= n_1$ zu setzen. Dann ist auch

$$\frac{v_0}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{m_0}} \text{ mit } m_0 = \frac{n_0(1+\zeta)}{1+n_0\zeta},$$

$$\frac{v_1}{v} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} \text{ mit } m_1 = \frac{n_1(1+\zeta)}{1+n_1\zeta}$$

zu setzen, und ergiebt sich, wenn p_1 bekannt ist, der resultirende Ausflussexponent m aus

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{v_0}{v} = \frac{v_0}{v_1}\frac{v_1}{v} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1}{m_0}}\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{1}{m_1}}$$

$$\frac{1}{m}\, lg\, \frac{p}{p_0} = \frac{1}{m_0}\, lg\, \frac{p_1}{p_0} + \frac{1}{m_1}\, lg\, \frac{p}{p_1} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (9)$$

und dann der resultirende Mittelwerth von n aus Gl. (1). Zur Bestimmung von p_1 hat man aber, wenn nach §. 28, Gl. (4)

$$v_1 = \frac{1}{\alpha p_1^{\mu}}$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$p_0 v_0^{m_0} = p_1 v_1^{m_0} = \frac{p_1^{1-\mu m_0}}{\alpha^{m_0}}$$

$$p_1 = [p_0(\alpha v_0)^{m_0}]^{\frac{1}{1-\mu m_0}} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (10).$$

Dabei ist, wenn die Pressungen in Atmosphären ausgedrückt werden,

$$\alpha = 0,6058 \quad \text{und} \quad \mu = 0,9393.$$

Ist der Wasserdampf im Gefässe trocken, aber gesättigt, so findet man nach Gl. (1) und Gl. (3) mit $n = 1,135$ beispielsweise

für $\zeta =$	0	0,05	0,1	0,25	0,5	1
$m =$	1,135	1,1278	1,1212	1,1052	1,0861	1,0632
$\frac{p'}{p_0} =$	0,5774	0,5789	0,5803	0,5835	0,5875	0,5925.

Bei der Expansion solchen Wasserdampfes ohne Mittheilung von Wärme findet eine theilweise Condensation desselben zu Wasser statt (§. 35), und muss er also auch hier im Ausflussquerschnitte feucht sein, so

lange ζ eine gewisse Grenze nicht überschreitet, während bei grösserem Widerstande und entsprechender Wärmeerzeugung die Condensation verhindert und der Dampf überhitzt werden kann. Er wird im Ausflussquerschnitte gerade gesättigt und trocken sein, wenn das vorausgesetzte Aenderungsgesetz von p und v:

$$pv^m = Const.$$

mit der Beziehung zwischen p und v für gesättigten trockenen Wasserdampf identisch, wenn also nach der empirischen Formel (4) in §. 28

$$m = \frac{1,135(1+\zeta)}{1+1,135\zeta} = 1,0646, \text{ d. h. } \zeta = 0,960$$

ist. Im letzten der obigen Fälle ($\zeta = 1$) war diese Grenze schon überschritten, somit für n ein Werth etwas $> 1,135$ zu setzen, der bei gegebenen Werthen von p und p_0 nach Gl. (9) und (10) berechnet werden kann. Z. B. für $p = 1$ Atm. und $p_0 = 4$ Atm. ergiebt sich:

$$p_1 = 1,648; \quad m = 1,0906; \quad n = 1,199.$$

Von technischem Interesse ist besonders der Ausfluss höher gespannten gesättigten Wasserdampfes in die Atmosphäre, z. B. die Ausströmung desselben durch das geöffnete Sicherheitsventil eines Dampfkessels. Indem dabei $p < p'$ zu sein pflegt, hat man nach Gl. (6), wenn p_0 in Atm. ausgedrückt ist und dem Obigen zufolge

$$\frac{1}{v} = 0,6058\, p_0^{\,0,9393}$$

bei Voraussetzung trockenen Dampfes im Kessel gesetzt wird, mit

$$C = \sqrt{\frac{9,81 \,.\, 0,6058\, m}{1+\zeta}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m-1}} \,.\, 10333}$$

$$G = \alpha A C p_0^{\,0,96965} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11$$

Mit obigen Werthen von m ergiebt sich

für $\zeta =$	0	0,05	0,1	0,25	0,5
$C =$	157,50	153,36	149,51	139,53	126,56

und wenn p_0 in Gl. (11) in Kgr. pro Quadratm. ausgedrückt wäre,

$C =$	0,02018	0,01965	0,01915	0,01788	0,01621.

§. 112. Versuche.

Versuche über den Ausfluss des Wasserdampfes sind bisher nicht in olchem Umfange und in solcher Weise angestellt worden, dass daraus die len Coefficienten α und ζ in den Formeln des vorigen §. für verschiedene Fälle beizulegenden Werthe mit genügender Zuverlässigkeit abgeleitet rerden könnten. Zum Theil aber können jene Versuche wenigstens insoern zur Prüfung der Formeln dienen, als sich annehmen lässt, dass die oefficienten α und ζ bei derselben Mündungsart nur wenig mit ihrer rösse und mit den Pressungen unter sonst gleichen Umständen veränerlich sind, so dass eine Bestätigung jener Formeln darin gefunden erden kann, wenn sie unter solchen Umständen mit wenig verschiedenen 'erthen von α, ζ den Versuchen sich anpassen lassen. Von solcher Art nd

1) die Versuche von Thrémery*, deren Resultate der französischen erordnung über die Dimensionen der Sicherheitsventile von Dampfsseln zu Grunde gelegt wurden. Aus einem möglichst gleichmässig geizten Dampfkessel liess man dabei den Dampf durch regulirbare rechtkige Mündungen in dünner Wand ausströmen und beobachtete deren össe $= A$ sowie die Dampfspannung im Kessel $= p_0$ für den Beharngszustand, bei welchem also gleichzeitig ebenso viel Dampf ausströmte e durch die Feuerung entwickelt wurde. Meistens war $\frac{p}{p_0}$ kleiner, als ' durch Gl. (3) des vorigen §. bestimmte Grenzwerth, so dass die Aussmenge nach Gl. (6) daselbst zu beurtheilen ist. Wird etwa $\zeta = 0{,}05$ l $n = 1{,}125$ angenommen, entsprechend 10% Wassergehalt des Dampfes Kessel, so ist $m = 1{,}118$ nach Gl. (1) und $\frac{p'}{p_0} = 0{,}581$ nach Gl. (3), lass bei Voraussetzung des normalen Atmosphärendrucks ausserhalb der ndung die Anwendbarkeit von Gl. (6) an die Bedingung

$$p_0 > \frac{760}{0{,}581}, \text{ d. i. } p_0 > 1308 \text{ Millim. Quecksilbersäule}$$

unden wäre. Wird nun m für die verschiedenen Versuche constant etzt, so folgt aus jener Gleichung (6) bei gleich intensiver Feuerung, gleichen Ausflussmengen G im Beharrungszustande:

$$\alpha \text{ proportional } \frac{1}{A}\sqrt{\frac{v_0}{p_0}}.$$

* Annales des mines, Tome XX, 1841.

und ergiebt sich insbesondere aus den Versuchen, wenn bei grösster Pressung p_0 und kleinster Oeffnung A der Proportionalwerth von $\alpha = 1$ gesetzt wird:

$A =$	255,10	229,59	204,08	178,57	Quadratmillim.
$p_0 =$	1418	1554	1731	1931	Millimeter.
α proportional	0,740	0,752	0,762	0,783	
$A =$	153,06	127,55	102,04	76,53	Quadratmillim.
$p_0 =$	2183	2509	2959	3596	Millimeter.
α proportional	0,811	0,851	0,906	1	

Die Verschiedenheit dieser Proportionalwerthe von α erscheint zu gesetzmässig, als dass sie durch zufällige Intensitätsschwankungen der Feuerung erklärt werden könnte. Wenn aber solche in merklichem Grade nicht vorkamen, so mussten die Heizgase mit um so höherer Temperatur entweichen, um so weniger Wärme folglich an den Kesselinhalt abgeben und musste ferner dieselbe Wärmemenge um so weniger Dampf im Kessel bilden (§. 27, Gl. 4), je höher die Pressung und die Temperatur im Kessel waren, so dass, unter C und β positive Constante verstanden, besser

$$\alpha A \sqrt{\frac{p_0}{v_0}} = C(1 - \beta p_0),$$

$$\text{folglich } \alpha \text{ proportional } \frac{1}{A}\sqrt{\frac{v_0}{p_0}}(1 - \beta p_0)$$

gesetzt worden wäre. Durch den hinzugekommenen Factor $(1 - \beta p_0)$ werden die Proportionalwerthe von α für die grösseren Pressungen um so mehr, als für die kleineren, vermindert; und wenn somit hierdurch die oben gefundenen Unterschiede von α zum Theil wenigstens ihre Erklärung finden, worauf auch schon Kolster* aufmerksam machte, erscheinen sie nicht mehr zu gross, um sie übrigens als den Ausdruck einer gesetzmässigen Abhängigkeit der Coefficienten α, μ von den Grössen A, p_0 halten zu dürfen.

2) Minary und Résal** liessen den Dampf durch verschiedene Mündungen am Ende eines Zuflussrohrs von 0,015 Mtr. Weite in eine Kammer ausströmen, von welcher ein trichterförmig sich erweiterndes Rohr nach einem Gefässe mit kaltem Wasser führte, so dass, indem der Rand des Trichters in das Wasser eintauchte, der ausgeströmte Dampf

* Ueber das Ausströmen von Dampf und Luft aus Gefässmündungen; Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, 1867, S. 711.

** Civilingenieur, 1862, S. 101 und 1866, S. 361.

condensirt wurde und die Ausflussmenge in einer gewissen Zeit (von 10 bis 30 Minuten) aus der Gewichtszunahme des Wassergefässes gefunden werden konnte. In Folge der Schnelligkeit, womit diese Condensation erfolgte, sank die Pressung p ausserhalb der Mündung in der vorgenannten Kammer unter den Atmosphärendruck und wurde durch ein Manometer gemessen, während die Pressung p_0 im Zuflussrohr 0,5 Mtr. von der Mündung entfernt beobachtet wurde. Das Zuflussrohr des Dampfes war theils durch Dampf von aussen so erwärmt, theils durch Umhüllung so gegen Abkühlung geschützt, dass an der Stelle, wo die Pressung p_0 gemessen wurde, der Zustand des Dampfes (nach Ansicht der Experimentatoren) stets nur wenig vom Zustande trockener Sättigung entfernt sein konnte. Folgende Tabelle enthält die so gefundenen Werthe von p (Atm.) und G (resp. $1200\,G$, nämlich die Ausflussmenge in Kgr. in 20 Minuten) bei verschiedenen Werthen von p_0 (Atm.) nebst den der Tabelle in §. 29 zu entnehmenden Werthen von $\gamma_0 = \frac{1}{v_0}$ für eine Kreismündung in dünner Wand von 4 Millim. Durchmesser und für ein conisches Mundstück von 5 Millim. Mündungsweite, mit welchem die 15 Millim. weite Zuflussröhre bei allmähliger Verjüngung auf einer Länge von 42 Millim. endigte.

p_0	γ_0	Kreismündung in dünner Wand.			Conisches Mundstück.		
		p	$1200\,G$	α	p	$1200\,G$	α
1,39	0,8260	0,964	2,650	0,840	0,967	2,500	1,037
1,95	1,1556	0,955	4,300	0,939	0,908	3,650	1,041
2,51	1,4397	0,816	5,500	0,948	0,855	4,600	1,036
3,04	1,7235	0,743	6,817	0,976	0,789	5,600	1,047
3,60	2,0203	0,724	7,800	0,948	0,737	6,500	1,032
4,20	2,3349	0,671	6,067	0,949	0,711	7,500	1,025
4,79	2,6415	0,645	10,200	0,940	0,671	8,400	1,011
5,37	2,9406	0,618	11,233	0,926	0,671	9,375	1,010
			Mittel =	0,933		Mittel =	1,030

Der Umstand, dass der Dampf an der Stelle, wo p_0 gemessen wurde, schon eine gewisse Geschwindigkeit u_0 besass, nämlich, unter F den Querschnitt des Zuflussrohrs verstanden,

$$u_0 = \frac{G}{\gamma_0 F} = 15 \text{ bis } 18 \text{ Mtr. pro Sec.},$$

konnte dadurch näherungsweise berücksichtigt werden, dass p_0 um

$$\frac{\gamma_0 H_0}{10333} = \frac{\gamma_0}{10333} \frac{u_0^2}{2g}$$

vergrössert wird; doch liegt diese Correction, die in den verschiedenen Fällen nur = 0,001 bis 0,005 Atm. gefunden wird, vermuthlich innerhalb der Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers der (durch ein geschlossenes Quecksilbermanometer) beobachteten Werthe von p_0. Der Widerstandscoefficient ζ betrifft hier theils den durch die Mündung resp. das Mundstück selbst verursachten kleinen Widerstand, theils denjenigen des 0,5 Mtr. langen Stücks der Zuleitungsröhre von der Messungsstelle der Pressung p_0 bis zur Mündung. Der diesem letzteren entsprechende Widerstandscoefficient ist, wenn wie für Luft nach §. 106, Gl. (10) mit u = 1[illegible], $d = 0{,}015$

$$\lambda = 0{,}01355 + \frac{\frac{0{,}001235}{0{,}015} + 0{,}01}{4} = 0{,}0366$$

gesetzt wird, bezogen auf die Geschwindigkeit im Zuflussrohr

$$= 0{,}0366 \frac{500}{15} = 1{,}22$$

und ergiebt sich danach bezogen auf die viel grössere Geschwindigkeit im Ausflussquerschnitte, d. h. als Bestandtheil von ζ so klein, dass der gesammte Bewegungswiderstand ohne erheblichen Fehler als aufgewogen durch die lebendige Kraft betrachtet werden kann, die der Dampf an der Stelle, wo p_0 gemessen wurde, schon besass. Wenn sonach bei uncorrigirten Werthen von p_0

$$\zeta = 0 \quad \text{und} \quad m = n = 1{,}135$$

gesetzt wird, so ist nach Gl. (3) im vorigen §.

$$\frac{p'}{p_0} = 0{,}5774$$

und nur bei den ersten der obigen je 8 Versuche $p > p'$, also u nach Gl. (4) im vorigen §. zu berechnen, während in allen übrigen Fällen Gl. (6) zu Grunde zu legen ist. Auf diese Weise sind die Werthe [illegible] in obiger Tabelle berechnet worden. Ihre geringe Verschiedenheit für die verschiedenen Fälle bei jeder von beiden Versuchsreihen kann als Bestätigung der benutzten Formeln betrachtet werden, doch sind die Mittelwerthe = 0,933 und 1,03 offenbar zu gross, und bleibt es ungewiss, wieweit die Messungsfehler von p_0, p und A sowie die Voraussetzungen

Zustandes trockener Sättigung in Betreff des der Mündung zuströmenden Dampfes jene Werthe störend beeinflusst haben mögen.

3) Napier* stellte Versuche über den Ausfluss gesättigten Wasserdampfes auch in der Weise an, dass er den Dampf in eine Vorlage ausströmen liess, von welcher er durch ein Rohr in Wasser geleitet und dadurch condensirt wurde. Die Gewichtsmenge des in einer gewissen Zeit ausgeflossenen Dampfes wurde aber nicht aus der Gewichtszunahme, sondern aus der Temperaturerhöhung dieses Wassers und des dasselbe enthaltenden eisernen Gefässes abgeleitet, während die Pressung theils vor der Mündung im Zuflussrohre (vielfach zugleich in verschiedenen Entfernungen von der Mündung), theils unmittelbar hinter derselben in der Vorlage gemessen wurde; letztere ($= p$) konnte zwischen weiten Grenzen variirt werden durch entsprechende Wahl der Weite des zum Wassergefässe leitenden Abflussrohrs.

Auf Grund gewisser theoretischer Betrachtungen, die übrigens nicht als streng wissenschaftlich bezeichnet werden können, setzt Napier:

$$G = CA\sqrt{\frac{(p_0 - p)p}{p_0 v_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

unter C eine Constante verstanden. Indem aber dieser Ausdruck bei gegebenen Werthen von p_0 und v_0 für $p = \frac{1}{2}p_0$ ein Maximum wird, während es undenkbar ist, dass bei weiter abnehmender Grösse der äusseren Pressung unter sonst gleich bleibenden Umständen die Ausflussmenge abnehmen sollte, betrachtet Napier jene Gleichung (1) nur für $\frac{p}{p_0} > \frac{1}{2}$ als zutreffend, und setzt dagegen für $\frac{p}{p_0} < \frac{1}{2}$ die Ausflussmenge beständig so gross wie für $\frac{p}{p_0} = \frac{1}{2}$, also unabhängig von p, nämlich:

$$G = \frac{1}{2}CA\sqrt{\frac{p_0}{v_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Mit seinen Versuchen findet er diese Formeln in sehr befriedigender Uebereinstimmung, wenn unter der Voraussetzung, dass G in Kgr. pro Sec., A in Quadratm., p und p_0 in Atm. und die specif. Volumina in Cubikm. pro Kgr. ausgedrückt sind,

* „On the velocity of steam and other gases, and the true principles of the discharge of fluids," theilweise bearbeitet von Prof. A. Fliegner im „Civilingenieur", Bd. XVII (1871).

für eine kurze cylindrische Ansatzröhre mit gut abgerundetem inneren Rande: $C = 420$,

für eine Kreismündung in dünner Wand: $C = 382$

gesetzt wird. Sofern dem Widerstandscoefficienten ζ in beiden Fällen ein nahe gleicher kleiner Werth beizulegen, der Contractionscoefficient α aber im ersten Falle $= 1$ zu setzen ist, wäre derselbe hiernach im zweiten Falle ungefähr:

$$\alpha = \frac{382}{420} = 0{,}91.$$

Aus der Beschreibung der Versuche geht dabei übrigens nicht deutlich hervor, in welchem Grade die Contraction etwa nur unvollkommen war in Folge eines nicht sehr kleinen Verhältnisses der Mündungsweite zur Weite des Zuflussrohrs.

Die meisten Versuche entsprachen dem Falle: $\frac{p}{p_0} < \frac{1}{2}$, für welchen Gl. (2) mit Gl. (6) im vorigen §. von einerlei Form ist. Setzt man in der letzteren für das cylindrische abgerundete Mundstück $\alpha = 1$, $\zeta = 0{,}0$ und $n = 1{,}135$ gemäss der auch von Napier zu Grunde gelegten Annahme, dass im Inneren der Dampf zwar gesättigt, aber trocken war, so wäre $m = 1{,}1278$ und

$$C = 2\sqrt{2g\frac{n}{n-1}\frac{m-1}{m+1}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{2}{m-1}}.10333} = 394;$$

auch mit $\zeta = 0$ ergäbe sich C noch etwas < 420. Durch die mangelhafte Bestimmungsweise von G aus den Versuchen ist diese Differenz nicht zu erklären, da Fliegner auf Grund einer genaueren Bestimmung des Coefficienten C noch grösser findet, als Napier; dagegen kann es der Fall sein, dass der Dampf schon vor dem Ausflusse feucht war.

Andere Versuche Napier's bezweckten die Bestimmung der Druckänderung in einem mit voller Weite ausmündenden cylindrischen Ansatzrohre, indem verschiedene Stellen desselben durch abgezweigte enge Seitenröhren mit Manometern verbunden wurden. Waren auch die benutzten Ausflussröhren zu kurz, als dass mit einiger Zuverlässigkeit auf das Gesetz des Leitungswiderstandes von Wasserdampf in Röhren aus diesen Versuchen geschlossen werden könnte, so sind sie doch von Interesse, namentlich als unmittelbare Bestätigung der Annahme, dass die Pressung p' im kleinsten Querschnitte, der hier mit dem Mündungsquerschnitte identisch war, nicht kleiner, als ungefähr $0{,}5\,p_0$ werden kann, wie sehr

uch die äussere Pressung p kleiner, als die innere Pressung p_0 sein mag. ei Versuchen mit der innen gut abgerundeten kurzen cylindrischen Anzröhre von 14,3 Millim. Weite z. B. ergab sich die Pressung p' im Inren der Röhre, wenige Millimeter von der Mündung entfernt, also auch hezu die Pressung in dieser selbst für $p = 1$ Atm. und

$p_0 =$	1,933	2,000	2,067	4,000	Atm.
$p' =$	1,025	1,067	1,100	2,200	„
$\frac{p'}{p_0} =$	0,530	0,533	0,532	0,550.	

In anderen Fällen wurde $\frac{p'}{p_0} < 0,5$ gefunden, stets aber wenig verchieden trotz sehr verschiedener Werthe von p_0 bei gleichen Werthen on $p < 0,5 p_0$ oder sehr verschiedener Werthe von p bei gleichen Ferthen von $p_0 > 2p$, z. B. bei einem Rohr von 762 Millim. Länge und 1,3 Millim. Weite für $p = 1$ Atm. und

$p_0 =$	$2\,^1/_3$	$2\,^2/_3$	3	$3\,^1/_3$	$3\,^2/_3$	4	Atm.
$p' =$	1,033	1,133	1,233	1,333	1,417	1,500	„
$\frac{p'}{p_0} =$	0,443	0,425	0,411	0,400	0,386	0,375	

d bei einem Rohr von 95 Millim. Länge und 14,3 Millim. Weite bei $= 4$ Atm. und

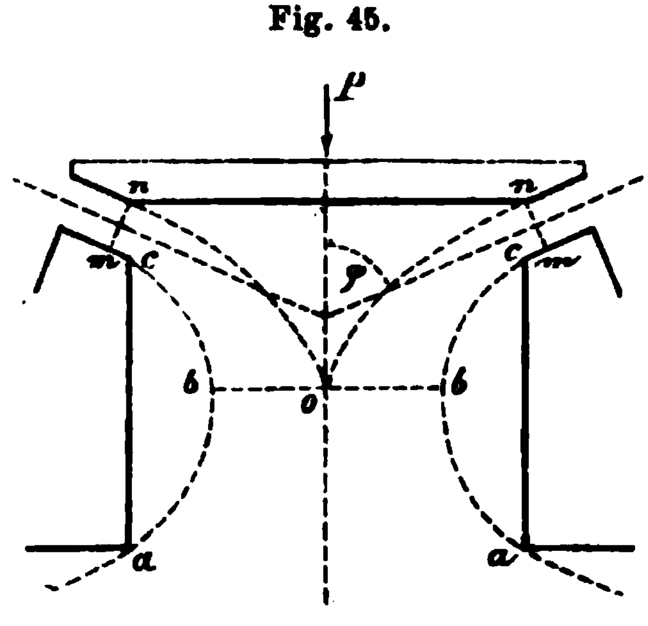
$p =$	1,800	1,000	0,667	Atm.
$p' =$	1,767	1,767	1,783	„
$\frac{p'}{p_0} =$	0,442	0,422	0,446.	

ersteren dieser beiden Fälle nimmt zwar $\frac{p'}{p_0}$ merklich ab mit dem rhältnisse $\frac{p}{p_0}$, jedoch in viel geringerem Grade, als dieses. Fliegner a. O. macht übrigens auf verschiedene Umstände aufmerksam, wodurch h die Zuverlässigkeit der Napier'schen Versuche beeinträchtigt wird.

§. 113. Sicherheitsventile von Dampfkesseln.

Für das Sicherheitsventil eines Dampfkessels mit verticaler Axe und im Allgemeinen conischer Sitzfläche (Fig. 45) sei

Fig. 45.



φ der halbe Oeffnungswinkel dieser Kegelfläche,

d der Durchmesser des Ventilrohrs (= aa = cc, Fig. 45) = dem Durchmesser der unteren ebenen Ventilfläche,

$F = \frac{\pi d^2}{4}$ der entsprechende Querschnitt,

f die Horizontalprojection der Sitzfläche,

$h = nc$ die Hubhöhe, wenn

p_0 die Pressung im Inneren des Kessels,

p die äussere atmosphärische Pressung,

P die Belastung incl. Eigengewicht des Ventils ist.

Ist $nm = h \sin\varphi$ das Perpendikel von einem Punkte der Kreislinie nn auf den Ventilsitz, so ist die Kegelfläche, welche durch Drehung von nm um die Ventilaxe erzeugt wird, als der kleinste Querschnitt $= aA$ des ausfliessenden Dampfstroms anzunehmen, der überhaupt von seinem Eintritt in das Ventilrohr bis zu jener Stelle die Form eines Umdrehungskörpers hat etwa wie derjenige, dessen Meridianschnitt die Fläche $abcmnonmcba$ (Fig. 45) ist. Unter der Voraussetzung vollkommener Trockenheit des gesättigten Dampfes im Kessel an der Stelle des Ventils und Vernachlässigung der Bewegungswiderstände bis zum kleinsten Querschnitt

$$\alpha A = \pi(d + h \sin\varphi \cos\varphi) h \sin\varphi = 4F\left(1 + \frac{h}{d} \sin\varphi \cos\varphi\right) \frac{h}{d} \sin\varphi$$

ist dann die Pressung in diesem nach §. 111:

$$p' = 0{,}5774 p_0,$$

$$\text{wenn } p < p', \text{ also } p_0 > \frac{p}{0{,}5774} = 1{,}732 p$$

ist, und die Ausflussmenge im Beharrungszustande nach Gl. (11), §. 111

$$G = \alpha A C p_0^{0,96965} \text{ mit } C = 157{,}5,$$

wenn p_0 in Atm. ausgedrückt wird, also mit Rücksicht auf obigen Ausdruck von αA und mit Hinzufügung eines erfahrungsmässig zu bestimmenden Correctionscoefficienten μ:

$$G = 630 \mu F \left(1 + \frac{h}{d} \sin\varphi \cos\varphi\right) \frac{h}{d} \sin\varphi \,.\, p_0^{0,96965} \ldots\ldots$$

und insbesondere bei ebener Sitzfläche $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$G = 630 \mu \frac{h}{d} F p_0^{0,96965} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Kgr. pro Sec., vorausgesetzt dass F in Quadratmetern ausgedrückt ist. Die Werthe von

$$p_0^{0,96965} = f(p_0)$$

können der folgenden Tabelle entnommen werden event. durch Interpolation mit Hülfe der darin gleichfalls angegebenen Differenzen für eine Pressungsdifferenz von 0,1 Atm.

p_0	$f(p_0)$	Diff.	p_0	$f(p_0)$	Diff.	p_0	$f(p_0)$	Diff.
					[illegible]			[illegible]
1,5	1,4816		4,5	4,2991		7,5	7,0550	
		0,0954			0,0925			0,0911
2	1,9584		5	4,7616		8	7,5107	
		0,0946			0,0922			0,0909
2,5	2,4315		5,5	5,2226		8,5	7,9654	
		0,0940			0,0920			0,0908
3	2,9016		6	5,6824		9	8,4194	
		0,0936			0,0917			0,0906
3,5	3,3694		6,5	6,1410		9,5	8,8725	
		0,0932			0,0915			0,0905
4	3,8352		7	6,5986		10	9,3250	

Aus Versuchen von Kolster,* deren einzelne Resultate freilich sehr bedeutend von einander abweichen (besonders ohne Zweifel infolge der Fehler, welche den schwierig zu messenden sehr kleinen Hubhöhen h des schwebenden Ventils anhaften) ergab sich im Mittel

für ein Ventil mit ebener Sitzfläche $\mu = 0,98$

„ „ „ „ conischer „ $\mu = 0,89$.

Wenn bei wachsender Dampfspannung im Kessel das Sicherheitsventil abzublasen anfängt, ist seine Hubhöhe h Anfangs nur verschwindend klein, nimmt aber allmählig mehr und mehr zu, wenn die Dampfspannung p_0 zu wachsen fortfährt; mit p_0 und h wächst gleichzeitig die Ausflussmenge G. Wird nun vom Sicherheitsventil verlangt,

1) dass es abzublasen anfange, wenn die Pressung im Kessel einen gegebenen Werth p_1 erreicht hat,
2) dass es eine gegebene Dampfmenge $= G$ Kgr. pro Sec. entweichen lasse, wenn die Pressung im Kessel einen gleichfalls gegebenen Werth p_0 ($> p_1$) erreicht hat,
3) dass diese letztere Pressung p_0 als Maximum constant bleibt, wenn G

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1867, S. 443.

die Dampfmenge bedeutet, welche pro Sec. mehr im Kessel entwickelt als ihm anderweitig entzogen wird, so können durch diese zwei Bedingungen zwei Grössen bestimmt werden, insbesondere die Grösse des Ventils (der Querschnitt des Ventilrohrs $= F$ Quadratm.) und die Ventilbelastung $= P$ Kgr., wenn ferner gegeben sind: die äussere Pressung $= p$, die Form der Sitzfläche (der Winkel φ) und ihre Grösse $= f$ Quadratm. (absolut oder im Verhältniss zu F), vorausgesetzt dass die Pressung $= p_2$, welche im Augenblicke der Erhebung des Ventils in der Sitzfläche stattfindet, und die Hubhöhe h als Functionen der übrigen Grössen bekannt resp. bestimmbar sind.

Der ersten obiger Forderungen entspricht, wenn die Dampfspannungen in Kgr. pro Quadratm. ausgedrückt sind, die Gleichung:

$$P = F(p_1 - p) + f(p_2 - p) = (F + \varphi f)(p_1 - p) \dots$$

$$\text{mit} \quad \varphi = \frac{p_2 - p}{p_1 - p}; \quad \frac{p_2}{p_1} = \varphi + \frac{p}{p_1}(1 - \varphi) \dots\dots$$

Die Verhältnisszahl φ kann nur erfahrungsmässig bestimmt werden durch Versuche mit Ventilen, deren Sitzflächen nicht sehr klein sind. Von den beiden Ventilen, welche Kolster bei seinen oben erwähnten Versuchen benutzte, ist das mit der ebenen Sitzfläche wegen zu kleinen Verhältnisses $\frac{f}{F}$ ($= 0{,}0816$) zu diesem Zwecke nicht geeignet; aus den Versuchen mit dem conischen Ventil von

$2\frac{1}{32}$ schwed. Zoll (50,25 Millim.) innerem Durchmesser,
$2\frac{11}{32}$ " " (58,0 ") äusserem " ,
$\frac{1}{16}$ " " (1,55 ") Höhe

der Sitzfläche $\left(\frac{f}{F} = 0{,}308\right)$ ist zu entnehmen:

$$\varphi = \frac{p_2 - p}{p_1 - p} = 0{,}32 \text{ und } \frac{p_2}{p_1} = 0{,}49 \text{ für } \frac{p_1}{p} = 4.$$

Aus 6 Versuchen von A. v. Burg* mit einem Ventil von

21 oestr. Linien (46,1 Millim.) innerem,
24 " " (52,7 ") äusserem Durchmesser

* Sitzungsberichte der math. naturw. Cl. der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien, Bd. XLV, Abth. II, S. 285.

der ebenen Sitzfläche (also $\frac{f}{F} = \frac{15}{49} = 0,306$) bei $\frac{p_1}{p} = 1,6$ bis $5,7$ ergiebt sich im Mittel

$$\varphi = \frac{p_2 - p}{p_1 - p} = 0,72$$

ohne ersichtliche Abhängigkeit der übrigens bedeutend differirenden Einzelwerthe φ von jenem Verhältnisse $\frac{p_1}{p}$. Im Mittel ergiebt sich

$$\frac{p_2}{p_1} = 0,80 \quad \text{für} \quad \frac{p_1}{p} = 3,6.$$

Das Abhängigkeitsgesetz der Hubhöhe h, wovon die Erfüllung der zweiten obiger Forderungen abhängt, kann man auf folgende Weise zu bestimmen suchen unter der Voraussetzung, dass es einen gewissen zur Ventilaxe senkrechten ebenen Querschnitt bb (Fig. 45) des Dampfstroms im Ventilrohr giebt, in dessen Durchschnittspunkten mit den Bahnen der Dampftheilchen letztere als geradlinig zu betrachten sind. In diesem Querschnitte, dessen Grösse mit kF bezeichnet sei, herrscht dann eine gleichförmige Pressung $= xp_0$ und Geschwindigkeit $= y$, und dieselbe Pressung xp_0 herrscht in dem ringförmigen Raum mit dem Querschnitt bca, welcher, mit ruhendem oder wenigstens nicht strömendem Dampf erfüllt, den Dampfstrom im Ventilrohr rings umgiebt. In dem gleichfalls von nicht strömendem Dampf erfüllten Raum $onno$ (Fig. 45) zwischen der Unterfläche des schwebenden Ventils und dem Dampfstrom sei die Pressung $= ap_0$. Sie ist, wenn in dem ganzen schmalen ringförmigen Raum, den die Sitzfläche des Ventils bei seiner Erhebung beschreibt, die Pressung näherungsweise $= p' =$ der Pressung im kleinsten Querschnitte aA gesetzt wird, bestimmt durch die Gleichung:

$$P = F(ap_0 - p) + f(p' - p),$$

also nach Gl. (3): $ap_0 = p_1$ oder

$$a = \frac{p_1}{p_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

wenn $p_2 = p'$ oder $\frac{p_2}{p_1} = \frac{p'}{p_0}\frac{p_0}{p_1} = \frac{0,5774}{a}$, d. h. $\frac{p_2}{p_1}$ etwas $> 0,5774$ gesetzt wird, was den obigen Angaben zufolge besonders bei Ventilen mit ebener Sitzfläche nahe zutreffend zu sein scheint, bei sehr schmaler Sitzfläche aber stets nur mit sehr kleinem Fehler verbunden sein kann.

Bezeichnet nun u' die Geschwindigkeit im kleinsten Querschnitte aA,

so ist bei Abstraction von Bewegungswiderständen bis zu diesem Querschnitte (entsprechend $m = n = 1{,}135$) nach §. 111, Gl. (5) und (6):

$$u' = \sqrt{2g \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n+1} p_0 v_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots 6$$

und mit $f(n) = \frac{n-1}{n+1} \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{2}{n-1}}$

$$G = \alpha A \sqrt{2g \frac{n}{n-1} \frac{p_0}{v_0} f(n)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots 7$$

ferner nach §. 111, Gl. (2) und (4), vorausgesetzt dass $x > \frac{p'}{p_0}$, d. h. $x >$ 0,5774 ist,

$$y = \sqrt{2g \frac{n}{n-1} p_0 v_0 \left(1 - x^{\frac{n-1}{n}}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots 8$$

$$G = kFx^{\frac{1}{n}} \sqrt{2g \frac{n}{n-1} \frac{p_0}{v_0} \left(1 - x^{\frac{n-1}{n}}\right)} \quad \ldots \ldots 9$$

Die Gleichsetzung beider Ausdrücke von G nach Gl. (7 und 9) liefert:

$$\frac{\alpha A}{F} = 4\left(1 + \frac{h}{d} \sin\varphi \cos\varphi\right) \frac{h}{d} \sin\varphi = \frac{k}{\sqrt{f(n)}} x^{\frac{1}{n}} \sqrt{1 - x \ldots}$$

Eine zweite Relation ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dass der Zuwachs an Bewegungsgrösse, den die zwischen den Querschnitten kF und αA enthaltene Dampfmasse (mit dem Meridianschnitt *bcmnomcb* in Fig. ...) im Sinne der Ventilaxe im Zeitelement dt erfährt, d. i. für den vorausgesetzten Beharrungszustand der dem Uebergange vom Querschnitt kF zum Querschnitt αA entsprechende Zuwachs an Bewegungsgrösse $= \frac{G}{g}$ ... dt im Sinne der Ventilaxe, = ist dem Antrieb der äusseren Kräfte, d. h. bei Abstraction von der hier ganz unwesentlichen äusseren Massenkraft (Schwerkraft) = der mit dt multiplicirten algebraischen Summe der Kräfte, welche auf die Oberfläche jener zwischen kF und αA ... strömenden Dampfmasse im Sinne der Ventilaxe ausgeübt werden. Es folgt nach Division mit dt und mit Rücksicht auf die Annahme einer gleichförmigen Pressung $= p'$ in der durch Umdrehung der geraden Linie *omn* entstehenden Doppelkegelfläche:

$$\frac{G}{g}(u'\cos\varphi - y) = F(x - a)p_0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

und nach Substitution der Ausdrücke von u', y und G nach Gl. (6), (8) und (9):

$$\frac{2nk}{n-1}x^{\frac{1}{n}}\sqrt{1 - x^{\frac{n-1}{n}}}\left(\cos\varphi\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} - \sqrt{1 - x^{\frac{n-1}{n}}}\right) = x - a$$

$$a = x + \frac{2nk}{n-1}x^{\frac{1}{n}}\left[1 - x^{\frac{n-1}{n}} - \cos\varphi\sqrt{\frac{n-1}{n+1}\left(1 - x^{\frac{n-1}{n}}\right)}\right] . (12).$$

Hierdurch ist x und dann durch Gl. (10) auch $\frac{\alpha A}{F}$ resp. $\frac{h}{d}$ als Function von a, k und φ bestimmt. Dem Augenblick der Erhebung des Ventils von seinem Sitze, für welchen $p_0 = p_1$, also $a = 1$ ist, entsprechen die Werthe $x = 1$ und $h = 0$ unabhängig von k und φ, wie es sein muss. Ist p_0 nur wenig $> p_1$, also a nur wenig < 1, so wird auch x nur wenig < 1 und, wenn

$$1 - x^{\frac{n-1}{n}} = \xi$$

gesetzt wird, ξ ein kleiner Bruch sein; behufs einer ersten Annäherung kann dann

$$x = (1 - \xi)^{\frac{n}{n-1}} = 1 - \frac{n}{n-1}\xi; \quad x^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n-1}\xi$$

gesetzt werden und somit nach Gl. (12):

$$a = 1 - \frac{n\xi}{n-1} + \frac{2nk}{n-1}\left(1 - \frac{\xi}{n-1}\right)\left[\xi - \cos\varphi\sqrt{\frac{n-1}{n+1}\xi}\right]$$

oder bei Vernachlässigung der Glieder mit höheren Potenzen von ξ, als der ersten,

$$a = 1 - \frac{n}{n-1}(1 - 2k)\xi - \frac{2nk}{n-1}\cos\varphi\sqrt{\frac{n-1}{n+1}\xi}$$

$$\xi + \frac{2k}{1-2k}\cos\varphi\sqrt{\frac{n-1}{n+1}\xi} = \frac{n-1}{n}\,\frac{1-a}{1-2k} \;\ldots\; (13).$$

Der durch diese Gleichung bestimmte Werth von ξ liefert einen Näherungswerth von $\frac{h}{d}$ nach Gl. (10):

$$\frac{h}{d}\sin\varphi\left(1+\frac{h}{d}\sin\varphi\cos\varphi\right)=\frac{k}{4\sqrt{f(n)}}\left(1-\frac{\xi}{n-1}\right)\sqrt{\xi}$$

$$=\frac{k}{4}\sqrt{\frac{n-1}{f(n)}}\left(1-\frac{\xi}{n-1}\right)\sqrt{\frac{\xi}{n-1}}\ \ldots\ldots\ 14.$$

Insbesondere für ein Ventil mit ebener Sitzfläche ($\cos\varphi = 0$), für welchen Fall $k < 0{,}5$ sein muss, damit

$$\xi=\frac{n-1}{n}\,\frac{1-a}{1-2k}>0$$

sei, ergiebt sich:

$$\frac{h}{d}=\frac{k}{4}\sqrt{\frac{n-1}{f(n)}}\left(1-\frac{1}{n}\,\frac{1-a}{1-2k}\right)\sqrt{\frac{1}{n}\,\frac{1-a}{1-2k}}\ \ldots\ 15$$

Die allgemeine Form dieser Gleichung ist:

$$\frac{h}{d}=C\left(1-\frac{1-a}{m}\right)\sqrt{\frac{1-a}{m}}\ \ldots\ldots\ 16$$

deren Coefficienten C und m, obgleich sie wegen

$$k=4C\sqrt{\frac{f(n)}{n-1}}=\frac{n-m}{2n}$$

mit $n = 1{,}135$ in der Beziehung

$$3{,}83\,C+m=1{,}135$$

stehen sollten, doch besser unabhängig von einander erfahrungsmässig zu bestimmen wären, um die Mängel der Formel bis zu gewissem Grade dadurch zu beseitigen.

Dass übrigens Gl. (15) bei Voraussetzung eines constanten Coefficienten k (ebenso die etwas allgemeinere Gleichung (16) bei Voraussetzung constanter Coefficienten C und m) nicht auf beliebig kleine Werte von a ausgedehnt werden kann, ist daraus zu entnehmen, dass ihr ein Maximum von h entsprechen würde:

$$max.\frac{h}{d}=\frac{k}{6\sqrt{3}}\sqrt{\frac{n-1}{f(n)}}\ \text{für}\ \frac{1}{n}\,\frac{1-a}{1-2k}=\frac{1}{3},$$

insbesondere mit $n = 1{,}135$:

$$max.\frac{h}{d}=0{,}228k\ \text{für}\ a=0{,}622+0{,}756k,$$

so dass bei weiter abnehmender Grösse von a, also bei weiter zunehmender Pressung p_0 die Hubhöhe h wieder abnehmen würde, was offenbar

unmöglich ist. Unter diesen Umständen und weil auch k nach einem übrigens nur empirisch bestimmbaren Gesetze mit a veränderlich sein kann, mag mit **Kolster*** für das Verhältniss $\frac{h}{d}$ eine Gleichung von der Form

$$\frac{h}{d}\sin\varphi = C\left(1-\sqrt{\frac{1}{A}}\right) \text{ mit } A=\frac{1}{a}=\frac{p_0}{p_1} \; \ldots\ldots (17)$$

angenommen werden, welcher $h = 0$ für $p_0 = p_1$ und

$$\frac{d\left(\frac{h}{d}\right)}{dA} = \frac{C}{2\sin\varphi}\,\frac{1}{A^{\frac{3}{2}}}$$

ntspricht, so dass danach, wenn p_0 oder A ohne Ende wächst (a bis Null bnimmt), auch die Hubhöhe beständig wächst, indem sie mit abnehmender chnelligkeit sich der Grenze $\frac{C}{\sin\varphi}\,d$ nähert, wie es offenbar den thatsächichen Verhältnissen entsprechend ist, wenn der Constanten C ein Werth ahe $= 0{,}25$ beigelegt wird entsprechend einem kleinsten Querschnitte wischen Ventilsitz und Ventil = dem Querschnitte F des Ventilrohrs.

Aus Versuchen von v. **Burg** (am oben angeführten Orte beschrieben) it einem Ventil von ebener Sitzfläche (innerer Durchm. = 46,1 Millim., usserer = 52,7 Millim.) bei Pressungen bis 5 Atm. und bis etwa $^1/_3$ abehmenden Werthen von a leitete **Kolster** die Formel ab:

$$\frac{h}{d} = 0{,}3\left(1-\sqrt{\frac{1}{A}}\right) = 0{,}3\,(1-\sqrt{a}),$$

elche mit Rücksicht auch auf conische Sitzflächen verallgemeinert werden ag zu:

$$\frac{h}{d}\sin\varphi = 0{,}3(1-\sqrt{a}) \; \ldots\ldots\ldots\ldots (18).$$

uch **Kolster's** eigene Versuche mit einem ebenen und einem conischen entil, bei denen aber a stets nur wenig < 1 war ($a > 0{,}92$), entrechen dieser Formel insoweit, als bei dem weniger genauen Messungsrfahren der kleinen Hubhöhen h erwartet werden kann. —

Um nun den beiden oben genannten Forderungen zu genügen, dass as **Ventil bei der Pressung** p_1 **angehoben werden und bei der rösseren Pressung** p_0 **so weit gehoben sein soll**, dass es G Kgr.

---

* Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure, 1867, S. 722.

Dampf pro Sec. entweichen lässt, hat man nach Gl. (1), worin ohne wesentlichen Fehler immer

$$1 + \frac{h}{d} \sin\varphi \cos\varphi = 1$$

gesetzt werden kann, mit Rücksicht auf Gl. (18) und mit $a = \frac{p_1}{p_0}$ die erforderliche Grösse der vom inneren Rande der Sitzfläche umgrenzten Kreisfläche:

$$F = \frac{1}{189\mu} \frac{G}{(1 - \sqrt{a})\, f(p_0)} \text{ Quadratmeter}$$

$$= \frac{55\, G}{(1 - \sqrt{a})\, f(p_0)} \text{ Quadratcentimeter} \quad \ldots\ldots\ 19.$$

entsprechend $\mu = 0{,}962$; der Werth von $f(p_0)$ ist dabei obiger Tabelle zu entnehmen. Wird dann die Breite der Sitzfläche, also f entsprechend angenommen, so ergiebt sich die nöthige Ventilbelastung P (incl. Eigengewicht) aus Gl. (3) mit einem angenommenen Werth von φ, etwa $\varphi =$ [illegible]. Die Unsicherheit dieses Coefficienten φ macht eine möglichst schmale Sitzfläche zweckmässig.

Wenn man vom Sicherheitsventil verlangt, dass es bei der Maximalpressung p_0 die ganze im Kessel entwickelte Dampfmenge entweichen lasse, wenn man also in Gl. (19)

$$G = mH$$

setzt, unter H die Heizfläche (feuerberührte Fläche) des Kessels in Quadratm. und unter m die pro Sec. und Quadratm. Heizfläche verdampfte Wassermenge in Kgr. verstanden, so muss für jene Pressung p_0 ein wesentlich grösserer Werth zugelassen werden, als für diejenige $= p_1$, bei welcher das Ventil abzublasen anfangen soll, widrigenfalls letzteres übermässig gross gemacht werden müsste. Macht man z. B. nach einer Formel, welche, auf den im vorigen §. besprochenen Thrémery'schen Versuchen beruhend, seitdem in die Dampfkesselregulative mehrerer Staaten übergegangen,

$$d = 2{,}6 \sqrt{\frac{H}{p_0 - 0{,}412}} \text{ Centim.,}$$

worin p_0 in Atm. ausgedrückt vorausgesetzt ist, also

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{1{,}69\,\pi H}{p_0 - 0{,}412} \text{ Quadratcentim.,}$$

so folgt aus der Vergleichung mit dem Ausdrucke (19), wenn darin $G = mH$ gesetzt wird,

$$1 - \sqrt{a} = 1 - \sqrt{\frac{p_1}{p_0}} = \frac{55\,m}{1{,}69\,\pi}\,\frac{p_0 - 0{,}412}{f(p_0)} \quad \ldots\ldots (20).$$

Der Coefficient m (bei forcirter Heizung und mässig grosser Heizfläche bis auf etwa 0,025 zu steigern) kann für gewöhnliche stationäre Dampfkessel und Schiffs-Röhrenkessel durchschnittlich = 0,009, für Locomotivkessel = 0,015, für Schiffskessel mit weiten Feuerzügen = einem dazwischen liegenden Werthe gesetzt werden, und man findet aus Gl. (20) beispielsweise

	für $p_0 =$	2	4	8 Atm.	
$A = \frac{1}{a} = \frac{p_0}{p_1}$	=	1,17	1,20	1,22	mit $m = 0{,}009$
	=	1,24	1,28	1,31	„ $m = 0{,}012$
	=	1,31	1,37	1,41	„ $m = 0{,}015$.

Um die Rücksicht auf Verhinderung der Möglichkeit einer übermässig grossen Dampfspannung mit der Rücksicht auf praktisch angemessene Dimensionen des Sicherheitsventils zu vereinigen, ist in Gl. (19) für a ein solcher Werth anzunehmen, welcher zur Folge hat, dass p_0 stets noch etwas kleiner bleibt, als die Pressung bei der gesetzlichen Druckprobe des Kessels. Nach den allgemeinen Bestimmungen über die Anlage von Dampfkesseln für das Deutsche Reich v. 29. Mai 1871, §. 11, hat diese Druckprobe mit einem Ueberdrucke zu geschehen, welcher, jenachdem der beabsichtigte, d. h. derjenige Ueberdruck, bei dem das Sicherheitsventil sich heben soll, $\lessgtr$ 5 Atm. ist, das doppelte desselben resp. um 5 Atm. grösser als derselbe ist. Wird also etwa mit Kolster

$$\frac{p_0}{p_1} = A = 1{,}25 \quad \text{oder} \quad a = 0{,}8$$

angenommen, nach Gl. (19) also

$$F = \frac{55\,G}{(1 - \sqrt{0{,}8})\,f(p_0)} = \frac{521\,G}{f(1{,}25\,p_1)} \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

Quadratcentimeter festgesetzt, unter G Kgr. die ganze pro Sec. im Kessel entwickelte Dampfmenge verstanden, so wäre der grösstmögliche Ueberdruck im Betriebe

für $p_1 =$	2	4	6	8	10	Atm.
$1{,}25 p_1 - 1 =$	1,5	4	6,5	9	11,5	„ ,
der Probe-Ueberdruck $=$	2	6	10	12	14	„
folglich um	0,5	2	3,5	3	2,5	„

grösser. Zu noch grösserer Sicherheit und zur Vermeidung unnöthigen Dampfverlustes bleibt es immerhin rathsam, den Kesselwärter dahin zu instruiren, dass er das Feuer zu mässigen hat, sobald das Ventil abzublasen anfängt, dieses also in erster Reihe lediglich als eine Signalvorrichtung zu betrachten.

β. Bewegung der Dämpfe in Röhren.

§. 114. Bewegung in einer Röhre, durch deren Wand eine nur unwesentliche Wärmeleitung stattfindet.

Die Röhre habe einen constanten Querschnitt $= F$, ihr innerer Durchmesser (event. ihr mittlerer Durchmesser $=$ dem vierfachen Inhalt dividirt durch den Umfang des Querschnitts) sei $= d$, und φ der ebenfalls als constant vorausgesetzte Winkel, den die im Sinne der Bewegung genommene Mittellinie der Röhre mit der Richtung der Schwere bildet, G das Gewicht des pro Sec. durch jeden Querschnitt strömenden Dampfes. Ferner seien die Pressung, das specif. Volumen, die absolute Temperatur, die Geschwindigkeit und die Geschwindigkeitshöhe im Anfangsquerschnitt $= p_0, v_0, T_0, u_0, H_0$, in der längs der Mittellinie gemessenen Entfernung s von demselben $= p, v, T, u, H$, und im Falle gesättigten Dampfes oder im Allgemeinen eines Gemisches von solchem und gleichartiger Flüssigkeit: y_0 und y die entsprechenden specif. Dampfmengen (Kgr. in 1 Kgr. des Gemisches).

Die Gleichungen, welche in §. 105 für die Bewegung von Luft in Röhren entwickelt wurden, sind hier nicht brauchbar, weil sie u. A. auf der hier nicht zutreffenden Zustandsgleichung $pv = RT$ beruhen; insbesondere die dort zur Vereinfachung gemachte Annahme einer constanten Temperatur würde, wenn sie auch für ungesättigte Dämpfe mit ähnlicher Annäherung wie dort zulässig wäre, doch der abweichenden Zustandsgleichung wegen nicht die gleiche Vereinfachung der Formeln bewirken, während sie für gesättigte Dämpfe die unzulässige Voraussetzung constanter Pressung einschliessen würde.

Nach §. 110 gilt nun für ungesättigte wie für gesättigte Dämpfe ausser der Continuitätsgleichung:

$$Fu = Gv \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

auch die Gleichung der lebendigen Kraft in einerlei Form:

$$dH + vdp = dM - dB = \cos\psi\, ds - \frac{\lambda}{d} H ds \qquad \ldots\ldots (2)$$

mit Rücksicht auf die Ausdrücke von dM und dB nach §. 104, während im Uebrigen streng genommen jene zwei Fälle gesättigten und ungesättigten Dampfes unterschieden werden müssten. Wenn aber in beiden Fällen näherungsweise wie in §. 111, unter m eine Constante verstanden,

$$pv^m = p_0 v_0^{\,m} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

gesetzt wird, so kann die Aufgabe zunächst darauf beschränkt werden, die drei Grössen p, v und u resp. H unter übrigens gegebenen Umständen als Functionen von s zu bestimmen, was in beiden Fällen gleicher Weise mit Hülfe der Gleichungen (1)—(3) geschehen kann. Die Voraussetzung dieser Gl. (3) ist dabei um so mehr gerechtfertigt, und kann ausserdem um so eher

$$m = n, \text{ nämlich } = \frac{4}{3} \text{ resp. } = 1{,}035 + 0{,}1 y_0$$

für beständig ungesättigten oder gesättigten Dampf gesetzt werden, mit je geringerem Fehler die mässige Wärmeentwickelung durch den Leitungswiderstand als aufgewogen zu betrachten ist durch einen mässigen Wärmeverlust nach aussen in Folge des inneren Temperaturüberschusses und der (auch bei Umhüllung mit schlechten Wärmeleitern) nie ganz vermeidlichen Wärmeleitung der Rohrwand. Es wäre m etwas kleiner zu setzen bei überwiegender Grösse des Leitungswiderstandes, etwas grösser bei überwiegendem Wärmeverlust durch die Rohrwand.

Nach Gl. (1) und (3) ist nun

$$\frac{v}{v_0} = \frac{u}{u_0} = \sqrt{\frac{H}{H_0}};\quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^m = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{m}{2}} \qquad \ldots\ldots (4),$$

und die Substitution des entsprechenden Werthes von

$$vdp = v_0\sqrt{\frac{H}{H_0}} \cdot p_0 \frac{m}{2}\left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{m}{2}-1} d\frac{H_0}{H} = \frac{m}{2} p_0 v_0 \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{m-3}{2}} \frac{-H_0 dH}{H^2}$$

$$= -\frac{m}{2}\frac{p_0 v_0}{H_0}\left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{m+1}{2}} dH$$

in Gl. (2) liefert:

$$\left[\frac{m}{2}\frac{p_0 v_0}{H_0}\left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{m+1}{2}} - 1\right] dH = \left(\lambda\frac{H}{d} - \cos\psi\right) ds \quad . . . . . (5)$$

Mit einem erfahrungsmässig angenommenen constanten Mittelwerth von λ ist durch Integration dieser Gleichung s als Function von H, folglich H als Function von s bestimmt, dann auch p und v durch Gl. (4). Nach §. 110, Gl. (1) oder (7) findet man endlich T im Falle ungesättigter Dämpfe resp. y im Falle eines Gemisches von gesättigtem Dampf und gleichartiger Flüssigkeit.

Die Differentialgleichung (5) wird, wenn darin $m = 1$ und $p_0 v_0 = RT$ gesetzt wird, identisch mit Gl. (7), §. 105, wie es sein muss; um aber ihr Integral, dessen Berechnung bei beliebigen Werthen von m eine angenäherte Quadratur für jeden speciellen Fall erfordern würde, allgemein und in endlicher Form zu erhalten, werde der Einfluss der Schwere bei geneigter Lage der Röhre insofern nur näherungsweise berücksichtigt, als nach Division der Gleichung mit H in dem Gliede mit $\cos\psi$ statt der Veränderlichen H ein constanter Mittelwerth H' gesetzt werden mag. Hierdurch geht die Gleichung über in:

$$\left(\frac{\lambda}{d} - \frac{\cos\psi}{H'}\right) ds = \frac{m}{2}\frac{p_0 v_0}{H_0}\left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{m+3}{2}} d\frac{H}{H_0} - \frac{dH}{H}$$

und liefert durch Integration, wenn wie in §. 105 mit

$$h = -s\cos\psi$$

die (positive oder negative) Ansteigung der Röhre für die Länge s bezeichnet wird,

$$\lambda\frac{s}{d} + \frac{h}{H'} = \frac{m}{m+1}\frac{p_0 v_0}{H_0}\left[1 - \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{m+1}{2}}\right] - ln\frac{H}{H_0} \quad . . . (6)$$

für $h = 0$ nach obigen Substitutionen ($m = 1$, $p_0 v_0 = RT$) übereinstimmend mit Gl. (10) in §. 105. Auf der rechten Seite von Gl. (6) ist übrigens das zweite Glied $\left(ln\frac{H}{H_0}\right)$ in der Regel sehr klein im Vergleich mit dem ersten; z. B. für $m = 1{,}135$, $p_0 = 2 . 10333$, $v_0 = 0{,}8599$ … und $H_0 = 20$ ($u_0 = 19{,}8$) findet man das Verhältniss des ersten zum zweiten Gliede

$$= 449 \quad 404 \quad 356$$

$$\text{für } \frac{H}{H_0} = 1{,}25 \quad 1{,}5 \quad 2$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{m}{2}} = 0{,}881 \quad 0{,}794 \quad 0{,}675.$$

Bei Vernachlässigung von $ln \frac{H}{H_0}$ folgt aus Gl. (6):

$$\left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{m+1}{2}} = 1 - \frac{m+1}{m} \frac{H_0}{p_0 v_0}\left(\lambda \frac{s}{d} + \frac{h}{H'}\right) \ldots\ldots (7),$$

für $H' = H_0$ und obige Substitutionen übereinstimmend mit §. 105, Gl. (12). Wenn indessen h gross ist, kann vorläufig mit $H' = H_0$ ein Näherungswerth H_1 von H, dann mit $H' = \frac{H_0 + H_1}{2}$ ein corrigirter Werth von H berechnet werden.

Sind die Geschwindigkeits- und Pressungsänderungen in der Röhre sehr klein, so kann aus Gl. (7) gefolgert werden:

$$\frac{H}{H_0} = 1 + \frac{2}{m p_0 v_0}\left(\lambda \frac{s}{d} H_0 + h\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

und daraus nach Gl. (4):

$$\frac{v}{v_0} = 1 + \frac{1}{m p_0 v_0}\left(\lambda \frac{s}{d} H_0 + h\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

$$\frac{p}{p_0} = 1 - \frac{1}{p_0 v_0}\left(\lambda \frac{s}{d} H_0 + h\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Was den dem Coefficienten λ in diesen Gleichungen beizulegenden Werth betrifft, so wird es am angemessensten sein, denselben in Ermangelung specieller Versuche einstweilen wie für Luft (§. 106, Gl. 10) anzunehmen. —

Der Einfluss besonderer Widerstände kann nach den Formeln in §. 108 beurtheilt werden, insoweit die Temperatur in denselben nicht vorkommt und vorbehaltlich der dem Coefficienten n beizulegenden entsprechend anderen Zahlenwerthe. Die Widerstandscoefficienten ζ, übrigens auch für die Bewegung der Luft nur sehr mangelhaft durch wenige Versuche geprüft, können auch hier nach Analogie derselben angenommen werden, um so mehr, als sie nicht allzu verschieden zu sein scheinen von den besser bekannten Werthen dieser Coefficienten, die für die Bewegung des Wassers unter übrigens gleichen Umständen gelten. —

Beispiel. — Einer unterirdischen Wasserhaltungsmaschine soll der Dampf von den über Tage befindlichen Kesseln durch eine 180 Mtr. lange Rohrleitung zugeführt werden, welche 30 Mtr. weit horizontal bis zur Schachtmündung fortgeführt ist und dann vertical in den 150 Mtr. tiefen Schacht hinabgeht. Beim Eintritt in die Leitung habe der gesättigte Dampf eine Pressung von 3 Atm., also bei Voraussetzung vollkommener Trockenheit ($y_0 = 1$) ein specif. Volumen $v_0 = 0,5875$ (§. 29). Die Weite $d = 0,18$ Mtr. der Leitung, resp. ihr Querschnitt $F = \frac{\pi d^2}{4} = 0,02545$ Quadratm. sei so gewählt, dass die anfängliche Geschwindigkeitshöhe $H_0 = 20$ Mtr. oder die Anfangsgeschwindigkeit $u_0 = \sqrt{2.9,81.20} = 19,8$ Mtr. pro Sec. ist, entsprechend einer geleiteten Dampfmenge

$$G = \frac{F u_0}{v_0} = 0,858 \text{ Kgr. pro Sec.}$$

Nach §. 106, Gl. (10) wäre für Luft unter gleichen Umständen:

$$\lambda = 0,01355 + \frac{0,001235 + 0,0018}{0,18\sqrt{19,8}} = 0,0173;$$

wird also hier $\lambda = 0,018$ angenommen und bei Ausschluss anderer Widerstände eine so sorgfältige Umhüllung der Röhre mit schlechten Wärmeleitern vorausgesetzt, dass der Wärmeverlust durch die Rohrwand von der Wärmeentwickelung durch den Leitungswiderstand gerade aufgewogen wird, so ist nach Gl. (7) mit $m = 1,135$, $h = -150$ und $H_0 = 20$:

$$\left(\frac{20}{H}\right)^{1,0675} = 1 - \frac{2,135}{1,135} \frac{20}{3.10333.0,5875}\left(0,018\frac{180}{0,18} - \frac{150}{20}\right)$$

$$\frac{H}{20} = 1,02075; \quad H = 20,415$$

und damit nach Gl. (4):

$$p = 3.1,02075^{-0,5675} = 2,965 \text{ Atm.},$$

entsprechend einer Druckabnahme $= 0,035$ Atm. Ist aber am betreffenden Orte der mittlere Barometerstand $= 0,74$ Mtr., die mittlere Lufttemperatur $= 20^0$, also das mittlere specif. Gewicht der äusseren Luft

$$= 10333 \frac{0,74}{0,76} : 29,4.293 = 1,168 \text{ Kgr.},$$

so nimmt der Barometerstand längs der Dampfleitung bis zur Schachtsohle um

$$\frac{150 \cdot 1{,}168}{13596} = 0{,}013 \text{ Mtr.}$$

oder der Luftdruck um $\frac{0{,}013}{0{,}76} = 0{,}017$ Atm. zu, der Ueberdruck des Dampfs also vom Anfang bis zum Ende der Leitung um

$$0{,}035 + 0{,}017 = 0{,}052 \text{ Atm.}$$

ab, so dass er, am Anfange derselben

$$3 - \frac{0{,}74}{0{,}76} = 2{,}026 \text{ Atm.}$$

betragend, am Ende nur noch

$$2{,}026 - 0{,}052 = 1{,}974 \text{ Atm.}$$

beträgt. Nach Gl. (4) ist das specif. Volumen im Endzustande:

$$v = 0{,}5875\sqrt{1{,}02075} = 0{,}5936$$

und die specif. Dampfmenge mit $\Delta = 0{,}5931$ nach §. 29:

$$y = \frac{v - 0{,}001}{\Delta} = 0{,}9991.$$

Die theilweise Condensation in Folge der Expansion des Dampfes ist also so geringfügig, dass sie im Vergleich mit dem Einflusse einer etwa überschüssigen Abkühlung durch die Wärmeleitung der Rohrwand nicht in Betracht kommt.

Auch erkennt man aus diesem Beispiele, dass für praktische Zwecke die angenäherten Gleichungen (8)—(10) in den meisten Fällen ausreichende Genauigkeit gewähren; Gl. (10) liefert hier auf 3 Decimalstellen denselben Werth von p wie Gl. (4) in Verbindung mit Gl. (7), nämlich $p = 2{,}965$ Atm.

115. Bewegung der Dämpfe in Röhren mit Rücksicht auf die Wärmeleitung der Rohrwände.

Wenn es sich um ungesättigten Dampf handelt, ergeben sich durch Substitution des der Zustandsgleichung (1), §. 110, zu entnehmenden Ausdrucks von v in den Gleichungen (6), (3) und (5) daselbst, und wenn ausserdem, wie im vorigen §.

$$dM = \cos\psi\, ds \quad \text{und} \quad dB = \lambda \frac{H}{d}\, ds$$

gesetzt wird, zur Bestimmung von p, T und u resp. H als Functionen d.. längs der Mittellinie gemessenen Abstandes s vom Anfangsquerschnitte die Gleichungen:

$$\frac{Fu}{G} = \frac{R(T-P)}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

$$dH + \frac{R(T-P)}{p} dp = \left(\cos\psi - \lambda \frac{H}{d}\right) ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2$$

$$dH + \frac{n}{n-1} R d(T-P) = \cos\psi\, ds + W dQ \quad \ldots\ldots \quad 3$$

Sie unterscheiden sich von den Gleichungen (1)—(3) in §. 109 für den analogen Fall der Bewegung von Luft bei gleicher Bedeutung der Buchstaben nur dadurch, dass der abweichenden Zustandsgleichung entsprechend $T-P$ an die Stelle von T getreten ist. Uebrigens ist in denselben wie dort:

$$dQ = \frac{kP'}{G}(T'-T) ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4$$

unter P' den Umfang des Rohrquerschnitts F resp. den Theil desselben, an welchem die Wärmeübertragung stattfindet, unter k den Wärmetransmissions-Coefficienten und unter T' die äussere absolute Temperatur an dieser Stelle verstanden; auch kann nach §. 39, Gl. (10), gesetzt werden

$$\frac{n}{n-1} R = W c_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wenn c_1 die (constant vorausgesetzte) specif. Wärme bei constanter Pressung bedeutet.

Wenn nun auch hier, wie in §. 109, vom Einflusse der Geschwindigkeitsänderung und der Schwere auf die Temperaturänderung abgesehen wird, also die ersten Glieder auf beiden Seiten von Gl. (3) vernachlässigt werden, ergiebt sich

$$\frac{d(T-P)}{T-T'} = -\frac{ds}{a} \quad \text{mit} \quad a = \frac{Gc_1}{kP'}.$$

Sofern aber p, und um so mehr P (proportional $\sqrt[4]{p}$) nur wenig veränderlich ist, besonders im Vergleich mit der Veränderlichkeit von T, kann ... endlich noch mit sehr kleinem Fehler P constant gesetzt werden (der anfänglichen oder besser einer mittleren Pressung in der betrachteten Rohrstrecke entsprechend). Dann ist $d(T-P) = dT$, jene Gleichung also mit Gl. (6) in §. 109 identisch, so dass sich auch durch Integration dieselben Gleichungen für T ergeben wie dort, insbesondere

wenn T' constant ist, $T = T' + (T_0 - T')e^{-\frac{s}{a}}$ . . . . . . (6).

Durch Combination dieser Gleichung mit Gl. (1) und (2) analog dem in §. 109 angewendeten Näherungsverfahren wäre nun p als Function von s und T, somit als mittelbare Function von s zu bestimmen. Weil aber, unter P wieder eine Constante verstanden, Gl. (6) unverändert bleibt, wenn darin diese Grösse P von T_0, T und T' subtrahirt wird, und ebenso die obigen Gleichungen (1) und (2) aus den entsprechenden in §. 109 hervorgingen, kann das Resultat der Rechnung durch dieselbe Aenderung ohne Weiteres aus den dort resultirenden Formeln abgeleitet werden, so dass sich insbesondere im Falle $T' = Const.$ aus Gl. (13) daselbst ergiebt:

$$ln\frac{p_0}{p} = \frac{H_0}{R(T_0 - P)}\left[\lambda\frac{T' - P}{T_0 - P}\frac{s}{d} + \left(2 - \lambda\frac{a}{d}\right)\frac{T - T_0}{T_0 - P}\right]$$
$$- \frac{\cos\psi}{R(T' - P)}\left(s + a\,ln\frac{T - P}{T_0 - P}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Setzt man hier vorläufig $P = P_0$ (entsprechend p_0), so würde mit dem so gefundenen Werthe von p der zugehörige Werth von P berechnet werden und, indem dann $\frac{P_0 + P}{2}$ statt P gesetzt wird, ein corrigirter Werth von p gefunden werden können, der indessen von dem zuerst gefundenen in allen praktischen Fällen so wenig verschieden sein würde, dass die fragliche Correction als überflüssig erschiene. Durch T und p ist schliesslich auch u nach Gl. (1) bestimmt.

Wenn $T' < T$ ist und somit T im Sinne der Bewegung abnimmt, gelten obige Gleichungen natürlich nur so lange, als T noch wenigstens = der absoluten Sättigungstemperatur ist, die der betreffenden Pressung p entspricht. Darüber hinaus hat man es mit einem Gemisch von gesättigtem Dampf und gleichartiger Flüssigkeit zu thun, für welches nach §. 110 und mit Rücksicht auf obige Ausdrücke von dM, dB und dQ die Gleichungen, welche den Gl. (1)—(3) des vorigen Falles entsprechen (die Continuitätsgleichung und die Gleichungen der lebendigen Kraft und des Arbeitsvermögens) folgende Formen haben:

$$\frac{Fu}{G} = w + y\varDelta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

$$dH + (w + y\varDelta)dp = \left(\cos\psi - \lambda\frac{H}{d}\right)ds \quad \ldots\ldots\ldots (9),$$

$$dH + Wd(q + yr) + wdp = \cos\psi ds + W\frac{kP'}{G}(T' - T)ds \quad (10).$$

Sie bestimmen p, y und u resp. H für jeden Werth von s mit Rücksicht darauf, dass T, q, r, Δ bekannte Functionen von p sind, freilich von solchem Charakter, dass die allgemeine Ausführung der Entwickelung verschiedene vereinfachende Annahmen auch hier wieder nöthig macht. Durch die Mittheilung oder Entziehung von Wärme wird hier vorzugsweise y geändert (Flüssigkeit verdampft oder Dampf condensirt), während die Temperatur, bedingt durch die Pressung, verhältnissmässig wenig veränderlich ist. Wenn dann analog dem Früheren auch hier wieder die ersten Glieder auf beiden Seiten von Gl. (10) vernachlässigt und für p sowie die von p abhängigen Grössen constante Mittelwerthe (behufs einer ersten, zunächst indessen genügenden Annäherung = ihren Anfangswerthen) gesetzt werden, ergiebt sich

$$r\,dy = \frac{kP'}{G}(T' - T)\,ds$$

$$y = y_0 - \frac{s}{b} \quad \text{mit} \quad b = \frac{Gr}{kP'(T - T')} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Aus Gl. (8) folgt ferner näherungsweise mit Rücksicht darauf, dass w sehr klein gegen $y\Delta$, und Δ sehr wenig im Vergleich mit y veränderlich ist:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{y}{y_0}; \quad H = H_0\left(\frac{y}{y_0}\right)^2; \quad dH = \frac{2H_0}{y_0^2}\,y\,dy;$$

und die Substitution dieser Ausdrücke von H und dH nebst $ds = -b\,dy$ in Gl. (9) giebt bei Vernachlässigung von w gegen $y\Delta$:

$$\frac{2H_0}{y_0^2}\,y\,dy + y\Delta\,dp = -b\left[\cos\varphi - \lambda\frac{H_0}{d}\left(\frac{y}{y_0}\right)^2\right]dy$$

$$-\Delta\,dp = \frac{H_0}{y_0^2}\left(2 - \lambda\frac{b}{d}\,y\right)dy + b\cos\varphi\,\frac{dy}{y}.$$

Hieraus kann, wenn p nicht nur in Vergleich mit y, sondern auch an und für sich nur sehr wenig veränderlich ist, mit einem constanten Mittelwerth von Δ (behufs einer ersten Annäherung = dem Anfangswerth zu setzen) durch Integration gefolgert werden:

$$(p_0 - p)\Delta = \frac{H_0}{y_0^2}\left[2(y - y_0) - \lambda\frac{b}{d}\,\frac{y^2 - y_0^2}{2}\right] + b\cos\varphi\,\ln\frac{y}{y_0}$$

$$= \frac{H_0}{y_0^2}\left[\lambda\frac{s}{d}\left(y_0 - \frac{s}{2b}\right) - 2\frac{s}{b}\right] - \frac{bh}{s}\ln\left(1 - \frac{s}{by_0}\right) \ldots (12)$$

unter $h = -s\cos\varphi$ wieder die Ansteigung der Röhre für die Länge s verstanden.

Ist aber p in höherem Grade veränderlich, so kann mit Rücksicht auf Gl. (4), §. 28 gesetzt werden:

$$-\Delta dp = -\frac{1}{\alpha}\frac{dp}{p^{\mu}}$$

und also statt $(p_0 - p)\Delta$ auf der linken Seite von Gl. (12):

$$-\int_{p_0}^{p}\Delta dp = \frac{1}{\alpha(\mu-1)}\left(\frac{1}{p^{\mu-1}} - \frac{1}{p_0^{\mu-1}}\right) = \frac{1}{\alpha(1-\mu)}(p_0^{1-\mu} - p^{1-\mu}),$$

insbesondere für Wasserdampf mit

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{10333^{0,9393}}{0,6058} = 9732,6 \text{ und } \mu = 0,9393$$

$$-\int_{p_0}^{p}\Delta dp = 160340(p_0^{0,0607} - p^{0,0607}) \quad \ldots\ldots\ldots (13).$$

Wenn übrigens auf der linken Seite von Gl. (12) für Δ das arithmetische Mittel der Werthe gesetzt wird, welche p_0 und p entsprechen, so müsste p schon erheblich $< p_0$ sein, wenn nach beiden Rechnungsweisen wesentlich verschiedene Werthe gefunden werden sollen. So ist z. B. für $p_0 = 3 . 10333$ und

$p =$	2,8	2,6	2,4 × 10333
$(p_0 - p)\frac{\Delta_0 + \Delta}{2} =$	1253	2599	4061
$-\int_{p_0}^{p}\Delta dp =$	1253	2596	4039.

Durch y und p ist endlich u nach Gl. (8) bestimmt. Wenn $T' > T$, also b negativ ist und y wächst, gelten diese Gleichungen natürlich nur so lange als y höchstens $= 1$ gefunden wird; darüber hinaus wird der Dampf ungesättigt, und kommen die für diesen Fall oben aufgestellten Gleichungen zur Geltung.

Wenn aber $T' < T$ ist, also y abnimmt, wird diese Abnahme doch nur bis zu einem gewissen Minimum y_1 stattfinden können, weil der Dampf dauernd nur ein gewisses Maximum von Flüssigkeit in fein vertheiltem Zustande schwebend mit sich fortführen kann, während ein etwaiger Ueberschuss, an der Rohrwand haften bleibend, allmählig zu einer grösseren Flüssigkeitsmasse sich vereinigt und unabhängig von dem weiter strömenden, an Masse stetig abnehmenden feuchten Dampf im Sinne des Abfalls der Röhre unter dem alleinigen Einfluss der Schwere und der Reibung resp. Adhäsion an der Röhre nach den tiefsten Stellen derselben abfliesst. Von

jenem Zustande an gerechnet, für welchen als neuen Anfangszustand die Grössen

$$p \quad v \quad T \quad u \quad H \quad \text{mit} \quad p_1 \quad v_1 \quad T_1 \quad u_1 \quad H_1$$

bezeichnet seien, nimmt also G stetig ab und sei in der Entfernung s von jener Stelle $= G$. Diese Grösse G_s ist jetzt diejenige, welche statt l in Gl. (6) oder statt y in Gl. (11) durch die Wärmeleitung der Rohrwand vorzugsweise verändert wird, und ihre Abnahme $= -dG_s$ für das Längenelement ds der Röhre ist

$$-dG_s = \frac{G_s(-dQ)}{r} = \frac{kP'}{r}(T - T')ds,$$

woraus näherungsweise mit constanten Mittelwerthen von T und r und mit Beibehaltung der Bedeutung von b nach Gl. (11) folgt:

$$G - G_s = \frac{kP'}{r}(T - T')s; \quad \frac{G_s}{G} = z = 1 - \frac{s}{b} \dots$$

Indem ferner die Geschwindigkeitsänderung jetzt vorzugsweise durch die Aenderung von G_s bedingt wird, ist nach Gl. (8) näherungsweise

$$\frac{u}{u_1} = \frac{G_s}{G} = z; \quad H = H_1 z^2; \quad dH = 2H_1 z dz;$$

und die Substitution dieser Ausdrücke von H und dH nebst $ds = -b\,dz$ in Gl. (9) giebt

$$2H_1 z dz + (w + y_1 \Delta)dp = -b\left(\cos\psi - \lambda \frac{H_1}{d} z^2\right)dz$$

$$-(w + y_1 \Delta)dp = H_1\left(2z - \lambda \frac{b}{d} z^2\right)dz + b\cos\psi\, dz$$

und daraus näherungsweise mit einem constanten Mittelwerthe von Δ:

$$(w + y_1\Delta)(p_1 - p) = H_1\left[\lambda \frac{b}{d}\,\frac{1 - z^3}{3} - (1 - z^2)\right] - b\cos\psi\,(1 - z)$$

$$= H_1 \frac{s}{b}\left[\lambda \frac{b}{d}\left(1 - \frac{s}{b} + \frac{1}{3}\frac{s^2}{b^2}\right) - 2 + \frac{s}{b}\right] - s\cos\psi \dots$$

Durch G_s und p ist endlich wieder u nach Gl. (8) bestimmt, wenn darin G_s statt G und $y = y_1$ gesetzt wird. —

Wenn bei dem Beispiel im vorigen §. eine Rohrleitung vorausgesetzt wird, welche nicht oder nur mangelhaft gegen Abkühlung geschützt ist, so findet man mit

$$d = 0{,}18, \quad P' = \pi d = 0{,}5655, \quad G = 0{,}858, \quad p_0 = 3.1\dots$$

also nach §. 29: $T_0 = 406{,}9$, $r_0 = 512{,}35$, $\Delta_0 = 0{,}5\dots$

ferner mit $y_0 = 1,\ H_0 = 20,\ T' = 293$

und wenn $k = \frac{1}{300}$ (auf die Stunde als Zeiteinheit bezogen $= 12$) angenommen wird, nach Gl. (11):

$$b = \frac{0{,}858 \,.\, 512{,}35 \,.\, 300}{0{,}5655 \,.\, 113{,}9} = 2047,$$

also für das Ende der 180 Mtr. langen Röhre:

$$\frac{s}{b} = \frac{180}{2047} = 0{,}088 \text{ und } y = 0{,}912.$$

Unter der Voraussetzung, dass der Dampf eine schwebende Wassermenge bis zu 0,088 Gewichtsprocenten der ganzen Masse dauernd mitführen könne, folgt dann für die Pressungsabnahme in der ganzen Röhre aus Gl. 12) mit $\lambda = 0{,}018$ und $h = -150$ Mtr.

$$0{,}5865(p_0 - p) = 20[18(1 - 0{,}044) - 0{,}176] + \frac{2047 \,.\, 15}{18} ln 0{,}912$$

$$p_0 - p = 312{,}8 \text{ Kgr. pro Quadratm.} = 0{,}030 \text{ Atm.}$$

Weil übrigens die Abkühlung und Condensation an der Rohrwand stattfindet und das an dieser gebildete Condensationswasser keine Gelegenheit findet, von der Wand sich wieder zu entfernen, ist es ohne Zweifel richtiger anzunehmen, dass der anfangs trockene Dampf beständig trocken bleibt, indem alles durch die Condensation gebildete Wasser unabhängig von dem übrig bleibenden und in der Röhre strömenden Dampf an den tiefsten Stellen sich sammelt. Nach Gl. (14) beträgt diese Wassermenge für die ganze Röhre

$$G - G_s = \frac{s}{b} G = 0{,}088 \,.\, 0{,}858 = 0{,}0755 \text{ Kgr. pro Sec.}$$

oder 271,8 Kgr. pro Stunde. Die Druckabnahme ergiebt sich fast ebenso gross wie unter der vorigen Voraussetzung; man findet nach Gl. (15) mit $y = 1$, $p_1 = p_0$, $H_1 = H_0$ und wenn auch für Δ der Anfangswerth Δ_0 gesetzt wird,

$$0{,}5875\,(p_0 - p) = 20 \,.\, 0{,}088\,[204{,}7\,(0{,}912 + 0{,}0026) - 1{,}913] - 150$$

$$p_0 - p = 299{,}8 \text{ Kgr. pro Quadratm.} = 0{,}029 \text{ Atm.}$$

Dass in beiden Fällen sich die Druckabnahme unter dem Einflusse der Abkühlung kleiner ergiebt, als sie ohne dieselbe im vorigen §. gefunden wurde ($= 0{,}035$ Atm.), ist dadurch begründet, dass mit der zunehmenden Feuchtigkeit und Dichtigkeit resp. der abnehmenden Gewichtsmenge des strömenden Dampfes auch eine abnehmende und durchschnittlich kleinere Geschwindigkeit desselben verbunden ist.

b. Veränderlicher Ausfluss aus Gefässen.

1. des Wassers.

Die strenge mathematische Untersuchung einer veränderlichen Bewegung, wenn auch vereinfacht durch die in §. 74 erklärte Voraussetzung einer schichtenweisen Bewegung, wie sie den im Vorhergehenden behandelten Problemen der permanenten Bewegung im Allgemeinen zu Grunde lag und um so mehr im Folgenden beibehalten wird, ist mit grösseren analytischen Schwierigkeiten verbunden und führt zu complicirteren Formeln, als der technische Gebrauch zulässt. Behufs einer weiteren Vereinfachung wird deshalb allgemein die Annahme zu Grunde gelegt, dass der augenblickliche Zustand der Flüssigkeit an irgend einer Stelle ohne merklichen Fehler demjenigen gleich gesetzt werden könne, welcher unter übrigens gleichen und unverändert bleibenden Umständen bei permanenter Bewegung daselbst stattfinden würde. Um aber die Berechtigung dieser Annahme zu prüfen durch Vergleichung der ihr entsprechenden Rechnungsresultate mit denjenigen einer strengen Entwickelung, ist es von Interesse, letztere wenigstens für einen einfachen Fall durchzuführen, wie im folgenden geschehen soll. Dabei wird, wie im Folgenden immer, sofern das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt wird, ein (bezüglich auf die Erde) ruhendes oder geradlinig und gleichförmig bewegtes Gefäss vorausgesetzt, so dass die Schwere die einzige äussere Massenkraft ist und die freie Oberfläche des Wassers im Gefäss eine horizontale Ebene bildet.

§. 116. Ausfluss des Wassers aus einem Gefässe, welches keinen Zufluss hat.

Der äussere Druck sei an der freien Oberfläche des Wassers im Gefässe $= p_0$, an der Mündung $= p$; letzterer ist $=$ der Pressung im kleinsten Querschnitte des contrahirten Strahls, der hier vorläufig mit A bezeichnet sei und ebenso wie p_0 und p als constant vorausgesetzt wird, entsprechend einem constanten Contractionscoefficienten. Ferner sei zur Zeit t, von einem gewissen Anfangszustande an gerechnet:

h die Höhe der freien Wasseroberfläche über dem Schwerpunkt von A,

F die Grösse dieser Oberfläche, also des horizontalen Querschnitts des Gefässes in der Höhe h über S,

u die mittlere Geschwindigkeit im kleinsten Querschnitte A, also die augenblickliche Ausflussgeschwindigkeit.

Diese Grössen h, F, u sind Functionen von t, F mittelbar insofern als dieser Querschnitt eine durch die gegebene Gestalt des Gefässes bestimmte Function von h ist. Allgemein sei X der Inhalt des horizontalen Gefässquerschnittes in der Höhe x über dem Schwerpunkte S von A. Unter der Voraussetzung endlich, dass $x \overline{\gtrless} h$ ist und die Geschwindigkeiten im Querschnitte X vertical gerichtet vorausgesetzt werden können, sei y die mittlere Geschwindigkeit, z die mittlere Pressung in demselben; y und z sind Functionen von x und t.

Unter diesen Umständen ist in der ersten der Gleichungen (3) in §. 72, wenn sie auf die Aenderung des mittleren Zustandes einer unendlich dünnen horizontalen Wasserschicht in einem Zeitelement bezogen wird,

$$ds = -dx, \quad u = y, \quad p = z, \quad K_s = -g$$

und bei vorläufiger Abstraction von Bewegungswiderständen $R_s = 0$ zu setzen; somit ist

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial z}{\partial x} = -g + \frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial y}{\partial x}$$

oder nach Substitution der aus der Continuitätsgleichung

$$Xy = Au$$

zu folgernden Ausdrücke:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{A}{X}\frac{du}{dt}; \quad y\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Au}{X} \cdot \frac{-Au}{X^2}\frac{dX}{dx} = -\frac{A^2u^2}{X^3}\frac{dX}{dx}$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial z}{\partial x} = -g + \frac{A}{X}\frac{du}{dt} + \frac{A^2u^2}{X^3}\frac{dX}{dx}.$$

Durch Integration nach x von x bis h, also von X bis F und von z bis p_0 folgt daraus:

$$\frac{1}{\mu}(p_0 - z) = -g(h-x) + A\frac{du}{dt}\int_x^h \frac{dx}{X} + \frac{A^2u^2}{2}\left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{F^2}\right). \quad (1).$$

Die Ausdehnung dieser Gleichung auf abnehmende Werthe von x bis $x = 0$ (bei Voraussetzung eines Ausflusses in die freie Luft) ist zwar nicht streng zulässig, weil, je kleiner x, desto weniger die Annahme einer verticalen Geschwindigkeitsrichtung in allen Punkten des entsprechenden Horizontalschnitts X zulässig ist, während, wenn die Querschnitte im Sinne

von §. 72 verstanden werden als Flächen, welche die Bahnen der Wassertheilchen rechtwinkelig schneiden, die augenblicklichen Geschwindigkeiten in denselben nahe dem kleinsten Querschnitte A um so ungleichförmiger vertheilt sind, je grösser dieser und je mehr seine Ebene gegen den Horizont geneigt ist. Vorbehaltlich entsprechender Bestimmung eines empirischen Coefficienten (Geschwindigkeitscoefficienten), durch welchen ohnehin schon mit Rücksicht auf Bewegungswiderstände das Resultat der Rechnung schliesslich corrigirt werden muss, kann aber immerhin näherungsweise mit um so kleinerem Fehler, je grösser h und je kleiner die Höhe der Verticalprojection von A in Vergleich mit h oder vielmehr mit $\frac{u^2}{2g}$ ist, durch die Substitutionen

$$x = 0, \quad X = A, \quad z = p$$

und wenn ausserdem $\mu g = \gamma =$ dem specifischen Gewicht des Wassers gesetzt wird, aus Gl. (1) gefolgert werden:

$$g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right) = A\frac{du}{dt}\int_0^h \frac{dx}{X} + \left(1 - \frac{A^2}{F^2}\right)\frac{u^2}{2} \dots\dots$$

Im Grenzfalle des Beharrungszustandes, also eines constanten Werthes von u, folgt daraus:

$$u = \sqrt{\frac{2g\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)}{1 - \frac{A^2}{F^2}}} \dots\dots\dots\dots (2)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (2), §. 79 mit Rücksicht auf die hier gewählten Bezeichnungen und die einstweilige Abstraction von einem Geschwindigkeitscoefficienten. Vorbehaltlich entsprechender Bestimmung des letzteren kann übrigens auch hier in obiger Gl. (2) ebenso wie dort die Bedeutung von h insofern nachträglich modificirt werden, als die Horizontalebene, von welcher aus x und h gerechnet werden, durch den Schwerpunkt der Mündung selbst gelegt wird anstatt durch den Schwerpunkt des kleinsten Querschnittes nahe ausserhalb der Mündung.

Im vorliegenden Falle ist es die Aufgabe, zwei Gleichungen in endlicher Form zwischen h, u, t und den gegebenen Grössen herzustellen, insbesondere mit Rücksicht auf den gegebenen Anfangszustand ($h = h_0$, $u = u_0$ für $t = 0$) wo möglich u und t als Functionen von h zu entwickeln, also die Ausflussgeschwindigkeit zu berechnen, welche irgend einer augenblicklichen Wasserstandshöhe h entspricht

und die Zeit, in welcher die anfängliche Wasserstandshöhe h_0 in h übergeht. Dazu muss Gl. (2) mit einer anderen verbunden werden, die vom Gesetze des Wasserzuflusses zum Ausflussgefässe abhängt. Wenn ein solcher Zufluss, wie hier vorausgesetzt wird, nicht stattfindet, so ist das in einem Zeitelemente dt durch den kleinsten Querschnitt A ausfliessende Wasservolumen = demjenigen, welches von der niedergehenden freien Oberfläche F beschrieben wird, also

$$Audt = -Fdh \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Daraus folgt mit der Bezeichnung: $H = \frac{u^2}{2g}$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{A}{F}\frac{udu}{dh} = -g\frac{A}{F}\frac{dH}{dh},$$

und die Substitution dieses Ausdruckes in Gl. (2) liefert mit den abgekürzten Bezeichnungen

$$i = \frac{p_0 - p}{\gamma}; \quad I = \int_0^h \frac{dx}{X}$$

$$h + i = -\frac{A^2 I}{F}\frac{dH}{dh} + \left(1 - \frac{A^2}{F^2}\right)H$$

$$\frac{dH}{dh} - \frac{F}{I}\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{F^2}\right)H + \frac{F}{A^2 I}(h + i) = 0 \quad \ldots \ldots (5).$$

Die Integration dieser Gleichung, in welcher F und I bekannte Functionen von h sind, mit Berücksichtigung des gegebenen Anfangszustandes ergiebt H, somit auch $u = \sqrt{2gH}$ als Function von h resp. $u = \varphi\sqrt{2gH}$ bei nachträglicher Correction durch einen Geschwindigkeitscoefficienten; dann ist nach Gl. (4):

$$t = \frac{1}{A}\int_h^{h_0} \frac{F}{u}\,dh \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Die Gl. (5) ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich von der Form:

$$\frac{dH}{dh} + f(h) \cdot H + \varphi(h) = 0$$

$$\text{mit } f(h) = -\frac{F}{I}\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{F^2}\right); \quad \varphi(h) = \frac{F}{A^2 I}(h + i).$$

Ihr allgemeines Integral ist mit $\psi(h) = e^{-\int f(h)\,dh}$

$$H = \psi(h)\left(C - \int \frac{\varphi(h)}{\psi(h)}\,dh\right) \ldots\ldots\ldots\ldots 7$$

wobei die unteren Grenzen der Integrationen in dieser Gl. 7) und im Ausdrucke von $\psi(h)$ willkürlich gewählt werden können vorbehaltlich entsprechender Bestimmung der Constanten C.

Hier soll nun die weitere Ausführung durch die Voraussetzung vereinfacht werden, dass der äussere Druck an der freien Oberfläche des Wassers im Gefäss und ausserhalb der Mündung gleich gross, und dass der Horizontalschnitt des Gefässes constant, also

$$p_0 = p, \quad X = Const. = F, \text{ folglich } i = 0, \quad I = \frac{h}{F}$$

ist. Daraus folgt mit der Bezeichnung: $\frac{F^2}{A^2} = m$

$$f(h) = -\frac{1}{FI}(m-1) = -\frac{m-1}{h}; \quad \varphi(h) = m$$

$$\int f(h)\,dh = -(m-1)\,lnh; \quad \psi(h) = e^{(m-1)\,lnh} = h^{m-1}$$

$$\int \frac{\varphi(h)}{\psi(h)}\,dh = m\int \frac{dh}{h^{m-1}} = -\frac{m}{m-2}\,\frac{1}{h^{m-2}}$$

und somit nach Gl. (7):

$$H = h^{m-1}\left(C + \frac{m}{m-2}\,\frac{1}{h^{m-2}}\right)$$

oder nach Elimination von C mit Rücksicht auf die Anfangswerthe $h = h_0$, $H = H_0$:

$$\frac{H}{h^{m-1}} - \frac{H_0}{h_0^{m-1}} = \frac{m}{m-2}\left(\frac{1}{h^{m-2}} - \frac{1}{h_0^{m-2}}\right)$$

$$\frac{H}{h} = \frac{H_0}{h_0}\left(\frac{h}{h_0}\right)^{m-2} + \frac{m}{m-2}\left[1 - \left(\frac{h}{h_0}\right)^{m-2}\right]$$

$$= \frac{m}{m-2} + \left(\frac{H_0}{h_0} - \frac{m}{m-2}\right)\left(\frac{h}{h_0}\right)^{m-2} \ldots\ldots\ldots 8$$

Während im Beharrungszustande nach Gl. (3)

$$\frac{u^2}{2gh} = \frac{H}{h} = \frac{1}{1-\frac{1}{m}} = \frac{m}{m-1}$$

wäre, ist hier dieses Verhältniss in stetiger Aenderung begriffen und nähert sich der Grenze

$$lim. \frac{H}{h} = \frac{m}{m-2} \text{ für } h = 0.$$

Dabei sind in Betreff des Anfangszustandes, von welchem der Umfang jener Aenderung abhängt, zwei Specialfälle bemerkenswerth.

1) Wenn anfangs ein permanenter Ausfluss stattfand in Folge eines den Ausfluss in jedem Zeitelement compensirenden Zuflusses von Wasser zum Gefässe, der aber plötzlich (zur Zeit $t = 0$) gehemmt wird, so ist nach Gl. (8)

$$\text{mit } \frac{H_0}{h_0} = \frac{m}{m-1}: \quad \frac{H}{h} = \frac{m}{m-2}\left[1 - \frac{1}{m-1}\left(\frac{h}{h_0}\right)^{m-2}\right] \quad \ldots (9),$$

und es nimmt also $\frac{H}{h}$ von $\frac{m}{m-1}$ bis $\frac{m}{m-2}$ stetig zu. Von dieser Aenderung darf aber mit ähnlichem Recht abstrahirt werden, womit für den Beharrungszustand $H = h$ gesetzt zu werden pflegt, was mit Rücksicht auf die Correction durch einen Geschwindigkeitscoefficienten immer geschehen kann, sofern nur, wie gewöhnlich, $F > 10A$, also $m > 100$ ist (§. 79).

2) Wenn eine anfangs geschlossene Mündung plötzlich (zur Zeit $t = 0$) geöffnet wird, also $H_0 = 0$ ist, so nimmt

$$\frac{H}{h} = \frac{m}{m-2}\left[1 - \left(\frac{h}{h_0}\right)^{m-2}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

von 0 bis $\frac{m}{m-2}$ stetig zu, ist also anfangs wesentlich $< \frac{m}{m-1}$, so dass in diesem Falle die Zeit, in welcher die Wasserstandshöhe von h_0 bis h abnimmt, allerdings wesentlich fehlerhaft gefunden werden kann, wenn dabei $\frac{H}{h}$ beständig $= \frac{m}{m-1}$ gesetzt wird und wenn h nur wenig $< h_0$, insbesondere wenn $h > h_1$ ist, unter h_1 diejenige Wasserstandshöhe verstanden, für welche streng genommen $\frac{H}{h} = \frac{m}{m-1}$, und welche also nach Gl. (10) bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\left(\frac{h_1}{h_0}\right)^{m-2} = 1 - \frac{m-2}{m-1} = \frac{1}{m-1} \quad \ldots \ldots \ldots (11).$$

Wenn übrigens $m > 100$, ist ihr zufolge $h_1 > 0{,}954\,h_0$, also stets so wenig $< h_0$, dass auch in diesem Falle die Voraussetzung $\frac{H}{h} = \frac{m}{m-1}$ bei der hier vorzugsweise in Betracht kommenden Berechnung der Zeit t, in welcher die Wasserstandshöhe von h_0 bis h abnimmt, voraussichtlich nur mit einem kleinen Fehler gewöhnlich verbunden sein wird, wenn nämlich h wesentlich $< h_0$, insbesondere wenn $h = 0$ ist, d. h. die Entleerungszeit des Gefässes gesucht wird.

Zur näheren Prüfung jenes Fehlers hat man nach Gl. (6)

$$t = \sqrt{m}\int_h^{h_0}\frac{dh}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{m}{2g}h_0}\int_{\frac{h}{h_0}}^{1}\frac{d\frac{h}{h_0}}{\sqrt{\frac{h}{h_0}\,\frac{H}{h}}} = \sqrt{\frac{m}{2g}h_0}\int_z^1\frac{dz}{\sqrt{z\,\frac{H}{h}}}$$

mit $z = \frac{h}{h_0}$, also mit Rücksicht auf den Ausdruck (10) von $\frac{H}{h}$:

$$t = \sqrt{\frac{m-2}{2g}h_0}\int_z^1\frac{dz}{\sqrt{z(1-z^{m-2})}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 12$$

während diese Zeit, unter der Voraussetzung: $\frac{H}{h} = \frac{m}{m-1}$ berechnet und dann zum Unterschied mit t' bezeichnet,

$$t' = \sqrt{\frac{m-1}{2g}h_0}\int_z^1\frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{\frac{m-1}{2g}}h_0(1-\sqrt{z})\ \ldots\ 13$$

wäre. Daraus folgt

$$\frac{t}{t'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m-2}{m-1}}\;\frac{1}{1-\sqrt{z}}\int_z^1\frac{dz}{\sqrt{z(1-z^{m-2})}} \quad \ldots\ldots 14$$

ein Ausdruck, dessen Werth sich offenbar um so mehr der Einheit nähert, je grösser m und je kleiner z ist. Behufs einer angenäherten Berechnung des darin vorkommenden Integrals kann man dieses in Theile zerlegen durch Zerlegung des Unterschiedes $= 1 - z$ seiner Grenzen in Intervalle $1 - z_1,\ z_1 - z_2,\ z_2 - z_3 \ldots z_n - z$ von zunehmender Grösse, und dann bei jedem Theilintegrale für z in dem Factor $(1 - z^{m-2})$ einen constanten Mittelwerth nehmen, also etwa

$$\frac{1}{2}\int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z^{m-2})}} = \frac{1-\sqrt{z_1}}{\sqrt{1-\left(\frac{1+z_1}{2}\right)^{m-2}}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{z_1}-\sqrt{z_2}}{\sqrt{1-\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^{m-2}}} + \ldots + \frac{\sqrt{z_n}-\sqrt{z}}{\sqrt{1-\left(\frac{z_n+z}{2}\right)^{m-2}}}$$

setzen. Werden dabei die Zwischenwerthe, welche die Intervalle von $(1-z)$ begrenzen, nämlich

$$\begin{array}{cccccccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ = 0{,}99 & 0{,}98 & 0{,}96 & 0{,}94 & 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0{,}4 \end{array}$$

genommen, so findet man beispielsweise für $m = 100$ die folgenden zusammengehörigen Werthe von z und $\frac{t}{t'}$:

z	$t:t'$	z	$t:t'$	z	$t:t'$
0,99	1,596	0,94	1,126	0,6	1,013
0,98	1,363	0,9	1,073	0,4	1,006
0,96	1,191	0,8	1,033	0,0	0,999

Sie lassen erkennen, dass die in Rede stehende Zeit nach Gl. (13) allerdings erheblich zu klein gefunden werden kann, wenn h nur wenig $< h_0$ ist, weshalb dieser Fall ausgeschlossen werden muss, wenn die augenblickliche Ausflussgeschwindigkeit u, wie im Folgenden stets geschehen soll, derjenigen gleich gesetzt wird, welche unter übrigens gleichen und gleich bleibenden Umständen, also im Beharrungszustande stattfinden würde. Uebrigens wird der Fehler dieser Voraussetzung entsprechend kleiner, als er oben beispielsweise gefunden wurde, wenn wie gewöhnlich $F > 10A$, also $m > 100$ ist. Immer wird dabei m so gross vorausgesetzt, dass (bei entsprechender Wahl des Geschwindigkeitscoefficienten φ) 1 gegen m vernachlässigt werden, und somit im Falle $p_0 = p$ die der augenblicklichen Höhe x der freien Wasseroberfläche über dem Schwerpunkte S der Mündung entsprechende Ausflussgeschwindigkeit

$$u = \varphi\sqrt{2gx}$$

gesetzt werden kann. Wird dann jetzt mit A die Grösse der Ausflussöffnung selbst, der kleinste Querschnitt mit αA, und mit $\mu = \alpha\varphi$ der

Ausflusscoefficient bezeichnet, der Horizontalschnitt X des Gefässes in der Höhe x über S aber im Allgemeinen als Function von x vorausgesetzt. So ist das Wasservolumen, welches in einem Zeitelement dt ausfliesst,

$$-X dx = \mu A \sqrt{2gx}\,.\,dt$$

und folgt daraus die Zeit, in welcher x von h_0 bis h abnimmt,

$$t = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}} \int_h^{h_0} \frac{X dx}{\sqrt{x}} = T_0 - T \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15),$$

unter T_0 und T die den anfänglichen Wasserstandshöhen h_0 und h entsprechenden Entleerungszeiten:

$$T_0 = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}} \int_0^{h_0} \frac{X dx}{\sqrt{x}}; \quad T = \frac{1}{\mu A\sqrt{2g}} \int_0^{h} \frac{X dx}{\sqrt{x}} \quad \ldots \ldots (16)$$

des Gefässes, d. h. die Zeiten verstanden, in welchen die freie Wasseroberfläche von jenen anfänglichen Höhen bis zur Höhe des Schwerpunkts der Mündung niedersinken würde. Die Berechnung dieser einzelnen Zeiten nach Gl. (16) kann zwar, wenn die Mündung in der Seitenwand des Gefässes sich befindet, wegen der veränderten Umstände fehlerhaft sein, welche eintreten, sobald die niedergehende Wasseroberfläche den höchsten Punkt der Mündung erreicht hat, doch gleichen diese Fehler in der Differenz $= T_0 - T$ (Gl. 15) sich aus, wenn nur h grösser ist, als die Höhe jenes höchsten Punktes über dem Schwerpunkte der Mündung.

Jene Fehlerhaftigkeit der Formeln findet nicht statt, wenn es sich um einen Ausfluss unter Wasser, nämlich in ein anderes Gefäss handelt, in welchem die freie Wasseroberfläche höher liegt, als der höchste Punkt der Mündung, und infolge entsprechenden Abflusses oder sehr grosser Dimensionen dieses Gefässes auf constanter Höhe erhalten wird. Die Höhen x, h und h_0 in den Gleichungen (15) und (16) sind dann von dieser äusseren Wasseroberfläche aus zu rechnen, wenn das Gefäss als entleert betrachtet wird, sobald die Oberfläche des Wassers in ihm bis zu gleicher Höhe mit dem äusseren Wasser gesunken ist.

§. 117. Besondere Fälle.

1) Wenn der Horizontalschnitt des Gefässes constant ist ($X = Const. = F$), so folgt aus Gl. (15) die Zeit des Niedersinkens der Wasseroberfläche von der Höhe h_0 zur Höhe h (über dem Schwerpunkt der Mündung oder über der äusseren Wasseroberfläche, jenachdem es sich um einen Ausfluss in die freie Luft oder unter Wasser handelt):

$$t = \frac{2F}{\mu A \sqrt{2g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h}) = \frac{F}{\mu A}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right) \quad \ldots (1).$$

Die der anfänglichen Wasserstandshöhe h entsprechende Entleerungszeit

$$T = \frac{F}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2Fh}{\mu A \sqrt{2gh}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ist doppelt so gross wie die Zeit, in welcher bei constanter Wasserstandshöhe h dasselbe Wasservolumen Fh ausfliessen würde.

2) Wenn der Horizontalschnitt des Gefässes eine ganze algebraische Function 2ten Grades des Abstandes von irgend einer, also von jeder bestimmten Horizontalebene ist, d. h.

$$X = F + px + qx^2,$$

unter F, p, q Constante verstanden, unter F insbesondere den Inhalt des Horizontalschnittes für $x = 0$, so folgt aus Gl. (16) im vorigen §.

$$T = \frac{1}{\mu A \sqrt{2g}} \int_0^h \left(Fx^{-\frac{1}{2}} + px^{\frac{1}{2}} + qx^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\mu A \sqrt{2g}} \left(2Fh^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} ph^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} qh^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(F + \frac{1}{3} ph + \frac{1}{5} qh^2\right)$$

oder auch, wenn G und H die Horizontalschnitte des Gefässes für $x = \frac{h}{2}$ resp. $x = h$ bedeuten, durch Substitution der aus den Gleichungen

$$G = F + p\frac{h}{2} + q\frac{h^2}{4}; \quad H = F + ph + qh^2$$

sich ergebenden Werthe von ph und qh^2:

$$T = \frac{1}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left[F + \frac{1}{3}(-3F + 4G - H) + \frac{2}{5}(F - 2G + H)\right]$$
$$= \frac{6F + 8G + H}{15\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Daraus folgt die Zeit t, in welcher die Wasserstandshöhe von h_0 bis h abnimmt, wenn G_0 und H_0 die Horizontalschnitte des Gefässes für $x = \frac{h_0}{2}$ resp. $x = h_0$ bedeuten,

$$t = \frac{1}{\mu A}\left(\frac{6F + 8G_0 + H_0}{15}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \frac{6F + 8G + H}{15}\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) \quad (4).$$

Der Voraussetzung: $X = F + px + qx^2$, auf welcher diese Formeln beruhen, entsprechen insbesondere zweierlei Arten von Gefässformen; bei der ersten kann die Gefässwand durch Drehung einer Linie zweiten Grades um eine verticale Hauptaxe entstanden gedacht werden, bei der anderen durch Bewegung eines ebenen und beständig horizontalen Polygons der Art, dass infolge entsprechender stetiger Aenderung seiner Gestalt und Grösse seine Eckpunkte auf beliebigen geraden Linien bleiben. In specielleren Fällen können dabei die Horizontalschnitte G und G_0 durch F und H resp. durch F und H_0 bestimmt sein, so dass sie nicht besonders gegeben oder durch Messung ermittelt zu werden brauchen. Im Falle eines prismoidischen Gefässes z. B., dessen Wandfläche durch jene Bewegung eines ebenen Polygons entstanden zu denken ist, sind die beiden Specialfälle eines obeliskförmigen und eines pyramidalen Gefässes bemerkenswerth; sind bei jenem a, b und a', b' die Seiten der rechteckigen Horizontalschnitte F und H (a parallel a', b parallel b'), so ist:

$$G = \frac{a + a'}{2}\,\frac{b + b'}{2}; \quad 6F + 8G + H = 8F + 2(ab' + a'b) + 3H,$$

während bei dem pyramidalen Gefässe

$$\sqrt{G} = \frac{\sqrt{F} + \sqrt{H}}{2}, \text{ also } 6F + 8G + H = 8F + 4\sqrt{FH} + 3H \text{ ist.}$$

3) Von den Gleichungen (3) und (4) kann zuweilen auch als Näherungsformeln Gebrauch gemacht werden bei Gefässen von complicirter oder solcher Gestalt, die geometrisch nicht definirbar oder nur unvollkommen bekannt ist. Wenn es sich z. B. um die Zeit t handelt, in welcher die Wasserstandshöhe eines theilweise abzulassenden Teichs (einer Wasseransammlung in muldenförmiger Bodenvertiefung) von h_0 bis h gerechnet vom Schwerpunkte der Mündung resp. vom äusseren oder Unter-

wasserspiegel, jenachdem der Ausfluss frei in die Luft oder unter Wasser stattfindet) abnehmen wird, dabei aber nur die anfängliche Grösse $= H_0$ der freien Wasseroberfläche des Teichs und die grösste Tiefe $= a + h_0$ desselben bekannt ist, so wird es in der Regel zugleich am einfachsten und möglichst wenig fehlerhaft sein, alle Horizontalschnitte ihren Höhen über dem tiefsten Punkte proportional zu setzen (wie wenn das Teichbett ein Umdrehungsparaboloid mit verticaler Axe bildete), also

$$F = \frac{a}{a + h_0} H_0 \quad \text{und} \quad G_0 = \frac{a + \frac{h_0}{2}}{a + h_0} H_0,$$

$$\text{somit} \quad 6F + 8G_0 + H_0 = \frac{15a + 5h_0}{a + h_0} H_0,$$

$$\text{ebenso} \quad 6F + 8G + H = \frac{15a + 5h}{a + h} H = \frac{15a + 5h}{a + h_0} H_0$$

zu setzen, folglich nach Gl. (4)

$$t = \frac{H_0}{\mu A} \left(\frac{a + \frac{h_0}{3}}{a + h_0} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \frac{a + \frac{h}{3}}{a + h_0} \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) \ldots\ldots (5).$$

§ 118. Ausfluss des Wassers aus einem Gefässe mit constantem Zufluss.

Ist wieder X der Horizontalschnitt des Gefässes in der Höhe x über dem Schwerpunkte der Mündung A oder über dem (constant erhaltenen) Unterwasserspiegel, jenachdem es sich um einen Ausfluss in die freie Luft oder unter Wasser handelt, so ist, wenn das Gefäss einen constanten Zufluss $= V$ Cubikm. pro Sec. hat, die Abnahme seines Wassergehaltes bei der augenblicklichen Wasserstandshöhe x im nächstfolgenden Zeitelement dt:

$$-X dx = (\mu A \sqrt{2gx} - V) dt$$

und folglich die Zeit, in welcher die Wasserstandshöhe von h_0 in h übergeht,

$$t = \frac{1}{\mu A \sqrt{2g}} \int_h^{h_0} \frac{X dx}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \quad \text{mit} \quad \sqrt{a} = \frac{V}{\mu A \sqrt{2g}} \ldots\ldots (1),$$

d. h. unter a die constante Wasserstandshöhe verstanden, bei welcher V Cubikm. Wasser pro Sec. ausfliessen würden.

Ist X constant $= F$, so folgt aus Gl. (1):

$$t = \frac{F}{\mu A}\sqrt{\frac{2}{g}}\int_h^{h_0} \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

oder wegen

$$\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{x}} + \sqrt{a}\,\frac{\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

$$= d\sqrt{x} + \sqrt{a}\;.\,dln(\sqrt{x} - \sqrt{a})$$

$$t = \frac{F}{\mu A}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{2a}{g}}\, ln\frac{\sqrt{h_0} - \sqrt{a}}{\sqrt{h} - \sqrt{a}}\right) \ldots 2,$$

im Falle $V = 0$, also $a = 0$, übereinstimmend mit Gl. (1) im vorigen §. Ist aber V nicht $= 0$, so nähert sich die Wasserstandshöhe h bei unendlich wachsender Zeit mehr und mehr der Grenze a abnehmend oder zunehmend, jenachdem $a \lessgtr h_0$, also $V \lessgtr \mu A\sqrt{2gh_0}$ ist; nach Gl. (2 ist nämlich $t = \infty$ für $h = a$.

§. 119. Communicirende Gefässe.

G' und G'' seien zwei Wasser enthaltende Gefässe, welche durch eine Oeffnung in einer gemeinschaftlichen Wand oder durch ein Rohr unter Wasser communiciren; A sei die Grösse jener Oeffnung resp. der Querschnitt des Verbindungsrohrs bei der Einmündung in das Gefäss G'', falls die Bewegung des Wassers, wie hier vorausgesetzt wird, von G' nach G'' stattfindet. In irgend einem Augenblicke dieser Bewegung seien X' und X'' die Grössen der horizontalen freien Wasseroberflächen in G' resp. G'', welche Grössen vermöge der gegebenen Formen beider Gefässe bekannte Functionen der Höhen x' und x'' jener Oberflächen über einer gewissen festen Horizontalebene sind; $x = x' - x''$ sei die augenblickliche Höhendifferenz beider Oberflächen.

Wenn keines von beiden Gefässen einen Zu- oder Abfluss hat ausser demjenigen, der durch die Communication zwischen ihnen bedingt wird, so ist, unter dx', dx'' und dx sich entsprechende

d. h. in demselben Zeitelement dt stattfindende Aenderungen von x', x'', x verstanden,

$$X'dx' + X''dx'' = 0 \quad \text{und} \quad dx' - dx'' = dx,$$

$$\text{also} \quad dx'' : -dx' : -dx = X' : X'' : X' + X''$$

und bei Voraussetzung eines gleichen äusseren Drucks an den freien Wasseroberflächen in beiden Gefässen das im Zeitelement dt aus G' in G'' einfliessende Wasservolumen:

$$\mu A \sqrt{2gx}\,.\,dt = -X'dx' = -\frac{X'X''}{X'+X''}\,dx.$$

Daraus folgt die Zeit t, in welcher die Höhendifferenz x der Wasseroberflächen von h_0 bis h abnimmt:

$$t = \frac{1}{\mu A \sqrt{2g}} \int_h^{h_0} \frac{X'X''}{X'+X''} \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Zur Ausführung der Integration sind in den als Functionen von x' resp. x'' gegebenen Grössen X', X'' zuvor x' und x'' durch x auszudrücken vermittels der Gleichungen:

$$\int_{h'}^{x'} X'dx' + \int_{h''}^{x''} X''dx'' = 0, \quad x' - x'' = x,$$

unter h' und h'' irgend zwei sich entsprechende, z. B. die Anfangswerthe von x' und x'' verstanden.

Sind die Horizontalschnitte beider Gefässe constant:

$$X' = Const. = F', \quad X'' = Const. = F'',$$

so folgt aus Gl. (1):

$$t = \frac{1}{\mu A} \frac{F'F''}{F'+F''} \left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Hätte das zweite Gefäss G'' einen Abfluss der Art, dass die Wasserstandshöhe in ihm unverändert bleibt, so würde der Erfolg offenbar derselbe sein, als ob ohne solchen Abfluss F'' unendlich gross wäre; nach Gl. (2) ist dann, weil F' als Summand neben F'' verschwindet,

$$t = \frac{F'}{\mu A} \left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

übereinstimmend mit §. 117, Gl. (1).

bei [illegible] Wasserstandshöhe im ersten Gefässe [illegible] [illegible] entsprechenden Zuflusses zu demselben oder wegen unendlicher Grösse seines Horizontalschnittes F geht Gl. (2) über in:

$$= \frac{F'}{\mu\lambda}\left(\sqrt{\frac{2h_0}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right) \ldots \ldots \ldots (4)$$

§. 120. Füllungs- und Entleerungszeit von Schleusenkammern.

Eine Schifffahrtsschleuse ist eine in einem Schifffahrtscanal [illegible] geordnete, die Continuität desselben örtlich unterbrechende Kammer, welche durch verticale, mit schliessbaren Schutzöffnungen versehene Thore, ein Ober- und ein Unterthor beziehungsweise gegen das Ober- und Unterwasser hin abgesperrt werden kann, um das der Schifffahrt hinderliche Gefälle an einer gewissen Canalstrecke örtlich zu concentriren, um [illegible] ein Schiff, welches bei geschlossenem Oberthor durch das geöffnete Unterthor in die Schleusenkammer eingefahren ist, bei wieder geschlossenem Unterthor durch Oeffnung der Schützen im Oberthor auf die Höhe h mit dem steigenden Wasserspiegel in der Kammer zu heben und [illegible] durch das geöffnete Oberthor nach dem Oberwasser hin zu entlassen, [illegible] umgekehrt ein Schiff, welches bei geschlossenem Unterthor durch das geöffnete Oberthor in die Kammer einfuhr, nach Schliessung des letzteren durch Oeffnung der Schützen im Unterthor von der Höhe h nieder- [illegible] durch das geöffnete Unterthor nach dem Unterwasser hin zu entlassen. Zur Beurtheilung der Zeit, die zu diesen Operationen erforderlich ist, handelt es sich im ersten Falle um die Füllungszeit, im zweiten um die Entleerungszeit der Kammer.

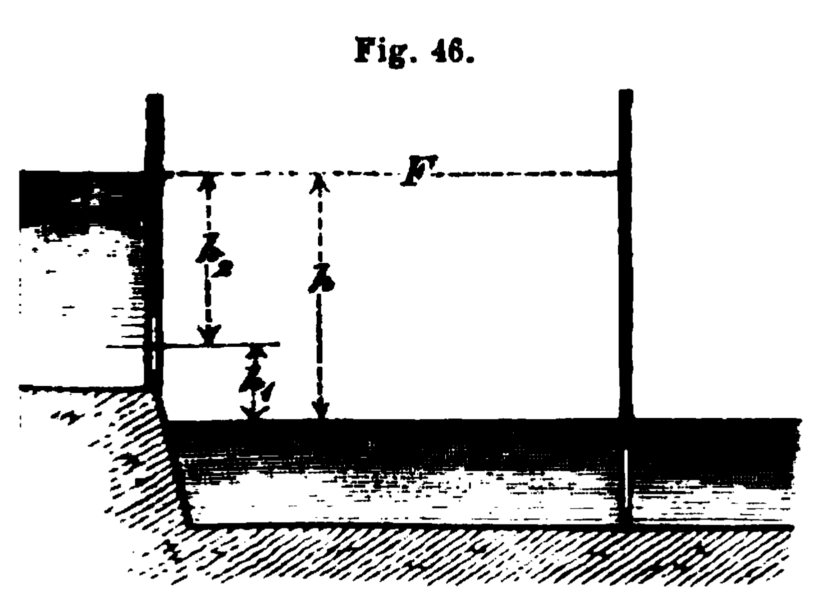
Bei doppelten oder gekuppelten Schleusen, bestehend aus einer oberen und einer unteren Kammer, die gegen einander durch ein drittes, das Mittelthor abgesperrt werden können, und die aus praktischen Gründen statt jener einfachen Schleusen dann Anwendung finden, wenn das Gefälle so gross ist, dass eine Vertheilung der ganzen Hebung oder Senkung auf zwei Kammern zweckmässig ist, handelt es sich ausser der Füllungszeit der oberen Kammer durch die Schutzöffnungen im Oberthor und der Entleerungszeit der unteren Kammer durch die Schutzöffnungen im Unterthor noch um die Ausgleichungszeit des Wasserstandes in den zwei communicirende Gefässe bildenden Kammern, nämlich um die Zeit, in welcher

wenn bei geschlossenen Thoren das Wasser anfangs in der oberen Kammer höher stand, als in der unteren, dieser Höhenunterschied bis Null abnimmt, nachdem die Schützen des Mittelthors geöffnet wurden.

Zur Berechnung dieser verschiedenen Zeiten dienen die Formeln (2), (3) und (4) des vorigen §., sofern die Seitenwände der Kammern vertical oder nur so wenig geneigt sind, dass ihre Horizontalschnitte mit constanten Mittelwerthen in Rechnung gebracht werden können.

1) **Füllungszeit einer Schleusenkammer** (einer einfachen Schleuse oder der oberen Kammer einer doppelten Schleuse) vom Oberwasser aus, dessen freie Oberfläche dabei ihrer sehr bedeutenden Grösse wegen als auf constanter Höhe bleibend vorauszusetzen ist.

Fig. 46.



F sei der Horizontalschnitt der Kammer,

A die gesammte Grösse der Oeffnung im Oberthor,

a die Höhe dieser rechteckigen Oeffnung mit horizontalen und verticalen Seiten,

h die anfängliche Höhendifferenz des Oberwasserspiegels und der freien Wasseroberfläche in der Kammer, welche durch die Horizontalebene des Schwerpunktes von A in einen unteren und oberen Theil $= h_1$ und h_2 getheilt werde (Fig. 46, worin die Schütze im Unterthor geschlossen zu denken ist).

Im Allgemeinen wäre nun die Füllungszeit t streng genommen in drei einzelne, besonders zu berechnende Zeiten zu zerlegen, entsprechend einer Zerlegung der ganzen Steighöhe h der inneren Wasseroberfläche in die Bestandtheile:

$$h_1 - \frac{a}{2},\ a,\ h_2 - \frac{a}{2}.$$

In der ersten dieser Zeiten findet durch A ein freier Ausfluss statt unter der mittleren) wirksamen Druckhöhe h_2; in der zweiten theilt die steigende Wasseroberfläche die Mündung A in einen oberen Theil von der Höhe x und einen unteren von der Höhe $a - x$, und findet, während x von a bis 0 veränderlich ist, durch jenen ein freier Ausfluss mit wirksamer Druckhöhe $= h_2 - \frac{a}{2} + \frac{x}{2}$, durch diesen ein Ausfluss unter Wasser mit wirksamer Druckhöhe $= h_2 - \frac{a}{2} + x$ statt; in der dritten endlich

erfolgt der Ausfluss unter Wasser bei einer von $h_2 - \frac{a}{2}$ bis 0 stetig abnehmenden Druckhöhe.

Die umständliche Berechnung der zweiten dieser drei Zeiten entspricht indessen kaum der Unsicherheit des Ausflusscoefficienten und des überhaupt hier zu beanspruchenden Genauigkeitsgrade; es ist deshalb vorzuziehen, die ganze Füllungszeit t in nur zwei Theile t_1 und t_2 zu theilen, während welcher die Wasseroberfläche in der Kammer um h_1 resp. h_2 steigt, und bei ihrer Berechnung die wirksame Druckhöhe beziehungsweise constant $= h_2$ resp. $=$ der veränderlichen Höhendifferenz der äusseren und inneren Wasseroberfläche zu setzen. Sie wird dann zwar in Betreff t_1 zu Ende, in Betreff t_2 zu Anfang etwas zu gross gesetzt, doch kann der dadurch verursachte Fehler durch entsprechend kleinere Annahme von μ genügend ausgeglichen werden, wenn a hinlänglich klein im Vergleich zu h ist.

Hiernach ist nun

$$t_1 = \frac{Fh_1}{\mu A\sqrt{2gh_2}}$$

und nach Gl. (4) im vorigen §. (mit $F'' = F$, $h_0 = h_2$, $h = 0$):

$$t_2 = \frac{F}{\mu A}\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = \frac{2Fh_2}{\mu A\sqrt{2gh_2}}.$$

Streng genommen ist zwar μ in beiden Formeln nicht ganz gleich; mit einem constanten Mittelwerth aber ergiebt sich

$$t = t_1 + t_2 = \frac{F}{\mu A}\,\frac{h_1 + 2h_2}{\sqrt{2gh_2}} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; 1$$

2) Zur Berechnung der **Entleerungszeit einer Schleusenkammer** (einer einfachen Schleuse oder der unteren Kammer einer doppelten Schleuse), d. h. der Zeit ihrer Entleerung in das Unterwasser, dessen freie Oberfläche dabei ihrer bedeutenden Grösse wegen als in constanter Höhe bleibend vorauszusetzen ist, sei

F der Horizontalschnitt der Kammer,

A die gesammte Grösse der Oeffnung im Unterthor,

h die anfängliche Höhendifferenz der freien Wasseroberfläche in der Kammer und des Unterwasserspiegels (Fig. 46, worin die Schütze im Oberthor geschlossen zu denken ist).

Es sind hier zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Wenn die Schutzöffnung sich ganz unter dem Unterwasserspiegel

befindet, wie Fig. 46 andeutet, ist nach Gl. (3) im vorigen §. (mit $F' = F$, $h_0 = h$, $h = 0$):

$$t = \frac{F}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

b) Wenn die Schutzöffnung, deren gesammte Breite $= b$ sei, nur theilweise unter Wasser liegt, nämlich durch die Ebene des Unterwasserspiegels in einen unteren Theil von der Höhe a_1 und einen oberen von der Höhe a_2 getheilt wird, so findet durch jenen ein Ausfluss unter Wasser mit von h bis 0 abnehmender Druckhöhe, durch diesen ein freier Ausfluss statt, der anderen Gesetzen folgt, sobald die mittlere Druckhöhe bis $\frac{a_2}{2}$ abgenommen, nämlich die sinkende Wasseroberfläche den oberen Rand der Mündung erreicht hat. Indem aber die Umständlichkeit eines diesen Umständen vollkommen entsprechenden Rechnungsverfahrens mit der nur in beschränktem Grade beanspruchten Genauigkeit des Resultates und der Unzuverlässigkeit der empirischen Coefficienten nicht in Verhältniss stände, kann man näherungsweise annehmen, dass das in Gl. (2) liegende Gesetz, demzufolge die Entleerungszeit

$$t = \frac{2Fh}{\mu A\sqrt{2gh}}$$

doppelt so gross ist, als die Zeit, in welcher bei unverändert bleibender anfänglicher Höhendifferenz $= h$ des Ober- und Unterwasserspiegels dasselbe Wasservolumen $= Fh$ ausfliessen würde, auch hier anwendbar ist, und somit setzen:

$$t = \frac{2Fh}{\mu b\left[a_1\sqrt{2gh} + a_2\sqrt{2g\left(h - \frac{a_2}{2}\right)}\right]} \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Der Umstand, dass dadurch t etwas zu klein gesetzt wird (um so mehr, je grösser a_2 im Vergleich mit a_1 ist), kann wieder durch entsprechend kleinere Annahme des Coefficienten μ unschädlich gemacht werden.

3) Ausgleichungszeit des Wasserstandes in den beiden Kammern einer doppelten Schleuse bei geöffneten Schützen im Mittelthor, während das Ober- und Unterthor nebst ihren Schützen geschlossen sind. Es sei (Fig. 47)

F_1 der Horizontalschnitt der unteren,

F_2 der Horizontalschnitt der oberen Kammer,

A die Grösse der Oeffnung im Mittelthor,

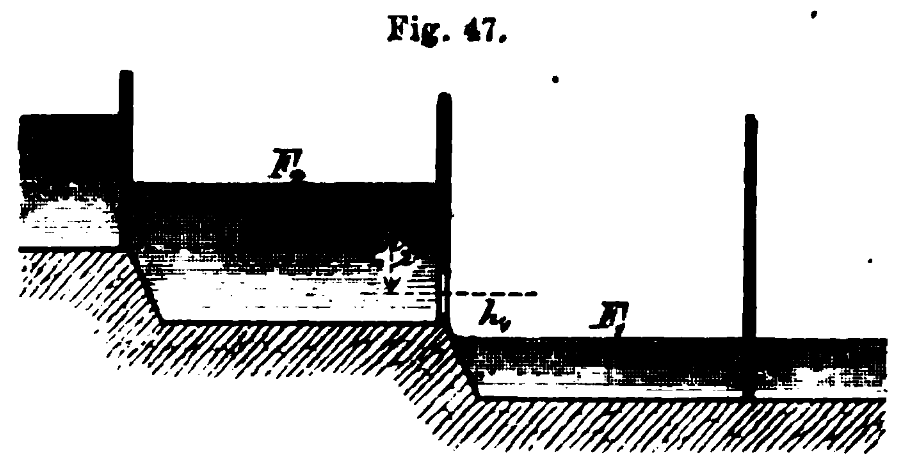


Fig. 47.

h_1 die anfängliche Höhe des Schwerpunktes von A über der Wasseroberfläche in der unteren Kammer,

h_2 die anfängliche Höhe der Wasseroberfläche in der oberen Kammer über dem Schwerpunkte von A.

Bei einer ähnlich angenäherten Rechnungsweise wie in den vorigen Fällen und unter der Voraussetzung:

$$F_2 h_2 > F_1 h_1$$

kann die ganze Ausgleichungszeit t aus zwei Theilen t_1 und t_2 bestehend betrachtet werden, so dass in der ersten Zeit t_1 die Wasseroberfläche in der unteren Kammer um h_1 steigt, in der oberen bis zur Höhe x über dem Schwerpunkte von A sinkt, bestimmt durch die Gleichung:

$$F_2(h_2 - x) = F_1 h_1; \quad x = \frac{F_2 h_2 - F_1 h_1}{F_2} \quad \ldots\ldots\ldots$$

während in der zweiten Zeit t_2 die Höhendifferenz beider Wasseroberflächen von x bis 0 abnimmt, und kann gesetzt werden nach Gl. (3) im vorigen §.:

$$t_1 = \frac{F_2}{\mu A}\left(\sqrt{\frac{2h_2}{g}} - \sqrt{\frac{2x}{g}}\right)$$

und nach Gl. (2) daselbst:

$$t_2 = \frac{1}{\mu A}\,\frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2}\sqrt{\frac{2x}{g}},$$

also mit einem erfahrungsmässig zu bestimmenden Mittelwerth von μ:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{F_2}{\mu A}\left(\sqrt{\frac{2h_2}{g}} - \frac{F_2}{F_1 + F_2}\sqrt{\frac{2x}{g}}\right) \quad \ldots\ldots$$

Insbesondere im Falle: $F_1 = F_2 = F$ ergiebt sich

$$t = \frac{F}{\mu A}\left(\sqrt{\frac{2h_2}{g}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(h_2 - h_1)}{g}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots$$

Was den in diesen Formeln vorkommenden Coefficienten μ betrifft, so ist derselbe am besten aus Beobachtungen der betreffenden Zeiten t an Schleusen von genau bekannten Dimensionen abzuleiten um so mehr, als er zugleich durch die Fehler der den Formeln zu Grunde liegenden Voraussetzungen bedingt wird. Zuverlässige solche Beobachtungen sind nicht zahlreich bekannt geworden. Erwähnenswerth sind die von Eyte-

wein als sorgfältig bezeichneten Beobachtungen (1799) des Bauinspector Kypke, betreffend die Füllungszeiten einer Schleusenkammer des Bromberger Canals.* Indem man dabei die Schleusenkammer erst so weit sich füllen liess, dass die Schutzöffnung bei Beginn der Zeitmessung schon ganz unter dem Wasserspiegel in der Kammer sich befand, ist die von diesem Augenblicke an gerechnete Füllungszeit t, unter F den Horizontalschnitt der Kammer, A die Schutzöffnung und h die anfängliche Höhendifferenz der Wasserspiegel verstanden, nach Gl. (4) im vorigen §.

$$t = \frac{F}{\mu A}\sqrt{\frac{2h}{g}}, \text{ also } \mu = \frac{F}{tA}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Bei zwei verschiedenen Versuchen war in rheinischem Fussmaass ausser $F = 4284$ Quadratfuss:

$$A = \frac{8}{3} \text{ und } \frac{43}{12} \text{ Quadratfuss,}$$
$$h = 7\frac{1}{12} \text{ und } 7 \text{ Fuss,}$$
$$t = 1763 \text{ und } 1236 \text{ Secunden.}$$

Daraus folgt mit g (= 9,81 Mtr.) = 31,256 Fuss pro Sec.

$$\mu = 0{,}613 \text{ und } = 0{,}647, \text{ im Mittel } \mu = 0{,}63.$$

In den Formeln (1), (3) und (6) muss übrigens, wie oben schon angedeutet wurde, μ kleiner gesetzt werden, und ausserdem können andere Umstände nach Maassgabe von §. 84 einen merklichen Einfluss auf diesen Coefficienten ausüben; im Durchschnitt wird die Annahme: $\mu = 0{,}6$ der Wahrheit nahe kommen.

2. Veränderlicher Ausfluss von Luft und Dampf aus Gefässen.

Wenn in Betreff des Aenderungsgesetzes des inneren Zustandes die Pressung p einer bestimmten Potenz des specifischen Volumens v proportional gesetzt wird:

$$pv^m = Const.,$$

was nach früheren Erörterungen um so eher geschehen kann, je weniger Wärme von aussen mitgetheilt resp. entzogen oder durch innere Widerstände erzeugt wird, und je weniger im Falle von Dampf derselbe feucht

* Eytelwein's Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik, 3te Aufl., 1842, S. 129.

ist, besonders aber (bei entsprechender Bestimmung des Exponenten n je nach den betreffenden Umständen) dann gerechtfertigt ist, wenn es sich nicht sowohl, wie bei längeren Röhren, um die Ermittelung der successiven Zustandsänderungen im ganzen Verlaufe der Bewegung, sondern nur, wie beim Ausfluss aus Gefässen, um die Darstellung der Gesetzmässigkeit einer resultirenden Zustandsänderung (mit Abstraction von dem effectiven Gesetze der Zwischenzustände) handelt, so sind zufolge den früheren Untersuchungen über die permanente strömende Bewegung die betreffenden Gleichungen für Luft und für Dampf von einerlei Form, insoweit die Temperatur dabei ausser Betracht bleibt, der innere oder Wärmezustand also durch p und v charakterisirt wird, indem dann auch die Gleichung des inneren Arbeitsvermögens für Gase und ungesättigte Dämpfe:

$$dU = \frac{1}{n-1}\, d(pv)$$

abgesehen von den verschiedenen Zahlenwerthen der Constanten n näherungsweise selbst bei feuchten Dämpfen zu Grunde gelegt werden kann (§. 110). Im Folgenden werden deshalb diese verschiedenen Fälle um so mehr gemeinschaftlich behandelt, als mit zunehmender Complication der thatsächlichen Verhältnisse nothgedrungen der Anspruch auf Genauigkeit bei der Lösung specieller hierher gehöriger Aufgaben mehr und mehr erniedrigt werden muss. Jedenfalls wird auch hier die wesentlich vereinfachende Voraussetzung gemacht, dass der augenblickliche Zustand an irgend einer Stelle mit genügender Annäherung demjenigen gleich gesetzt werden könne, welcher unter übrigens gleichen und unverändert bleibenden Umständen bei permanenter Bewegung daselbst stattfinden würde, eine Annahme, welche (nach ihrer Prüfung für die Bewegung des Wassers in §. 116) ohne Zweifel auch hier um so weniger fehlerhaft sein wird, je länger die veränderliche Bewegung schon gedauert hat bis zu dem Augenblicke, für welchen der Zustand resp. die verflossene Zeit gesucht wird.

§. 121. Communicirende Gefässe.

Ebenso wie früher (§. 119) aus dem Falle des Aus- und Einfliessens von Wasser aus einem in das andere von zwei communicirenden Gefässen die Gesetze des Ausflusses aus einem Gefässe ohne Zufluss in einen Raum von constanter Wasserstandshöhe resp. Pressung, sowie des Einflusses aus

einem solchen Raume in ein Gefäss ohne Abfluss als Specialfälle abgeleitet werden konnten, verhält es sich offenbar auch hier, wenn nur anstatt des Horizontalschnitts hier das Volumen des einen oder andern der beiden Gefässe unendlich gross gesetzt wird, und soll deshalb hier die Discussion des allgemeineren Falles vorangestellt werden.*

V und W seien die Volumina der beiden Gefässe, welche, gleichartige luftförmige Flüssigkeiten enthaltend, zunächst von einander abgesperrt sind; dabei seien die Pressung und das specifische Volumen im ersteren Gefässe $= p_0, v_0$, im anderen $= q_0, w_0$ gegeben, und zwar $p_0 > q_0$. Wenn dann in irgend einem Augenblicke, von welchem an die Zeit t gerechnet wird, die Communication zwischen beiden Gefässen hergestellt wird, und A die Grösse der Mündung ist, durch welche die Flüssigkeit in das Gefäss W einfliesst, so ist es die Aufgabe: die Zeit t zu finden, in welcher G Kgr. der Flüssigkeit (Luft oder Dampf) aus V nach W überfliessen, resp. in welcher die Pressung in V von p_0 bis p abnimmt oder in W von q_0 bis q zunimmt, sowie die inneren Zustände (p, v) und (q, w), welche dann in den beiden Gefässen stattfinden, vorausgesetzt dass diese Gefässe gross genug sind, um von der Bewegung in den weitaus grössten Theilen ihrer Räume abstrahiren zu dürfen, dass also die lebendige Kraft der in der That heftig bewegten Flüssigkeit diesseits und jenseits der Mündung A doch einer verschwindend kleinen Geschwindigkeit entsprechen würde, wenn sie auf die ganze Masse in beiden Gefässen gleichförmig vertheilt wird. Wenn dann ausserdem, wie es hier geschehen soll, von einer etwaigen Wärmetransmission durch die Gefässwände abgesehen wird, so kann das Aenderungsgesetz des inneren Zustandes im Gefässe V durch die Gleichung:

$$pv^n = p_0 v_0^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ausgedrückt werden, in welcher der Exponent n insbesondere für atmosphärische Luft $= 1{,}41$ und für ungesättigten Wasserdampf $= \frac{4}{3}$ zu setzen, bei gesättigtem Dampf aber kleiner und von den Umständen, insbesondere vom Flüssigkeitsgehalt abhängig ist. Das Aenderungsgesetz des Zustandes im Gefässe W ist bedingt durch die continuirliche Mischung der in ihr befindlichen mit der aus V her einströmenden und in W zur

* Eine mehr in die Einzelheiten eingehende Untersuchung desselben bei Abstraction von Widerständen enthalten verschiedene Aufsätze von J. Bauschinger in der Zeitschrift für Mathematik und Physik von Schlömilch, Kahl und Cantor, Jahrgang 1863.

Ruhe gelangenden Flüssigkeit, und zwar sind q und w durch p, v, G bestimmt mit Rücksicht darauf, dass in irgend einer Zeit t die Zunahme des Flüssigkeitsgewichtes in W = der Abnahme desselben in V, ferner auch die Zunahme des inneren Arbeitsvermögens der Flüssigkeit in W = der Abnahme desselben in V ist, welcher letztere Umstand unter den hier zu Grunde liegenden Voraussetzungen und bei Abstraction vom Einflusse der Schwerkraft aus der allgemeinen Gleichung des Arbeitsvermögens hier offenbar ebenso zu folgern ist wie bei der in §. 36 früher behandelten Aufgabe die dortige zweite Gleichung. Der erstere Umstand wird ausgedrückt durch:

$$W\left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w_0}\right) = V\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}\right) = G \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Was den anderen betrifft, so sei das specifische innere Arbeitsvermögen der betreffenden Flüssigkeit:

$$U = C + \frac{pv}{n-1},$$

unter C und n Constante verstanden, von denen letztere die oben angeführte Bedeutung hat. Im Falle gesättigten, mehr oder weniger feuchten Dampfes sind freilich streng genommen diesen Constanten verschiedene Werthe beizulegen bezüglich auf die Flüssigkeiten in den beiden Gefässen, besonders wenn etwa im einen oder anderen derselben ein Uebergang aus dem Zustande der Sättigung in den der Ueberhitzung stattfindet; wenn aber dieser Fall ausgeschlossen, vielmehr der gesättigte Dampf als beständig in beiden Gefässen gesättigt vorausgesetzt wird, so können die zweierlei Werthe von C und n wenigstens mit meistens genügender Näherung durch gleiche Mittelwerthe ersetzt werden, und folgt dann aus der fraglichen Gleichheit der in entgegengesetztem Sinne stattfindenden Aenderungen des inneren Arbeitsvermögens in beiden Gefässen die Gleichung:

$$\frac{W}{w}\left(C + \frac{qw}{n-1}\right) - \frac{W}{w_0}\left(C + \frac{q_0 w_0}{n-1}\right) =$$

$$= \frac{V}{v_0}\left(C + \frac{p_0 v_0}{n-1}\right) - \frac{V}{v}\left(C + \frac{pv}{n-1}\right)$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$W(q - q_0) = V(p_0 - p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Durch die 4 Gleichungen (1)—(3) sind im Allgemeinen je 4 der Grössen p, v, q, w, G durch die fünfte bestimmt.

Was nun die Zeit t betrifft, in welcher die fragliche Zustandsänderung seit Herstellung der Communication zwischen beiden Gefässen erfolgt, so

sei ζ der Widerstandscoefficient für die Bewegung bis zum Ausflussquerschnitte (bezogen auf die Geschwindigkeit in demselben), d. h. bis zu dem Querschnitte, in welchem die Pressung des Luft- oder Dampfstroms zuerst $= q$ geworden ist (das specif. Volumen aber noch nicht $= w$); dann ist nach §. 101 und §. 111 mit

$$m = \frac{n(1+\zeta)}{1+n\zeta};\quad 1+\zeta = \frac{n-1}{n}\,\frac{m}{m-1} \quad \ldots\ldots\ (4)$$

und wenn zunächst

$$\frac{q_0}{p_0} \geqq \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}} \quad \ldots\ldots\ (5)$$

vorausgesetzt wird, so dass um so mehr zu jeder folgenden Zeit $\frac{q}{p}$ grösser als jener Grenzwerth und somit der kleinste Querschnitt αA (unter α einen äusseren Contractionscoefficienten verstanden) mit dem Ausflussquerschnitte identisch ist, die Luft- oder Dampfmenge in Kgr., welche zur Zeit t bei gleich bleibenden Umständen in 1 Sec. überströmen würde,

$$\frac{dG}{dt} = \alpha A \sqrt{2g\,\frac{n}{n-1}\,\frac{p}{v}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]} \quad \ldots\ (6).$$

Daraus folgt die Zeit, in welcher die Pressung im Gefässe V von p_0 bis p abnimmt, resp. in W von q_0 bis q zunimmt, resp. G Kgr. der luftförmigen Flüssigkeit vom ersten in das zweite Gefäss überströmen,

$$t = \int_{p_0}^{p} f(p)\,dp = \int_{q_0}^{q} \varphi(q)\,dq = \int_{0}^{G} \psi(G)\,dG \quad \ldots\ldots\ (7),$$

jenachdem in Gl. (6) durch p, q oder G die übrigen der Grössen p, v, q, G vermittels der Gleichungen (1)—(3) ausgedrückt werden.

Ist aber
$$\frac{q_0}{p_0} < \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}} \quad \ldots\ldots\ (8),$$

so seien p' und q' diejenigen correspondirenden Werthe von p und q, welche mit Rücksicht auf Gl. (3) der Gleichung entsprechen:

$$\frac{q'}{p'} = \frac{Vp_0 + Wq_0}{Wp'} - \frac{V}{W} = \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}}$$

d. h.
$$p' = \frac{Vp_0 + Wq_0}{V + W\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}}};\quad q' = \frac{Vp_0 + Wq_0}{V\left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}} + W} \quad \ldots\ (9).$$

Dann ist, so lange $p > p'$ oder $q < q'$ ist, nach §. 111, Gl. (6) zu setzen:

$$\frac{dG}{dt} = \alpha A \sqrt{\frac{gm}{1+\zeta}\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m-1}}\frac{p}{v}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

und somit, jenachdem die Variablen ausser t vermittels der Gleichungen (1)—(3) durch p, q oder G ausgedrückt werden,

$$t = \int_{p_0}^{p} F(p)\,dp = \int_{q_0}^{q} \Phi(q)\,dq = \int_{0}^{G} \Psi(G)\,dG \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Ist dagegen $p < p'$ oder $q > q'$, so ergiebt sich, unter f, φ, ψ dieselben Functionen wie in Gl. (7) und unter G' den Werth von G verstanden, welcher $p = p'$ oder $q = q'$ entspricht,

$$\left.\begin{aligned} t &= \int_{p_0}^{p'} F(p)\,dp + \int_{p'}^{p} f(p)\,dp \\ &= \int_{q_0}^{q'} \Phi(q)\,dq + \int_{q'}^{q} \varphi(q)\,dq \\ &= \int_{0}^{G'} \Psi(G)\,dG + \int_{G'}^{G} \psi(G)\,dG \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Der in Rede stehende Vorgang ist als beendigt zu betrachten, wenn die Pressung in beiden Gefässen gleich gross $= p_1 = q_1$ geworden ist, bestimmt nach Gl. (3) durch

$$p_1 = q_1 = \frac{Vp_0 + Wq_0}{V + W} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

wenigstens kann eine weitere Zustandsänderung, ein weiteres Ueberströmen von V nach W oder eventuell ein theilweises Zurückströmen von W nach V, dann nur infolge einer viel langsamer stattfindenden Ausgleichung der Temperaturen zwischen den beiden Gefässinhalten und dem äusseren Medium, wovon hier abstrahirt wurde, allmählig erfolgen. Die Zeit t_1, welche zu jener Ausgleichung der Pressungen erfordert wird, ist bei Erfüllung der Bedingung (5):

$$t_1 = \int_{p_0}^{p_1} f(p)\,dp = \int_{q_0}^{q_1} \varphi(q)\,dq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

anderenfalls dagegen, d. h. wenn die Bedingung (8) erfüllt und weil dann jedenfalls auch $p_1 < p'$ resp. $q_1 > q'$ ist:

$$t_1 = \int_{p_0}^{p'} F(p)\,dp + \int_{p'}^{p_1} f(p)\,dp = \int_{q_0}^{q'} \Phi(q)\,dq + \int_{q'}^{q_1} \varphi(q)\,dq \quad \ldots (15)$$

§. 122. Besondere Fälle.

1) Der Ausfluss erfolge aus einem Gefässe vom Volumen V, welches keinen Zufluss hat und in welchem der anfängliche Zustand (p_0, v_0) herrscht, in einen Raum von constanter Pressung $q < p_0$ (entsprechend der Voraussetzung $W = \infty$ nach Gl. (3) im vorigen §.), z. B. in die atmosphärische Luft. Dann sind nach Gl. (1) und (2) im vorigen §. die Ausflussmenge $= G$ Kgr. und das specif. Volumen v im Gefässe als Functionen der abnehmenden Pressung p in demselben:

$$v = v_0 \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad G = \frac{V}{v_0}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right] \quad \ldots\ldots\ldots (1);$$

insbesondere mit $p = q$ ergeben sich daraus die Werthe von v und G am Ende der Ausflusszeit t_1, d. h. nachdem die Pressung im Gefässe $=$ der constanten äusseren Pressung geworden ist.

Zur Berechnung dieser Zeit t_1, und zwar zunächst im Falle

$$\frac{q}{p_0} \gtreqless \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}}; \quad m = \frac{n(1+\zeta)}{1+n\zeta} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

ergiebt sich aus Gl. (6) im vorigen §. durch Substitution von

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ und } dG = -\frac{1}{n}\,\frac{V}{v_0 p_0^{\frac{1}{n}}}\, p^{\frac{1}{n}-1}\,dp:$$

$$dt = \frac{-Vp^{\frac{1}{n}-1}\,dp}{n v_0 p_0^{\frac{1}{n}}\,\alpha A \sqrt{2g\frac{n}{n-1}\frac{p}{v_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]}}$$

$$= \frac{-Vdp}{n\alpha A\sqrt{2g\frac{n}{n-1}v_0 p_0^{\frac{1}{n}} p^{3-\frac{1}{n}}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]}}$$

$$= \frac{-Vdp}{n\alpha A q\sqrt{2g\frac{n}{n-1}p_0 v_0\left(\frac{q}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{n}}\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{n}-3}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]}}$$

oder mit

$$\frac{q}{p_0} = x_0 \text{ und } \frac{q}{p} = x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

also

$$\frac{-q\,dp}{p^2} = dx; \quad dp = -\frac{p^2}{q}dx = -q\frac{dx}{x^2}$$

und
$$C = \frac{V}{n\alpha A\sqrt{2 g p_0 v_0 \frac{n}{n-1} x_0^{\frac{n-1}{n}}}}$$

$$dt = \frac{C dx}{\sqrt{x^{1+\frac{1}{n}}\left(x^{\frac{2}{m}} - x^{1+\frac{1}{m}}\right)}} = \frac{C dx}{\sqrt{x^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{1}{m}} - x\right)}}$$

$$t_1 = C\int_{x_0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{1}{m}} - x\right)}}$$

Im Falle $x_0 < x'$ mit $x' = \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}}$

ist dagegen, so lange $x < x'$ ist, nach Gl. (10) im vorigen §. mit [illegible] Substitutionen für $\frac{1}{v}$ und dG:

$$dt = \frac{-V p^{\frac{1}{n}-1} dp}{n v_0 p_0^{\frac{1}{n}} \alpha A \sqrt{\frac{gm}{1+\zeta} x'^{\frac{m+1}{m}} \frac{p}{v_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}}} = \frac{C' dx}{\sqrt{x^{1+\frac{1}{n}}}},$$

wenn
$$C' = \frac{V}{n\alpha A\sqrt{\frac{g m p_0 v_0}{1+\zeta} x'^{\frac{m+1}{m}} x_0^{\frac{n-1}{n}}}}$$

$$= C\sqrt{\frac{2\frac{n}{n-1}}{\frac{m}{1+\zeta} x'^{\frac{m+1}{m}}}} = C\sqrt{\frac{2}{(m-1)x'^{\frac{m+1}{m}}}}$$

gesetzt wird, also

$$t_1 = C'\int_{x_0}^{x'} \frac{dx}{\sqrt{x^{1+\frac{1}{n}}}} + C\int_{x'}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{1}{m}} - x\right)}}$$

Wenn die anfängliche Pressung im Gefässe nur w[illegible] grösser, als die äussere Pressung, also

$$\xi_0 = 1 - x_0 = 1 - \frac{q}{p_0}$$

und allgemein $\xi = 1 - x = 1 - \frac{q}{p}$ ein kleiner Bruch ist, so ist bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung:

$$x^{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{1}{m}} - x\right) =$$

$$= \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\xi\right]\left[1 - \frac{1}{m}\xi + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)}{2}\xi^2 - 1 + \xi\right]$$

$$= \left[1 - \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\xi\right]\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{m}\xi\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right)\xi$$

$$= \frac{m-1}{m}(1 - a\xi)\xi$$

mit
$$a = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2}\frac{1}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

also nach Gl. (5) wegen $dx = -d\xi$

$$t_1 = C\int_0^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{m-1}{m}(1 - a\xi)\xi}}$$

oder wegen

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - a\xi^2}} = \int \frac{2\sqrt{a}\, d\xi}{\sqrt{1 - (1 - 2a\xi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \, arc\cos(1 - 2a\xi)$$

$$t_1 = C\sqrt{\frac{m}{m-1}\frac{1}{a}} \, . \, arc\cos(1 - 2a\xi_0)$$

$$= C\sqrt{\frac{m}{m-1}\frac{1}{a}} \, . \, arc\sin\sqrt{2a\xi_0(2 - 2a\xi_0)}$$

oder, mit Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung entwickelt nach der Reihe:

$$arc\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \ldots,$$

$$t_1 = C\sqrt{\frac{m}{m-1}\frac{1}{a}}\left[2\sqrt{a\xi_0}\left(1 - \frac{1}{2}a\xi_0\right) + \frac{8}{6}a\xi_0\sqrt{a\xi_0}\right]$$

$$= 2C\sqrt{\frac{m}{m-1}\xi_0}\left(1 + \frac{1}{6}a\xi_0\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

oder auch mit Rücksicht auf Gl. (4) im vorigen §. und auf die Bedeutungen von C und a nach obigen Gleichungen (4) und (10):

$$t_1 = \frac{2V}{naA}\sqrt{\frac{(1+\zeta)\xi_0}{2gp_0v_0\left(1-\frac{n-1}{n}\xi_0\right)}}\left(1+\frac{1}{6}a\xi_0\right)$$

$$= \frac{2V}{naA}\sqrt{\frac{(1+\zeta)\xi_0}{2gp_0v_0}}\left[1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\xi_0+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{2}\frac{1}{m}\right)\xi_0 \ldots\right.$$

$$= \frac{2V}{naA}\sqrt{\frac{(1+\zeta)\xi_0}{2gp_0v_0}}\left[1+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\frac{1}{n}+\frac{1}{4}\frac{1}{m}\right)\xi_0\right] \ldots (12)$$

Es sei z. B. $V = 10$ Cubikm., $A = 0{,}0001$ Quadratm., $q = 1$ Atm., $p_0 = 1{,}25$ Atm. ($\xi_0 = 0{,}2$) und die Anfangstemperatur der Luft im Gefässe $= 17^0$, also

$$p_0v_0 = RT_0 = 29{,}4 \,.\, 290 = 8526.$$

Dann ergiebt sich nach Gl. (12) mit $g = 9{,}81$, $n = 1{,}41$, $\zeta = 1$... also $m = 1{,}388$, und mit $a = 0{,}65$, entsprechend einer Mündung in dünner Wand:

$$t_1 = 273 \text{ Secunden.}$$

2) Eine luftförmige Flüssigkeit ströme aus einem Raum von constantem Zustande (p, v) in ein Gefäss vom Volumen W, welches eine luftförmige Flüssigkeit von derselben Art und dem Anfangszustande (q_0, w_0) enthält, so dass $q_0 < p$ ist. Diesem Falle entsprechen die Gleichungen des vorigen §. unter der Voraussetzung $V = \infty$, und man erhält aus Gl. (2) daselbst:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{w_0} + \frac{G}{W} \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

sowie aus Gl. (3) in Verbindung mit Gl. (2):

$$q = q_0 + \frac{G}{W}\frac{p_0 - p}{\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}}$$

für den Grenzfall, dass p und $v = p_0$ und v_0 constant sind. Nach Gl. ... im vorigen §., woraus

$$v^n dp + npv^{n-1}dv = 0; \quad -v^2\frac{dp}{dv} = npv$$

folgt, ist aber jener Grenzwerth

$$lim.\frac{p_0 - p}{\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}} = \frac{0}{0} = lim.\frac{-\frac{dp}{dv}}{\frac{1}{v^2}} = lim\left(-v^2\frac{dp}{dv}\right) = npv,$$

also
$$q = q_0 + \frac{G}{W} npv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Durch diese Gleichungen (13) und (14) sind das specifische Volumen w und die Pressung q bestimmt, welche im Gefässe stattfinden, nachdem G Kgr. der luftförmigen Flüssigkeit eingeströmt sind; man findet daraus G und w als Functionen von q:

$$G = W\frac{q - q_0}{npv}; \quad \frac{1}{w} = \frac{1}{w_0} + \frac{q - q_0}{npv} \ldots\ldots\ldots (15),$$

insbesondere mit $q = p$ die Einflussmenge und das specifische Volumen im Gefässe zu Ende der Einflusszeit t_1, d. h. nachdem die innere = der constanten äusseren Pressung geworden ist.

Zur Berechnung dieser Zeit t_1 sei zunächst:

$$\frac{q_0}{p} \geqq \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}}; \quad m = \frac{n(1+\zeta)}{1+n\zeta} \ldots\ldots\ldots (16).$$

Dann ist nach Gl. (6) im vorigen §. mit Rücksicht auf vorstehenden Ausdruck (15) von G:

$$dt = \frac{W dq}{npv\alpha A\sqrt{2g\frac{n}{n-1}\frac{p}{v}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m+1}{m}}\right]}}$$

oder mit
$$\frac{q_0}{p} = x_0 \text{ und } \frac{q}{p} = x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

$$dt = \frac{C dx}{\sqrt{x^{\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{1}{m}} - x\right)}} \text{ mit } C = \frac{W}{n\alpha A\sqrt{2gpv\frac{n}{n-1}}} \ldots (18),$$

$$t_1 = C\int_{x_0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^{\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{1}{m}} - x\right)}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19).$$

Im Falle $x_0 < x'$ mit $x' = \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}}$ ist dagegen, so lange $x < x'$ ist, nach Gl. (10) im vorigen §.:

$$dt = \frac{W dq}{npv\alpha A\sqrt{\frac{gm}{1+\zeta}x'^{\frac{m+1}{m}}\frac{p}{v}}} = C' dx,$$

wenn
$$C' = \frac{W}{n\alpha A\sqrt{\frac{gmpv}{1+\zeta}x'^{-\frac{m+1}{m}}}} = C\sqrt{\frac{2}{(m-1)x'^{-\frac{m+1}{m}}}} \quad \ldots (20)$$

gesetzt wird, also

$$t_1 = C'(x'-x_0) + C\int_{x'}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^{\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{1}{m}}-x\right)}} \quad \ldots \ldots (21)$$

Wenn die anfängliche Pressung im Gefässe nur wenig kleiner, als die äussere Pressung, also

$$\xi_0 = 1 - x_0 = 1 - \frac{q_0}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (22)$$

und allgemein $\xi = 1 - x = 1 - \frac{q}{p}$ ein kleiner Bruch ist, so ist, wie die Vergleichung von Gl. (5) und (19) unmittelbar erkennen lässt, ebenso wie im vorigen Falle nach Gl. (11):

$$t_1 = 2C\sqrt{\frac{m}{m-1}\xi_0}\left(1 + \frac{1}{6}a\xi_0\right),$$

wenn darin jetzt nur

$$a = \frac{3}{2}\frac{1}{m} \text{ statt } a = 1 + \frac{1}{n} + \frac{3}{2}\frac{1}{m}$$

gesetzt wird, also auch mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen m, n und ζ nach Gl. (4) im vorigen §. und auf die Bedeutung von C nach obiger Gl. (18):

$$t_1 = \frac{2W}{n\alpha A}\sqrt{\frac{(1+\zeta)\xi_0}{2gpv}}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{1}{m}\xi_0\right) \quad \ldots \ldots (23)$$

Handelt es sich z. B. um das Einströmen atmosphärischer Luft in ein verdünnte Luft enthaltendes Gefäss bis zur Ausgleichung der Pressungen innen und aussen, und ist $W = 10$ Cubikm., $A = 0{,}0001$ Quadratm., $p = 1$ Atm., $q_0 = 0{,}8$ Atm. ($\xi_0 = 0{,}2$), die Temperatur der äusseren Luft $= 17^0$, also

$$pv = RT = 29{,}4 \,.\, 290 = 8526,$$

so ergiebt sich nach Gl. (23) mit $g = 9{,}81$, $n = 1{,}41$, $\zeta = 1{,}04$, also $m = 1{,}388$, und mit $\alpha = 0{,}65$, entsprechend einer Mündung in dünner Wand:

$$t_1 = 252 \text{ Secunden},$$

etwas weniger, als bei dem analogen Beispiel im vorigen Fall, und zwar wird der Unterschied nur bedingt durch die verschiedenen Coefficienten von ξ_0 in den untergeordneten letzten Factoren der Ausdrücke (12) und (23); die Zahlenwerthe dieser Factoren sind hier beziehungsweise 1,122 und 1,036. Bei verschwindend kleinen Werthen von ξ_0 entsprechen beiden Fällen unter übrigens gleichen Umständen auch gleiche Werthe von t_1. —

Im Anschlusse an die hier behandelten Aufgaben mag bemerkt werden, dass bei gewissen speciellen Problemen der Maschinenlehre sich noch complicirtere Fälle darbieten, in denen die Veränderlichkeit des Zustandes der überströmenden luftförmigen Flüssigkeit durch eine gesetzmässige Veränderlichkeit der Ausflussöffnung A und der Gefässräume V, W wesentlich mit bedingt wird, z. B. bei dem Einströmen des Wasserdampfs aus dem Kessel in den Cylinder einer Dampfmaschine und beim Ausströmen aus diesem in die äussere Luft oder in den Condensator, während dabei der Kolben beweglich und die Schieberöffnung veränderlich ist. Es lässt sich begreifen, dass in solchen Fällen, wobei es sich vorzugsweise um das Gesetz der Pressungsänderung im Gefässe (in dem veränderlichen Cylinderraum einerseits vom Kolben) handelt, die Beschränkung auf eine nur angenäherte Lösung in noch höherem Grade nöthig wird. In späteren Theilen dieses Werkes wird sich Gelegenheit bieten, specieller darauf zurückzukommen und dabei die hier entwickelten Formeln weiter zu verwerthen.

III. Bewegung des Wassers in Canälen.

§. 123. Grundbegriffe und Bezeichnungen.

Oben offene Leitungen, in denen das Wasser mit einer theilweise freien Oberfläche strömt, sind theils natürliche, theils künstliche. Im ersteren Falle heisst die Leitung sammt dem darin fliessenden Wasser je nach der Grösse und der Wassermenge ein **Strom**, **Fluss** oder **Bach**, die Leitung aber das **Bett** des Stromes, Flusses oder Baches. Eine künstliche solche Leitung pflegt je nach Grösse und Beschaffenheit ein **Canal**, **Graben** oder **Gerinne** genannt zu werden, bei grösseren Dimensionen insbesondere ein Canal, bei kleineren ein Graben oder Gerinne, jenachdem die Leitung unmittelbar im Erdboden ausgehoben ist oder aber die Wände

von Holz, Stein, überhaupt von festen Materialien künstlich gebildet sind. zuweilen werden diese Bezeichnungen auch auf die betreffenden Leitungen sammt dem darin fliessenden Wasser übertragen.

Die Art der Wasserbewegung ist in allen diesen Fällen im Wesentlichen dieselbe, doch pflegt sie bei den einfacher und regelmässiger gestalteten, auf längere Strecken geradlinig fortgeführten künstlichen Leitungen reiner zur Erscheinung zu kommen, als bei natürlichen Wasserläufen, bei denen durch bedeutendere Unebenheiten und sonstige Unregelmässigkeiten des Bettes vielfache Geschwindigkeitsänderungen bezüglich auf Grösse und Richtung, Wirbel, Gegenströmungen etc. verursacht werden, wobei dann überhaupt von einer Theorie oder auch nur von einer empirisch zuverlässig ausdrückbaren Gesetzmässigkeit wenigstens bei dem gegenwärtigen Zustande unserer Kenntnisse kaum die Rede sein kann. Die folgenden Untersuchungen beziehen sich deshalb vorwiegend auf solche Leitungen, deren innere Wandflächen (abgesehen von geringeren Unebenheiten, ein verschiedenen Rauhigkeitsgrade entsprechend) im Ganzen cylindrische Flächen sind; eine solche Leitung, sei sie übrigens natürlich oder künstlich, von grossen oder kleinen Dimensionen, von diesem oder jenem Material gebildet, ist im Folgenden gemeint, wenn ohne nähere Bestimmung von einem *Canal* die Rede sein wird. Der stets sehr kleine Winkel, unter welchem eine erzeugende Gerade jener Cylinderfläche — auch *Längenprofil* des *Canals* genannt — gegen den Horizont geneigt ist, heisst der *Abhang des Canals*, die Durchschnittslinie der Cylinderfläche mit einer zur erzeugenden Geraden senkrechten Ebene (Querschnittsebene) ein *Querprofil des Canals*.

Unter den vorausgesetzten Umständen und abgesehen von anderen Einflüssen, als denjenigen der Schwere sowie der äusseren und inneren Reibung (abgesehen namentlich von dem Wellen bildenden Einflusse des Windes) ist die freie Oberfläche des im Canal strömenden Wassers eine cylindrische Fläche, deren erzeugende Gerade horizontal und rechtwinklig gegen das Längenprofil des Canals gerichtet ist. Eine Normalebene des letzteren (Querschnittsebene) schneidet also das Wasser in einem *Querschnitte*, welcher oben von einer horizontalen Geraden, im Uebrigen von einem Theile des Canalquerprofils begrenzt wird. Jener horizontale geradlinige obere Theil des Querschnittsumfanges heisse das *Querprofil des Wassers*, seine Länge die *Wasserbreite*; der andere Theil pflegt das benetzte Querprofil des Canals oder kurzweg das *benetzte Querprofil* genannt zu werden. Eine zu den Querschnitten senkrechte Verticalebene schneidet das Wasser in einem *Längenschnitt*, der unten

vom Längenprofil des Canals, oben vom Längenprofil des Wassers begrenzt wird; letzteres ist im Allgemeinen eine sehr schwach gekrümmte Curve.

Der Quotient aus dem Inhalte durch die Wasserbreite eines Querschnitts heisst die mittlere Tiefe desselben, wogegen der Quotient aus jenem Flächeninhalte durch das benetzte Querprofil als mittlerer Radius (bei halbkreisförmigem Querschnitte = dem halben Radius) oder auch als mittlere hydraulische Tiefe bezeichnet zu werden pflegt, indem diese Grösse, ohne von der kurzweg so genannten mittleren Tiefe (bei den gewöhnlich viel breiteren als tiefen Querschnitten) sehr verschieden zu sein, doch gerade die hier in Betracht kommenden hydraulischen Gesetze als vorzugsweise bestimmend erkannt wird.

Der Höhenunterschied zweier Punkte A und B des Längenprofils resp. der entsprechenden zwei Querprofile des Wassers heisst das Gefälle der betreffenden Strecke des Wasserlaufs; die Division des Gefälles durch die Länge der fraglichen Strecke liefert das mittlere specifische oder relative Gefälle derselben. Wegen der Kleinheit des letzteren ist es hierbei ganz unwesentlich, ob die Länge der betreffenden Strecke als die Bogenlänge AB oder als die Sehnenlänge AB oder als die Projection von AB entweder auf das Längenprofil des Canals oder auf die Horizontalebene verstanden, oder endlich ob für das definirte mittlere relative Gefälle der (in Bogenmaass ausgedrückte) Winkel gesetzt wird, unter welchem die Gerade AB gegen den Horizont geneigt ist; denn wenn dieser Winkel eine kleine Grösse erster Ordnung ist, so sind die Unterschiede bei allen jenen verschiedenen Auffassungen des relativen Gefälles nur kleine Grössen dritter Ordnung, die mit Rücksicht auf die viel grösseren wahrscheinlichen Fehler einer Gefällsbestimmung durch Messung (Nivellement) nicht in Betracht kommen. Ebenso kann unter dem specifischen resp. relativen Gefälle an einer gewissen Stelle sowohl der Abhang der freien Wasseroberfläche an dieser Stelle, d. h. ihr Neigungswinkel daselbst gegen den Horizont, als auch der Sinus oder die Tangente dieses Winkels verstanden werden. Aus demselben Grunde ist es schliesslich auch unwesentlich, wenn, wie üblich, zur Ausmessung eines Querprofils des Canals und eines Wasserquerschnitts die dazu der Definition zufolge dienende Querschnittsebene (Normalebene zum Längenprofil des Canals) thatsächlich durch eine Verticalebene ersetzt wird, welche, durch das Querprofil des Wassers gehend, unter einem sehr kleinen Winkel = dem Abhang des Canals gegen die Querschnittsebene geneigt ist, so dass beliebige Grössen (Strecken, Winkel, Flächen) in einer dieser beiden Ebenen von ihren Pro-

jectionen auf die andere höchstens um sehr kleine Grössen 2ter Ordnung verschieden sind.

Wenn das Längenprofil des Wassers nicht eine dem Längenprofil des Canals parallele Gerade ist, so können zwar streng genommen die Geschwindigkeiten des Wassers nicht in allen Punkten eines Querschnitts normal zu demselben gerichtet sein, und ist also letzterer nicht streng genommen ein Querschnitt im Sinne der betreffenden Definition in §. 72; indessen sind die durch jenen Umstand verursachten Abweichungen von der normalen Richtung thatsächlich viel kleiner, als solche, welche durch allerlei unregelmässige Mischungsbewegungen im Inneren der Wassermasse unter allen Umständen mehr oder weniger bedingt werden. Auf Grund der Annahme einer zum Querschnitte durchweg normalen Geschwindigkeitsrichtung wird unter der mittleren Geschwindigkeit in demselben der Quotient aus dem pro Secunde ihn durchströmenden Wasservolumen durch den Inhalt des betreffenden Querschnitts verstanden. Wenn dabei jenes Wasservolumen selbst mit Hülfe von Geschwindigkeitsmessungen an gewissen Stellen des Querschnitts bestimmt werden soll, so ergiebt es sich = der Summe der Producte aus den Inhalten aller Theile des Querschnitts und den ihnen zugehörigen Geschwindigkeiten. Die Theilung des Querschnitts erfolgt zu dem Ende gewöhnlich durch gerade Linien senkrecht zum Querprofil des Wassers, kurzweg Senkrechte genannt, und es wird als die mittlere Geschwindigkeit in einem von zwei solchen Senkrechten begrenzten Theil des Querschnitts diejenige Geschwindigkeit betrachtet, welche als mittlere Geschwindigkeit in einer gewissen Senkrechten von (nach Schätzung zu wählender) mittlerer Lage in jenem Flächentheil gefunden wird. Um aber letztere, d. h. die mittlere Geschwindigkeit in einer Senkrechten zu finden, kann man die in gewissen Punkten derselben thatsächlich gemessenen Geschwindigkeiten von diesen Punkten aus als entsprechende Strecken normal zur Senkrechten in dem betreffenden Längenschnitt (resp. der ihn vertretenden Zeichnung) aufträgt und die Endpunkte dieser Strecken durch eine stetige Curve verbindet; diese, die sogenannte Geschwindigkeitscurve, begrenzt dann zusammen mit der Senkrechten und den betreffenden Längenprofilen des Canals und des Wassers eine ebene Fläche, deren Inhalt durch die Länge jener Senkrechten zu dividiren ist, um die mittlere Geschwindigkeit in ihr zu finden. Dabei ist es im vorliegenden Falle völlig ausreichend, zur angenäherten Berechnung des Inhaltes der von einer empirischen Curve begrenzten ebenen Fläche, nämlich hier der von einer Geschwindigkeitscurve begrenzten Fläche sowie auch des Wasserquerschnitts (insbesondere bei natür-

lichen Canälen, deren Querprofil nur empirisch bestimmbar, nicht mathematisch definirbar ist), die allereinfachsten der zu solchem Zwecke dienenden bekannten Methoden zu benutzen. —

Was die Buchstabenbezeichnungen der vorstehend erklärten Grössen betrifft, so soll in der Regel bedeuten:

F den Flächeninhalt eines Wasserquerschnitts,

$b + p$ den Umfang desselben, nämlich

b die Wasserbreite,

p das benetzte Querprofil,

$a = \frac{F}{b}$ die mittlere Tiefe,

$r = \frac{F}{p}$ den mittleren Radius,

h das Gefälle für eine gewisse Canalstrecke $= l$,

$\alpha = \frac{h}{l}$ das mittlere relative Gefälle derselben resp.

$\alpha = \frac{dh}{dl}$ das relative Gefälle an einer gewissen Stelle,

Q das Wasservolumen (Wasserquantum), welches pro Sec. durch einen Querschnitt strömt,*

$u = \frac{Q}{F}$ die entsprechende mittlere Geschwindigkeit in demselben,

v die mittlere Geschwindigkeit in einer Senkrechten,

w die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich fast ausschliesslich auf die **permanente Bewegung** (den Beharrungszustand) des Wassers in einer gewissen Canalstrecke, welche dadurch charakterisirt wird, dass für jeden einzelnen Querschnitt dieser Strecke die Grössen F und u, folglich auch $Q = Fu$ constant sind. Das Wasservolumen Q ist dann auch für

---

* Wenn in dem von der strömenden Bewegung beliebiger Flüssigkeiten in Gefässen und Röhren handelnden vorigen Abschnitte das pro Sec. durch einen Querschnitt strömende Flüssigkeitsvolumen mit V bezeichnet wurde, so geschah es mit Rücksicht darauf, dass bei Gasen und Dämpfen das Quantum derselben auch häufig als Gewicht $= G$ in Rechnung gebracht wird, zur deutlichen Unterscheidung beider Arten von Quantitäten. Hier aber und in späteren Fällen, wo es sich nur um Wasser handelt (oder überhaupt um eine tropfbare Flüssigkeit, deren specif. Volumen constant gesetzt wird), soll zur Bezeichnung eines stets als Volumen verstandenen Wasserquantums der dazu allgemein übliche Buchstabe Q um so mehr benutzt werden, als er zur sonst auch üblichen Bezeichnung von Wärmemengen in solchen Fällen keine Verwendung findet.

alle Querschnitte gleich gross, wenn nicht durch Nebenleitungen (z. B. durch seitlichen Zufluss von Regenwasser, Quellen, durch Einsickerung von Wasser in den Boden, durch wässerige Niederschläge oder Verdunstung an der freien Oberfläche etc.) eine Veränderung von Q längs der betreffenden Canalstrecke verursacht wird, wie es unbeschadet des Beharrungszustandes geschehen kann.

Im Folgenden wird von dergleichen Nebenleitungen abgesehen, sofern nicht das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird, und es ist dann also im Beharrungszustande auch das Product Fu für alle Querschnitte gleich, wobei jedoch die für die einzelnen Querschnitte constanten Factoren F und u für die verschiedenen Querschnitte verschieden gross sein können, wenn sie nur einander umgekehrt proportional sind. Danach sind zwei Fälle des Beharrungszustandes zu unterscheiden, die gleichförmige und ungleichförmige permanente Bewegung, jenachdem F und u in den verschiedenen Querschnitten gleich gross sind oder nicht. Das Längenprofil des Wassers ist im ersten Falle eine dem Längenprofil des Canals parallele Gerade, im zweiten dagegen nicht und zwar im Allgemeinen eine Curve; das relative Gefälle ist im ersten Falle für alle Querschnitte gleich und = dem Abhang des Canals, im zweiten sowohl von diesem als auch im Allgemeinen für die verschiedenen Querschnitte verschieden. —

Die Gesetze der Bewegung des Wassers in Canälen, insoweit sie von technischem Interesse sind, betreffen vorzugsweise:

1) das Aenderungsgesetz der Geschwindigkeit von Punkt zu Punkt in einem Querschnitte,

2) die Beziehung zwischen der mittleren Geschwindigkeit, dem relativen Gefälle und den Dimensionen eines Querschnitts,

3) die Gestalt des Längenprofils des Wassers im Falle einer ungleichförmigen Bewegung,

4) die Gesetze des Aufstaues, d. h. der Erhebung der freien Wasseroberfläche durch örtliche Verkleinerung des Querschnitts, wie solche besonders bei natürlichen Wasserläufen zu technischen Zwecken (zum Betrieb hydraulischer Kraftmaschinen), zu Verkehrszwecken oder behufs der Stromregulirung durch Wehre, Brückenpfeiler und sonstige Strombauten bewirkt werden, und wobei es sich namentlich um die Beziehung handelt, welche zwischen der Stauhöhe, den Dimensionen des verkleinerten Querschnitts und dem pro Sec. hindurch fliessenden Wasservolumen stattfindet.

a. Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten in verschiedenen Punkten eines Querschnitts bei permanenter Bewegung.

§. 124. Theoretische Entwickelung.

Um zur Ableitung des Gesetzes, nach welchem sich die Geschwindigkeit w von Punkt zu Punkt in einem Querschnitte ändert, an die allgemeinen Gleichungen in §. 72 (worin nur w an die Stelle von u zu setzen ist, anzuknüpfen, ist auch dieser Querschnitt (unbeschadet seiner praktischen Behandlung als ebener Schnitt gemäss vorigem §.) hier im Sinne von §. 72 als eine Fläche vorzustellen, welche die von den materiellen Punkten durchlaufenen Bahnen rechtwinkelig schneidet. Indem dann letztere (bei Abstraction von allen solchen Einflüssen, die sich einer theoretischen Berücksichtigung entziehen) als ebene Curven in den Längenschnitten vorausgesetzt werden, welche von oben nach unten bei stetiger Krümmungsabnahme allmählig von den Längenprofilen des Wassers in die geraden Längenprofile des Canals übergehen, ist jeder Querschnitt eine Cylinderfläche, welche von den Längenschnitten in den Krümmungscurven (§. 72) geschnitten wird, während die darauf senkrechten Normalcurven hier horizontale Gerade sind, den verschiedenen Lagen der erzeugenden Geraden des cylindrischen Querschnitts entsprechend. Auf eine Berührungsebene des letzteren projiciren sich indessen auch seine Krümmungscurven als parallele Gerade, so dass die in §. 72 mit $\frac{1}{r'}$ und $\frac{1}{r''}$ bezeichneten Krümmungen hier beide $= 0$ sind. Von den Krümmungen der Normalschnitte des Querschnitts, welche in irgend einem Punkte desselben die betreffende Krümmungs- und Normalcurve berühren, in §. 72 beziehungsweise mit $\frac{1}{\varrho'}$ und $\frac{1}{\varrho''}$ bezeichnet, ist zwar streng genommen nur die letztere $= 0$, indessen ist auch erstere klein genug, um sie wenigstens zur Gewinnung hinlänglich angenäherter Ausdrücke für die Componenten der inneren Reibung $=$ Null setzen zu dürfen. Wird dann zu diesem Zweck schliesslich auch noch die sehr kleine Krümmung der Bahnen selbst, also $\frac{1}{\varrho} = 0$ gesetzt und berücksichtigt, dass mit $\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho''} = 0$ nach der hier gültigen Gleichung (4, a) in §. 72 auch $\frac{\partial w}{\partial s} = 0$ ist, so ergeben sich nach

Gl. (1) daselbst die Componenten der inneren Reibung pro Volumeneinheit im Sinne der Bahn, der Krümmungscurve und der Normalcurve:

$$R_s = R\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right);\ R_y = R_z = 0 \ldots\ldots\ldots 1.$$

Dabei ist R eine erfahrungsmässig zu bestimmende Constante. Ist ferner φ der Winkel, unter welchem die Bahn in irgend einem Punkte eines Querschnitts gegen den Horizont geneigt ist (enthalten zwischen dem Abhang $= \alpha$ der freien Wasseroberfläche an der Stelle des betreffenden Querschnitts und dem Abhang $= \beta$ des Canals), so sind bei Vernachlässigung kleiner Grössen höherer Ordnung die Componenten der beschleunigenden Massenkraft nach den drei Coordinatenrichtungen:

$$K_s = g\varphi;\ K_y = g;\ K_z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 2.$$

Dabei ist der Bogen y einer Krümmungscurve im Sinne von oben nach unten wachsend vorausgesetzt, so dass mit Rücksicht auf Fig. 27, S. 399 und die zugehörigen Festsetzungen daselbst hier der Krümmungshalbmesser ϱ einer Bahn positiv oder negativ genommen werden muss, jenachdem die Bahn nach unten oder nach oben concav gekrümmt ist, während ein positiver Werth des Krümmungshalbmessers ϱ' der Krümmungscurve einer stromabwärts concaven Krümmung derselben entspricht. In den Fundamentalgleichungen (3), §. 72 und in der Continuitätsgleichung (4, a) daselbst sind diese Krümmungshalbmesser ϱ und ϱ' nicht auch ohne Weiteres unendlich gross zu setzen, wie es oben zunächst nur zur Gewinnung angenäherter Ausdrücke von R_s, R_y und R_z geschah; es ist also nach der Continuitätsgleichung:

$$\frac{1}{w}\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{1}{\varrho'}$$

und nach den Fundamentalgleichungen mit Rücksicht auf obige Ausdrücke (1) und (2), sowie mit $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ entsprechend der Voraussetzung einer permanenten Bewegung, und wenn statt der specifischen Masse μ das specifische Gewicht $\gamma = g\mu$ eingeführt wird:

$$\gamma\varphi + R\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\gamma}{g} w \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\gamma w^2}{g\varrho'} \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \gamma\left(1 - \frac{w^2}{g\varrho}\right);\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt hinsichtlich des Aenderungs-

gesetzes der Pressung in einem Querschnitte mit Rücksicht darauf, dass $\frac{w^2}{g\varrho}$ stets ein sehr kleiner, neben 1 zu vernachlässigender Bruch ist:

$$p = p_0 + \gamma y \qquad (4),$$

wenn y von der freien Wasseroberfläche an gerechnet und mit p_0 die äussere Pressung an dieser bezeichnet wird. Wegen Gleichheit dieser Pressung p_0 für alle Querschnitte ist dann auch $\frac{\partial p}{\partial s}\, ds$, d. h. die Pressungsänderung längs dem Bogenelement $AA_1 = ds$ einer Bahn $= \gamma\,(y_1 - y)$, unter y und y_1 die längs den betreffenden Krümmungscurven gemessenen Entfernungen der Punkte A und A_1 von der freien Oberfläche verstanden, also auch wegen $y_1 - y = (\varphi - \alpha)\, ds$:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \gamma(\varphi - \alpha); \quad \gamma\varphi - \frac{\partial p}{\partial s} = \gamma\alpha \qquad (5)$$

und somit nach Gl. (3):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\gamma}{R}\left(\alpha - \frac{w^2}{g\varrho'}\right) = 0 \qquad (6).$$

In dieser Gleichung kann nicht mit demselben Rechte $\frac{w^2}{g\varrho'}$ gegen α vernachlässigt werden wie oben $\frac{w^2}{g\varrho}$ gegen 1, weil α selbst ein sehr kleiner Bruch ist; bedeutet a die mittlere Wassertiefe und β den Abhang des Canals, so ist mit den Mittelwerthen

$$w = u \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{\alpha - \beta}{a} \quad \text{im Mittel:} \quad \frac{w^2}{g\varrho'} = \frac{u^2}{ga}(\alpha - \beta) \quad (7),$$

welche Grösse bei bedeutender Geschwindigkeit und mässiger Wassertiefe sehr wohl mit dem relativen Gefälle α vergleichbar sein kann. Das durch Gl. (6) bedingte Aenderungsgesetz der Geschwindigkeit von Punkt zu Punkt eines Querschnitts ist also wesentlich abhängig von der Convergenz oder Divergenz der Bahnen, kann folglich bei ungleichförmiger permanenter Bewegung wesentlich anders sein wie bei gleichförmiger. Wird aber die weitere Untersuchung auf letzteren, also auf den Fall einer gleichförmigen permanenten Bewegung beschränkt, wobei die Bahnen parallele Gerade, die Querschnitte parallele Ebenen sind, so geht mit $\varrho' = \infty$ die Differentialgleichung (6) über in:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\alpha\gamma}{R} = 0 \qquad (8).$$

Ein partikuläres Integral derselben ist:

$$w = -\frac{\alpha\gamma}{2R}y^2$$

und wenn deshalb allgemein

$$w = -\frac{\alpha\gamma}{2R}y^2 + w_1$$

gesetzt wird, ergiebt sich durch Substitution in Gl. (8) für w_1 die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = 0,$$

welcher, wie man sich leicht überzeugt, die Function

$$w_1 = \varphi(z + yi) + \psi(z - yi) \text{ mit } i = \sqrt{-1}$$

entspricht, unter φ und ψ die Zeichen beliebiger Functionen verstanden. Somit ist:

$$w = -\frac{\alpha\gamma}{2R}y^2 + \varphi(z + yi) + \psi(z - yi) \ldots\ldots$$

Die Unbestimmtheit der Functionen φ und ψ wird beschränkt durch die Bedingung, dass

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\alpha\gamma}{R}y + i\varphi'(z + yi) - i\psi'(z - yi),$$

wobei zur Abkürzung $\varphi'(x)$ statt $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ und $\psi'(x)$ statt $\frac{d\psi(x)}{dx}$ gesetzt wurde, für $y = 0$ verschwinden muss, sofern wenigstens von verzögernden oder beschleunigenden Einflüssen an der freien Wasseroberfläche, die thatsächlich theils von der Luft herrühren, theils durch die abweichende Molekularbeschaffenheit der Oberflächenschicht des Wassers bedingt werden können (siehe S. 323 u. ff.), abstrahirt wird; denn dann ist die innere Reibung, welche nach §. 72 in irgend einem Punkte einer zur y-Axe senkrechten (der freien Wasseroberfläche parallelen) Ebene pro Flächeneinheit derselben $= \pm R\frac{\partial w}{\partial y}$ ist, an der freien Oberfläche selbst = Null. Hiernach ist also

$$\varphi'(z) - \psi'(z) = 0$$

für jedes z, so dass die Functionen φ und ψ sich nur durch eine Constante C unterscheiden können und

$$w = C - \frac{\alpha\gamma}{2R}y^2 + \varphi(z + yi) + \varphi(z - yi) \ldots\ldots$$

zu setzen ist. Insbesondere mit $y = 0$ ergiebt sich daraus die Geschwindigkeit an der freien Oberfläche $= C + 2\varphi(z)$, und wenn dieselbe

$f\,z$ bezeichnet wird, so ist allgemein $\varphi(z) = \frac{1}{2} f(z) - \frac{1}{2} C$, insbesondere auch

$$\varphi(z \pm yi) = \frac{1}{2} f(z \pm yi) - \frac{1}{2} C$$

und somit schliesslich *

$$w = -\frac{\alpha\gamma}{2R} y^2 + \frac{1}{2} f(z + yi) + \frac{1}{2} f(z - yi) \ldots . (11).$$

Wäre das Aenderungsgesetz der Oberflächengeschwindigkeit längs dem Querprofil des Wassers, also die Function f bekannt, so fände man aus Gl. (11) die Geschwindigkeit w für jeden anderen Punkt des Querschnitts. Insbesondere für den Fall eines unendlich breiten Querschnitts von gleichförmiger Tiefe, entsprechend einer horizontalen Geraden von unbegrenzter Länge als Querprofil des Canals, wäre die Oberflächengeschwindigkeit w_0, also die Function f eine Constante, und

$$w = w_0 - \frac{\alpha\gamma}{2R} y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots . (12).$$

Im Allgemeinen ist die Function f von der äusseren Reibung (Reibung an der Canalwand) und von der Gestalt des benetzten Querprofils abhängig, nämlich von der Grenzbedingung (5) in §. 72:

$$\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dz}{ds} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dy}{ds} + \frac{R_1}{R} = 0 \ldots\ldots\ldots . (13),$$

wenn hier ein Längenelement des benetzten Querprofils mit ds und die äussere Reibung pro Flächeneinheit mit R_1 bezeichnet wird. Wenn diese Gleichung (13) längs dem benetzten Querprofil integrirt und berücksichtigt wird, dass $\int R_1\, ds$ = der äusseren Reibung an dem Theil der Canalwand, welcher zwischen zwei um die Längeneinheit von einander entfernten Querschnitten enthalten ist, des gleichförmigen Beharrungszustandes wegen mit der nach dem Längenprofil des Canals oder des Wassers genommenen Componente der Schwerkraft des zwischen jenen Querschnitten enthaltenen Wassers im Gleichgewicht, also $= \alpha\gamma F$ sein muss, so erkennt man, dass die fragliche Grenzbedingung auch in der Form geschrieben werden kann:

$$\int \frac{\partial w}{\partial y} dz + \int \frac{\partial w}{\partial z} dy + \frac{\alpha\gamma F}{R} = 0 \ldots\ldots\ldots . (14).$$

Die Function f muss nun so beschaffen sein, dass durch Substitution von w

* Vergl. Bresse, Cours de mécanique appliquée, II. partie, p. 195.

aus Gl. (11) diese Gl. (14) erfüllt wird, wenn unter y und z die Coordinaten des benetzten Querprofils verstanden und die Integrationen über seine ganze Länge ausgedehnt werden. In dem Falle z. B., auf welchen sich Gl. (12) bezieht, ist $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\alpha\gamma}{R}y$, insbesondere für das benetzte Querprofil: $\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\alpha\gamma}{R}a$, wenn a die gleichförmige Tiefe bedeutet; die Gleichung (14) findet sich also erfüllt mit Rücksicht darauf, dass $a\int dz = F$ ist.

Wenn der Querschnitt in Beziehung auf eine Senkrechte symmetrisch ist und diese Symmetrieaxe als y-Axe, das Querprofil des Wassers nach wie vor als z-Axe angenommen wird, so ist die Oberflächengeschwindigkeit $= f(z)$ jedenfalls eine gerade Function von z, d. h. $f(z) = f(-z)$, und wenn ausserdem die Wassertiefe von der Symmetrieaxe aus nach beiden Seiten stetig abnimmt, wenigstens nicht stellenweise zunimmt, so muss $f(z)$ mit wachsendem Absolutwerthe von z beständig abnehmen. Setzt man als einfachste Function, welche diesen Forderungen entspricht,

$$f(z) = w_0 - nz^2,$$

unter n eine positive Constante und unter w_0 die Maximalgeschwindigkeit in der Mitte des Wasserquerprofils verstanden, so ist:

$$f(z + yi) = w_0 - n(z^2 + 2yzi - y^2)$$
$$f(z - yi) = w_0 - n(z^2 - 2yzi - y^2)$$

also nach Gl. (11):

$$w = w_0 - \frac{\alpha\gamma}{2R}y^2 - n(z^2 - y^2)$$

$$w = w_0 - my^2 - nz^2 \text{ mit } m + n = \frac{\alpha\gamma}{2R} \quad \ldots\ldots (15)$$

Diese Lösung, von welcher Gl. (12) ein Specialfall (entsprechend $n = 0$) ist, genügt der Grenzbedingung (14); denn wenn diese gemäss der Symmetrie des Querschnitts jetzt nur auf die Hälfte des benetzten Querprofils (auf einer Seite der y-Axe) bezogen und somit auch $\frac{1}{2}F$ statt F gesetzt wird, so wird sie mit

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -2my \text{ und } \frac{\partial w}{\partial z} = -2nz$$

$$-2m\int y\,dz - 2n\int z\,dy + \frac{\alpha\gamma F}{2R} = 0, \text{ d. h. } m + n = \frac{\alpha\gamma}{2R}.$$

weil, unter y und z die Coordinaten des benetzten Querprofils verstanden,

$\int y\,dz = \int z\,dy = \frac{1}{2} F$ ist.

Vermittels des Ausdrucks (15) von w ergiebt sich die mittlere Geschwindigkeit u, deren möglichst einfache Bestimmung vorzugsweise technisch wichtig ist:

$$u = \frac{1}{F}\iint w\,dy\,dz = \frac{1}{F}\iint (w_0 - my^2 - nz^2)\,dy\,dz$$

bei gegebener symmetrischer Querschnittsform als Function der Geschwindigkeit w_0 und der Constanten m, n, welche indessen durch Messung von noch zwei anderen Geschwindigkeiten bestimmt werden können. Sind insbesondere dieselben in der Mitte und an den Enden des benetzten Querprofils beziehungsweise $= w_1$ und w_2, und wird die Wassertiefe in der Mitte mit a, die Wasserbreite mit $2b$ bezeichnet, so hat man:

$$\left.\begin{array}{ll} w_1 = w_0 - ma^2; & m = \dfrac{w_0 - w_1}{a^2} \\ w_2 = w_0 - nb^2; & n = \dfrac{w_0 - w_2}{b^2} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (16).$$

Ist nun z. B. der Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten a und $2b$, so ergiebt sich:

$$u = \frac{1}{2ab}\int_{-b}^{b} dz \int_{0}^{a} (w_0 - my^2 - nz^2)\,dy$$

$$= w_0 - \frac{1}{3}\,ma^2 - \frac{1}{3}\,nb^2 = \frac{w_0 + w_1 + w_2}{3} \ldots\ldots (17).$$

Diese mittlere Geschwindigkeit findet statt in allen Punkten der halben Ellipse, deren Gleichung

$$my^2 + nz^2 = \frac{1}{3}\,ma^2 + \frac{1}{3}\,nb^2$$

ist, von welcher zwei Punkte auch ohne Kenntniss der Constanten m, n oder irgend einer besonderen Geschwindigkeit sich angeben lassen, nämlich die Punkte:

$$y = a\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}58a; \quad z = \pm b\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0{,}58b.$$

In einer dieser Stellen brauchte also nur die Geschwindigkeit gemessen

zu werden, um in derselben zugleich die mittlere Geschwindigkeit u zu haben, wenn das Aenderungsgesetz von w der Gleichung (15) in der That ganz entsprechend wäre.

Ist der Querschnitt ein Parabelsegment (grösste Tiefe oder Pfeilhöhe $= a$, Breite oder begrenzende Sehne $= 2b$), so findet man

$$u = \frac{1}{\frac{4}{3}ab}\int_{-b}^{b} dz \int_{0}^{a\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)} (w_0 - my^2 - nz^2)\, dy$$

$$= w_0 - \frac{8}{35} ma^2 - \frac{1}{5} nb^2 = \frac{20\, w_0 + 8\, w_1 + 7\, w_2}{35} \quad \ldots (18).$$

und diese mittlere Geschwindigkeit findet statt in allen Punkten der halben Ellipse, deren Gleichung

$$my^2 + nz^2 = \frac{8}{35} ma^2 + \frac{1}{5} nb^2$$

ist, insbesondere in den beiden Punkten:

$$y = a\sqrt{\frac{8}{35}} = 0{,}48a; \quad z = \pm\, b\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\, 0{,}45b.$$

Wenn, wie gewöhnlich, der Querschnitt eines natürlichen oder künstlichen Canals zwischen einem Rechteck und einem Parabelsegment von gleichen Dimensionen a, b enthalten, wenn er z. B. ein Trapez von der Höhe a ist, dessen untere horizontale Seite $< 2b$, so wird die Geschwindigkeit in den Punkten $y = \frac{1}{2}\, a$, $z = \pm\, \frac{1}{2}\, b$ voraussichtlich nur wenig von der mittleren Geschwindigkeit u verschieden sein. —

Im Anschlusse an die unter einer gewissen Voraussetzung gefundene Gl. (15) kann übrigens für einen Querschnitt von beliebiger Form die Geschwindigkeit w in irgend einem Punkte einer Senkrechten (in der Tiefe y unter der freien Wasseroberfläche)

$$w = w_0 - my^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

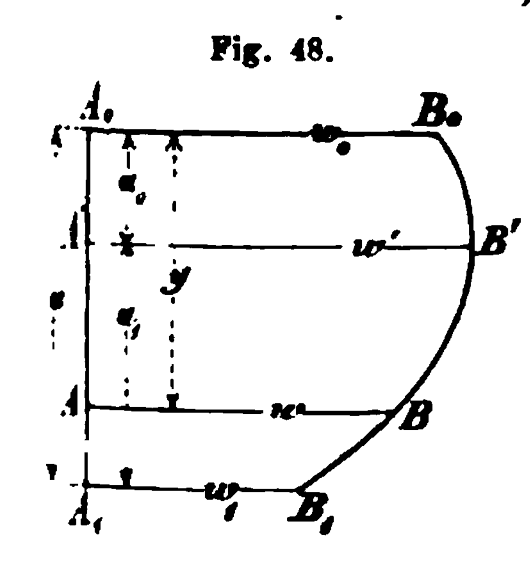
gesetzt werden, unter w_0 jetzt die Oberflächengeschwindigkeit an der Stelle dieser Senkrechten verstanden, während m eine Constante bedeutet, welche für verschiedene Senkrechte verschiedene Werthe haben und durch Messung von noch je einer zweiten Geschwindigkeit ausser w_0 bestimmt werden kann. Gemäss dieser Gl. (19) ist die im vorigen §. so genannte Geschwindigkeitscurve eine Parabel, deren Axe in dem betreffenden Längen-

profil des Wassers liegt. Ist also w_1 die Geschwindigkeit im tiefsten Punkte der Senkrechten, so ist die mittlere Geschwindigkeit in derselben:

$$v = w_1 + \frac{2}{3}(w_0 - w_1) = \frac{2}{3} w_0 + \frac{1}{3} w_1 \; \ldots\ldots \; (20),$$

und mit Hülfe der so für hinlänglich viele Senkrechte bestimmten Werthe von v findet man schliesslich das Wasserquantum Q und die mittlere Geschwindigkeit u des ganzen Querschnitts auf die im vorigen §. angegebene Weise. —

Einem etwaigen verzögernden oder beschleunigenden Einflusse an der freien Oberfläche des Wassers kann schliesslich dadurch Rechnung getragen werden, dass die Axe der Geschwindigkeitsparabel in einen gewissen Abstand $y = a_0$ vom Längenprofil des Wassers verlegt wird (Fig. 48), welcher bei überwiegend beschleunigendem Einflusse (durch einen starken stromabwärts wehenden Wind) auch negativ sein könnte. Dadurch wird


Fig. 48.

$$w = w' - m(y - a_0)^2 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (21),$$

unter w' das Maximum von w (für $y = a_0$) verstanden; zur Bestimmung der Constanten w', m, a_0 wären jetzt drei Geschwindigkeitsmessungen an verschiedenen Stellen der Senkrechten nöthig. Ist dann a_1 die Entfernung der Parabelaxe vom Längenprofil des Canals und a die Wassertiefe an der betreffenden Stelle, so ist

$$w_0 = w' - m a_0^2 \quad \text{und} \quad w_1 = w' - m a_1^2$$

beziehungsweise die Oberflächen- und Bodengeschwindigkeit, ferner nach Gl. (20)

$$\frac{2}{3} w' + \frac{1}{3} w_0 \quad \text{und} \quad \frac{2}{3} w' + \frac{1}{3} w_1$$

beziehungsweise die mittlere Geschwindigkeit in der oberen und unteren Strecke $A'A_0 = a_0$ resp. $A'A_1 = a_1$ (Fig. 48) der Senkrechten, und schliesslich

$$v = \frac{a_0}{a}\left(\frac{2}{3} w' + \frac{1}{3} w_0\right) + \frac{a_1}{a}\left(\frac{2}{3} w' + \frac{1}{3} w_1\right)$$

$$= \frac{2}{3} w' + \frac{1}{3}\frac{a_0}{a} w_0 + \frac{1}{3}\frac{a_1}{a} w_1 \; \ldots\ldots\ldots \; (22)$$

die mittlere Geschwindigkeit in der ganzen Senkrechten. Die Substitution der obigen Ausdrücke von w_0 und w_1 in Gl. (22) ergiebt mit $a_1 = a - a_0$

$$v = w' - m\left(\frac{1}{3}a^2 - aa_0 + a_0^2\right) \ldots\ldots\ldots (23).$$

Daraus ist mit Rücksicht auf Gl. (21) zu entnehmen, dass diese mittlere Geschwindigkeit v in der Tiefe

$$y = a_0 \pm \sqrt{\frac{1}{3}a^2 - aa_0 + a_0^2} \ldots\ldots\ldots (24)$$

stattfindet, sofern sich dieses y positiv und $< a$ ergiebt, was mit dem einen oder andern oder mit beiden Vorzeichen der Wurzelgrösse der Fall sein kann. Die Elimination von w' zwischen den Gleichungen (21) und (23) liefert endlich noch v in der folgenden Form:

$$v = w - m\left[\frac{1}{3}a^2 - a_0(a - 2y) - y^2\right],$$

welche besonders einfach und von a_0 unabhängig wird für $y = \frac{1}{2}a$, nämlich

$$v = w_2 - \frac{1}{12}ma^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25),$$

unter w_2 die Geschwindigkeit im Mittelpunkt der Senkrechten verstanden.

§. 125. Empirische Gesetze.

Die Entwickelungen im vorigen §. beruhen auf der Voraussetzung, dass die materiellen Punkte des Wassers in einfach gesetzmässiger Weise sehr schwach gekrümmte Bahnen durchlaufen, welche bei gleichförmiger permanenter Bewegung in parallele Gerade übergehen. In der That ist es aber unausbleiblich, dass die längs der Canalwand hin fliessenden Wassertheilchen durch die in verschiedenen Graden stets vorhandenen Hervorragungen dieser Wand vielfach seitlich abgelenkt werden, dass also Strömungen entstehen, die von der Canalwand nach oben und nach der Mitte hin gerichtet sind, und welche dann nothwendig wieder andere, entgegengesetzt gerichtete Strömungen zur Folge haben. Indem diese Mischungsbewegungen mit der Hauptströmung des Wassers im Canal interferiren, kann dadurch das Gesetz der Geschwindigkeitsänderung von Punkt zu Punkt eines Querschnitts so wesentlich modificirt werden, dass es mit Zuverlässigkeit nur auf empirischem Wege durch vielfache Beobachtung bestimmbar ist. Auch können jene seitlichen Strömungen durch geringfügige Umstände, die sich

der Beobachtung entziehen, so beeinflusst werden, dass sie selbst bei anscheinend permanenter Bewegung an derselben Stelle vielfach veränderlich sind, weshalb dann unter der Geschwindigkeit in einem gewissen Punkte diejenige Geschwindigkeit verstanden werden muss, welche daselbst unter den obwaltenden Umständen im Mittel im Sinne des Längenprofils des Canals oder des Wassers stattfindet.*

Bei den ersten Versuchen zur empirischen Feststellung der in Rede tehenden Beziehungen, herrührend von italiänischen Gelehrten und Ingenieuren besonders aus Veranlassung der Erscheinungen am Po, glaubte nan aus einer vermeintlichen Analogie mit den Gesetzen des Ausflusses us Gefässöffnungen auf eine Zunahme der Geschwindigkeit mit der Tiefe chliessen zu müssen, und blieb bei dieser irrthümlichen Meinung um so läner, als sie durch fehlerhafte Messungsmethoden bestätigt zu werden schien.** Mariotte wies zu Anfang des vorigen Jahrhunderts durch Beobachtngen nach, dass die Geschwindigkeit, wie es auch durch alle späteren eobachtungen bestätigt wurde, mit wachsender Tiefe abnimmt, ausser im alle eines Aufstau's durch plötzliche Verengung des Querschnitts.

Dubuat suchte besonders eine Beziehung zwischen der mittleren Gehwindigkeit u und der Maximalgeschwindigkeit w_0 an der freien Oberäche festzustellen, und folgerte aus 38 Beobachtungen an kleinen künstchen Canälen von 2 bis 10 Zoll Tiefe die Formel:

$$u = w_0 - \sqrt{w_0} + 0{,}5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

r den pariser Zoll als Längeneinheit. Prony*** fand dieselben Beobhtungen in besserer Uebereinstimmung mit der Formel:

$$\frac{u}{w_0} = \frac{w_0 + 2{,}372}{w_0 + 3{,}153} \text{ im Mittel } = 0{,}816 \quad \ldots\ldots (2),$$

obei das Meter als Längeneinheit vorausgesetzt ist. Bei jenen Dubuat'hen Beobachtungen war w_0 höchstens $= 1{,}3$ Mtr. pro Secunde; für ssere Geschwindigkeiten, wenigstens für $w_0 > 1{,}5$ Mtr. ist nach Baumrten**** besser zu setzen:

---

* Aus dem hier erwähnten Grunde verdienen zur Messung der Geschwinkeit solche Instrumente den Vorzug, welche dieselbe nicht sowohl für einen zelnen Augenblick, als vielmehr im Mittel für einen gewissen Zeitraum anben, wie z. B. Schwimmer und der Woltman'sche Flügel.

** Hagen, Handbuch der Wasserbaukunst, II. Theil (1844), S. 279 u. ff.

*** Recherches physico-mathématiques sur la théorie des eaux courantes, ris 1804.

**** Annales des Ponts et Chaussées, 1848.

$$\frac{u}{w_0} = 0{,}8 \frac{w_0 + 2{,}372}{w_0 + 3{,}153} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3.$$

Woltman* folgerte aus 11 Beobachtungsreihen von Brünings am Niederrhein und aus einer solchen von Ximenes am Arno, dass die Geschwindigkeitscurve für irgend eine Senkrechte als Bogen einer Parabel mit verticaler Axe betrachtet werden könne; derselbe wich indessen nur sehr wenig von einer geraden Linie ab.

Eytelwein**, von der Ansicht ausgehend, dass die Voraussetzung einer Abweichung der Geschwindigkeitscurve von der geraden Linie durch das vorhandene Beobachtungsmaterial nicht hinreichend motivirt sei, fand durch Vergleichung verschiedener Messungen für den preussischen Fuss als Längeneinheit:

$$w = (1 - 0{,}008\,y)\,w_0, \quad \text{insbesondere} \quad v = (1 - 0{,}004\,a)\,w_0 \ldots 4$$

unter a die Wassertiefe und unter w_0 die Oberflächengeschwindigkeit für die betreffende Senkrechte verstanden.

Weisbach setzte auf Grund der Beobachtungen von Ximenes, Brünings und Funk:

$$w = \left(1 - 0{,}17\,\frac{y}{a}\right) w_0; \quad v = 0{,}915\,w_0 \quad \ldots \ldots \quad 5.$$

während Lahmeyer*** zwar auch eine geradlinige Geschwindigkeitscurve annahm, jedoch den Coefficienten m der Gleichung

$$w = (1 - my)\,w_0,$$

den Eytelwein constant, Weisbach umgekehrt proportional der Wassertiefe a gesetzt hatte, als aus zwei Theilen bestehend betrachtete, von denen der eine constant, der andere umgekehrt proportional a ist. Er setzte nämlich für Metermaass:

$$w = \left[1 - \left(0{,}0469 + \frac{0{,}1383}{a}\right) y\right] w_0 \quad \ldots \ldots \quad 6.$$

Danach wäre mit $y = \frac{1}{2}\,a$:

$$v = (0{,}931 - 0{,}0235\,a)\,w_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7.$$

Für diese mittlere Geschwindigkeit v der Lothrechten empfahl indessen Lahmeyer ausserdem die empirische Formel:

---

* Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels. Hamburg. 1790.

** Handbuch der Mechanik und Hydraulik. Berlin, 1801.

*** Förster's Bauzeitung. 1852, S. 158.

$$v = (0{,}937 - 0{,}0252\, w_0)\, w_0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

und für die mittlere Geschwindigkeit u des ganzen Querschnitts im Mittel:

$$u = 0{,}75\, w_0 \ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

unter w_0 im letzteren Falle das Maximum der Oberflächengeschwindigkeit des Wassers verstanden.

Eine parabolische Geschwindigkeitscurve mit horizontaler Parabelaxe (übereinstimmend mit den Resultaten der theoretischen Untersuchung im vorigen §.) wurde, wie es scheint, zuerst von Defontaine* aus seinen Geschwindigkeitsmessungen im Rhein abgeleitet. Besonders aber folgerten Humphreys und Abbot dieses Aenderungsgesetz der Geschwindigkeit aus den unter ihrer Leitung ausgeführten, sehr ausgedehnten Messungen am Mississippi**, und zwar fanden sie den Parameter m der entsprechenden Gleichung (21) des vorigen §. direct der Quadratwurzel aus der mittleren Geschwindigkeit u und indirect dem Quadrat der betreffenden Wassertiefe a proportional, setzten nämlich (siehe Fig. 48 im vorigen §):

$$w = w' - \sqrt{ku}\left(\frac{y - a_0}{a}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Dabei soll der Coefficient k für die verschiedenen Senkrechten desselben Querschnitts gleich gesetzt, für verschiedene Flüsse oder für verschiedene Wasserstände und verschiedene Querschnitte desselben (im Beharrungszustande befindlichen) Flusses aber näherungsweise bestimmt werden können durch die folgende (auf Metermaass reducirte) Formel:

$$k = \frac{0{,}2844}{\sqrt{r} + 0{,}457} \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

unter $r = \frac{F}{p}$ den sogen. mittleren Radius (§. 123) verstanden. Nach dieser Formel, für welche übrigens nur ein geringerer Grad von Zuverlässigkeit

---

* Bresse, Cours de mécanique appliquée, II. partie, p. 187.

** Ueber diese Beobachtungen und Messungen, welche sich auch auf andere demnächst zu besprechende Probleme der Hydraulik bezogen und mit einigen Unterbrechungen den Zeitraum von 1850 bis 1860 umfassten, berichtet das im Jahre 1861 erschienene Werk: „Report upon the Physics and Hydraulics of the Mississippi-River etc.“, deutsch bearbeitet von H. Grebenau, 1867. Hauptzweck der im Auftrage des Congresses der Vereinigten Staaten von Nordamerika ausgeführten Untersuchung war die Gewinnung der nöthigen Grundlagen für Wasserbauten zur Regulirung jenes Flusses mit Rücksicht auf die Schifffahrt, besonders aber zum Schutze der an 20000 englische Quadratmeilen umfassenden Niederungen gegen die Verwüstungen durch das Hochwasser.

in Anspruch genommen wird im Vergleich mit dem in der Gleichung 1·
enthaltenen Gesetz an sich, wäre z. B.

$k =$	0,338	0,291	0,236	0,181	0,135	0,098	0,070	
für $r =$	0,25	0,5	1	2	4	8	16	Mtr.

Auffallend sind die Angaben Humphreys' und Abbot's in Betreff der Höhenlage der Axe der Geschwindigkeitsparabel. Während frühere Messungen das Maximum der Geschwindigkeit zwar auch in der Regel als etwas (bis zu etwa 0,5 Mtr.) unter der Oberfläche stattfindend erkennen liessen, folgerten sie aus den Beobachtungen am Mississippi eine im Durchschnitt viel tiefere, von der Richtung und Stärke des Windes abhängige Lage derselben gemäss der empirischen Formel:

$$\frac{a_0}{a} = 0{,}317 + 0{,}06\,f \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; ::$$

unter f die stromaufwärts gerichtete Componente der Windstärke verstanden, dieselbe mit einer solchen Einheit gemessen, dass $f = 10$ einem stromaufwärts wehenden Orkan, ein negatives f aber einem stromabwärts wehenden Winde von entsprechender Stärke entspricht. Eine grosse Genauigkeit ist freilich dieser empirischen Formel nicht zuzuschreiben, weil die Windstärke $f = 1$ nicht näher definirt wird (in Metern pro Sec.), auch die zu Grunde liegenden Beobachtungen nur Windstärken bis zu etwa $f = 4$ umfassen. Dass überhaupt ein stromaufwärts wehender Wind die Curvenaxe hinabdrückt, ein abwärts wehender sie hebt, ist begreiflich; dass aber $\frac{a_0}{a}$ selbst für $f = 0$ einen so bedeutenden Werth haben soll, ist im Widerspruch mit der Gesammtheit früherer Beobachtungen und daher einer weiteren Aufklärung bedürftig. Die Reibung zwischen Luft und Wasser erklärt die vermeintliche Thatsache bei weitem nicht allein; denn dann müsste $a_0 = 0$ sein für einen stromabwärts gerichteten Wind, dessen Geschwindigkeit der Oberflächengeschwindigkeit w_0 des Wassers gleich ist, entsprechend etwa $f = -1$ nach obiger Scala, während nach Gl. 12 in diesem Falle $a_0 = 0{,}257\,a$ wäre. Die hauptsächlichste Ursache könnte vielmehr nur in den zu Anfang dieses §. erwähnten seitlichen Strömungen gesucht werden, wenigstens wenn man fände, dass unter übrigens gleichen Umständen a_0 mit der Unebenheit und Rauhigkeit des Flussbettes resp. der Canalwand zunimmt.

Humphreys und Abbot verwenden nun ihre Gleichung (10) besonders zum Zweck einer möglichst einfachen Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit in einem ganzen Querschnitte. Ebenso nämlich wie im vorigen §. aus Gl. (21) die Gl. (25) abgeleitet wurde, folgt hier aus Gl. 10 :

$$v = w_2 - \frac{1}{12} \sqrt{ku} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

und ist also, sofern k nach Gl. (11) nur von den Dimensionen des Querschnitts abhängt, die Geschwindigkeit w_2 in der Mitte einer Senkrechten dadurch ausgezeichnet, dass sie von der a priori unbekannten Stelle des Maximums w' der Geschwindigkeit unabhängig, insbesondere von der schwankenden Stärke und Richtung des Windes nur insoweit abhängig ist, als dadurch die mittleren Geschwindigkeiten u und v in einem gewissen, übrigens ohne Zweifel nur sehr geringfügigen Grade bedingt werden können, wenn Fälle sehr heftigen Windes bei den Beobachtungen ausgeschlossen werden. Theilt man nun den Querschnitt F durch Senkrechte in Abtheilungen $= \Delta F$ und bestimmt die Geschwindigkeiten w_2 in den Mittelpunkten der mittleren Senkrechten dieser Abtheilungen (entweder durch unmittelbare Messung oder durch Interpolation vermittels der in den Mittelpunkten anderer Senkrechten gemessenen Geschwindigkeiten), so ergiebt sich aus Gl. (13), wenn die mittleren Geschwindigkeiten in den Abtheilungen ΔF denjenigen $= v$ ihrer mittleren Senkrechten gleich gesetzt werden,

$$Q = Fu = \Sigma (v \,.\, \Delta F) = \Sigma (w_2 \,.\, \Delta F) - \frac{1}{12} \sqrt{ku} \,.\, F$$

$$u + \frac{1}{12}\sqrt{ku} = u' \quad \text{mit} \quad u' = \frac{\Sigma (w_2 \,.\, \Delta F)}{F} \ldots\ldots (14),$$

welches u' als ein etwas zu grosser Näherungswerth von u zu betrachten ist, endlich

$$\left.\begin{aligned} u &= \left(\sqrt{u' + \frac{k}{576}} - \sqrt{\frac{k}{576}}\right)^2 = (\sqrt{u' + k'} - \sqrt{k'})^2 \\ \text{mit} \quad k' &= \frac{k}{576} = \frac{0{,}000494}{\sqrt{r} + 0{,}457} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} (15)$$

gemäss dem Ausdrucke (11) von k.

Um die Ermittelung von u noch weiter zu vereinfachen, nämlich die Ausmessung der einzelnen Abtheilungen ΔF des Querschnitts und die Berechnung von u' nach Gl. (14) zu ersparen, empfehlen Humphreys und Abbot das folgende Verfahren. Ist

(v) das arithmetische Mittel aller Werthe von v,

(w_2) „ „ „ „ „ „ w_2

für gleichförmig (in gleichen Abständen) im Querschnitt vertheilte Senkrechte, so ist nach Gl. (13) auch

$$(v) = (w_2) - \frac{1}{12}\sqrt{ku}$$

und dabei $u = \frac{1}{F}\int v dF$ um so mehr $>$ (v), je mehr die Tiefe von beiden Seiten gegen eine gewisse mittlere Stelle (die sogenannte **Stromrinne** bei natürlichen Wasserläufen) hin zunimmt. Setzt man allgemein

$$u = m\,(v),$$

unter m eine erfahrungsmässige Verhältnisszahl verstanden, die bei gleichförmiger Wassertiefe $= 1$ wäre, dagegen z. B. für den Mississippi im Durchschnitt $= 1{,}08$ gefunden wurde, so kann die obige Gleichung geschrieben werden in der Form:

$$u + \frac{1}{12}\sqrt{m^2 ku} = m(w_2).$$

Daraus folgt, analog wie oben Gl. (15) aus Gl. (14) gefolgert wurde,

$$u = \left(\sqrt{m(w_2) + m^2 k'} - \sqrt{m^2 k'}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \; 1\cdot$$

Weil übrigens der Werth der Verhältnisszahl m offenbar mit der Querschnittsform veränderlich und a priori in irgend einem gegebenen Falle unbekannt ist, so wird der Zweck ohne Zweifel besser dadurch erreicht werden, dass der Querschnitt durch Senkrechte in eine gewisse Zahl $= n$ solcher Theile $= \Delta F$ getheilt wird, welche wenigstens ungefähr gleich gross sind, was auch bei unregelmässig gestalteten Querprofilen natürlicher Wasserläufe ohne wirkliche Ausrechnung in genügender Weise nach Schätzung geschehen kann. Wenn dann aus den in den Mittelpunkten gewisser Senkrechten thatsächlich gemessenen Geschwindigkeiten* diejenigen $= w_2$ für die Mittelpunkte der mittleren (nach Schätzung durch ihre Schwerpunkte gezogenen) Senkrechten jener n Flächentheile ΔF durch Interpolation abgeleitet werden, falls sie nicht etwa unmittelbar gemessen werden konnten, so kann das arithmetische Mittel dieser n Geschwindigkeiten w_2 in Gl. (15) für u' gesetzt werden; denn nach Gl. (14) ist im vorliegenden Falle:

$$u' = \frac{\Delta F}{F}\,\Sigma w_2 = \frac{1}{n}\,\Sigma w_2.$$

---

* Die Methoden solcher Geschwindigkeitsmessungen (u. A. auch das von Humphreys und Abbot hierbei angewendete Verfahren) werden in dem von den mechanischen Instrumenten handelnden Abschnitte des zweiten Bandes dieses Werkes besprochen werden.

Noch ist zu bemerken, dass auch das Aenderungsgesetz der Oberflächengeschwindigkeit w_0 längs einem Querprofil des Wassers von Humphreys und Abbot in genügender Uebereinstimmung mit Gl. (15) im vorigen §., nämlich für den Abstand z von der Stelle des Maximums w_0' derselben (vom sogenannten Stromstrich) ausdrückbar gefunden wurde durch die Gleichung:

$$w_0 = w_0' - nz^2,$$

und zwar fanden sie n direct der Quadratwurzel aus der mittleren Geschwindigkeit u und indirect dem Quadrat der Wasserbreite b proportional, somit

$$w_0 = w_0' - \sqrt{k_1 u}\left(\frac{z}{b}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (17),$$

analog der obigen Gleichung (10) für die Geschwindigkeitsänderung nach der Tiefe. Uebrigens war das Beobachtungsmaterial, aus welchem diese Gl. (17) gefolgert wurde, weniger umfassend, als das der Gl. (10) zu Grunde liegende, so dass auch für den Coefficienten k_1, der ebenso wie der entsprechende k in Gl. (10) für verschiedene Flüsse sowie für verschiedene Wasserstände und Querschnitte desselben Flusses verschieden sein mag, ein einigermaassen zuverlässiger Ausdruck z. Z. nicht angegeben werden kann. Selbstverständlich kann Gl. (17) nur in solchen Fällen als einigermaassen zutreffend erwartet werden, in denen der Querschnitt eine ziemlich regelmässige Form hat, insbesondere das benetzte Querprofil an keiner Stelle erheblich convex nach oben ist, einer Sandbank oder sonstigen Untiefe inmitten des Stroms entsprechend. —

Die Geschwindigkeitsmessungen im Mississippi und die daraus gezogenen Folgerungen sind von G. Hagen* einer Kritik unterworfen worden, wobei darauf aufmerksam gemacht wird, dass von den 6 verschiedenen Gruppen jener 39 Beobachtungsreihen die der Zeitfolge nach späteren viel regelmässigere Geschwindigkeitscurven ergeben (vermuthlich in Folge der von den Beobachtern nach und nach erlangten Uebung), dass aber die von Humphreys und Abbot behauptete Geschwindigkeitszunahme mit der Entfernung von der Oberfläche bis zu einer gewissen erheblichen Tiefe gerade bei jenen letzten und wahrscheinlich zuverlässigeren Beobachtungsreihen viel weniger und seltener sich ausgesprochen findet, als bei

* Ueber die Bewegung des Wassers in Strömen. Aus den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868.

den ersten, ebenso wie auch bei den 117 Beobachtungsreihen, welche in den Jahren 1790 bis 1792 von Brünings selbst oder unter seiner Leitung am Niederrhein, an der Waal, am Leck und an der Yssel zu dem fraglichen Zweck angestellt wurden (wobei die Wassertiefen freilich nur höchstens etwa $^1/_5$ so gross waren wie im Mississippi), jene Zunahme der Geschwindigkeit mit der Entfernung von der Oberfläche nur in geringerem Grade und bis zu geringerer Tiefe ($a_0 < 0{,}1\, a$) beobachtet wurde. Aus diesen Messungen von Brünings schliesst ferner Hagen auf eine solche Geschwindigkeitscurve, welche nach unten gegen den Boden hin nicht nur an Neigung gegen die Lothrechte, sondern auch an Krümmung (an Schnelligkeit der Neigungszunahme gegen die Lothrechte) beständig zunimmt, und indem er demgemäss

$$\frac{dw}{d(a-y)} = \frac{m}{(a-y)^n}$$

setzt, versucht er die Annahmen $n = 2$, $n = 1$ und $n = \frac{1}{2}$. Die letzte ergiebt sich sowohl aus allgemeinen Gründen als die angemessenste, wie sie auch den regelmässigeren Beobachtungsreihen am Mississippi und den auf die grösseren Wassertiefen bezüglichen Messungen von Brünings mehr entsprechend gefunden wurde, als die erste Annahme, und wenigstens ebenso gut wie die zweite. Somit empfiehlt Hagen zu setzen:

$$\frac{dw}{d(a-y)} = \frac{m}{2\sqrt{a-y}}; \quad w = w_1 + m\sqrt{a-y} \; \ldots\ldots \; (18)$$

Die Geschwindigkeitscurve wäre danach eine Parabel mit verticaler Axe, deren Scheitel am Boden (im Längenprofil des Canals) liegt; sind dann in irgend einem gegebenen Falle durch zwei Geschwindigkeitsmessungen in einer Senkrechten die Constanten w_1 und m für dieselbe mit Rücksicht auf Gl. (18) bestimmt worden, so ergiebt sich daraus auch die Oberflächengeschwindigkeit w_0 mit $y = 0$ und endlich die mittlere Geschwindigkeit

$$v = w_1 + \frac{2}{3}(w_0 - w_1) = \frac{2}{3}w_0 + \frac{1}{3}w_1 = w_1 + \frac{2}{3}m\sqrt{a} \quad (19)$$

Uebrigens würde die Ersetzung der aus rationellen Erwägungen hervorgegangenen und durch Erfahrungen unterstützten Gl. (21) im vorigen §., welche einer parabolischen Geschwindigkeitscurve mit horizontaler Axe entspricht, durch eine andere Gleichung dieser Curve von lediglich empirischem Charakter doch wohl nur dann gerechtfertigt sein, wenn letztere mit der Gesammtheit aller zuverlässigen Messungen entschieden besser ...

Einklang zu bringen wäre, als jene. Dies ist von Hagen nicht nachgewiesen worden, weshalb die Gleichung

$$w = w' - m(y - a_0)^2$$

einstweilen vorzuziehen ist. Die Bestimmungen von a_0 und m durch Humphreys und Abbot bedürfen freilich der Bestätigung und sind besonders auf solche Fälle nicht ohne Weiteres übertragbar, die von den aussergewöhnlichen Verhältnissen des Mississippi erheblich verschieden sind. Im Allgemeinen muss vielmehr die Bestimmung von a_0, m und w' für jeden gegebenen Fall, und zwar für jede einzelne Senkrechte eines Querschnitts besonders vorbehalten werden, wozu die Messung dreier Geschwindigkeiten in verschiedenen Punkten derselben nöthig ist. Sind etwa w_1, w_2, w_3 die in den Tiefen y_1, y_2, y_3 gemessenen Geschwindigkeiten, so findet man leicht:

$$a_0 = \frac{1}{2} \frac{(w_1 - w_2)(y_1^2 - y_3^2) - (w_1 - w_3)(y_1^2 - y_2^2)}{(w_1 - w_2)(y_1 - y_3) - (w_1 - w_3)(y_1 - y_2)} \quad . . (20),$$

$$m = \frac{w_1 - w_2}{(y_2 - a_0)^2 - (y_1 - a_0)^2}; \quad w' = w_1 + m(y_1 - a_0)^2 \ . (21)$$

und damit dann die mittlere Geschwindigkeit v nach Gl. (23) im vorigen §. Die Benutzung von Gl. (20) wird erspart und die Messung von zwei Geschwindigkeiten ausreichend, wenn man in weniger wichtigen Fällen für a_0 einen ungefähren Werth nach erfahrungsmässiger Schätzung annimmt.

b. Gleichförmige permanente Bewegung des Wassers in Canälen.

§. 126. Beziehung zwischen der mittleren Geschwindigkeit, dem relativen Gefälle und den Dimensionen eines Querschnitts.

Der gleichförmige Beharrungszustand des in einem Canal strömenden Wassers ist an die Bedingung beständigen Gleichgewichtes zwischen bewegender Kraft und Widerstand für jede beliebig kleine Canalstrecke gebunden oder, was dasselbe ist, an die Bedingung gleicher Arbeiten von bewegender Kraft und Widerstand. Die bewegende Kraft besteht (abgesehen von etwaigem Einflusse des Windes) nur in der Schwere, und ihre Arbeit ist pro 1 Kgr. Wasser für die Längeneinheit (1 Mtr.) des Canals = dem relativen Gefälle α; ist also die Arbeit des Bewegungswiderstandes pro 1 Kgr. Wasser, die sogen. Widerstandshöhe pro 1 Mtr. Canallänge = B_1, so ist die Bedingung der gleichförmigen permanenten Bewegung:

$$B_1 = \alpha \ . . . . (1).$$

Legt man nun die von der relativen Bewegung der Wassertheilchen gegen einander abstrahirende Vorstellung zu Grunde, dass der Widerstand nur in der äusseren Reibung zwischen Canalwand und Wasser besteht, und bezeichnet dieselbe pro 1 Quadratm. Wandfläche mit R', so ist auf Grund der in §. 123 erklärten Buchstabenbezeichnungen ihre Arbeit pro 1 Mtr. Canallänge und pro Secunde $= R'pu$, oder pro 1 Mtr. Länge und pro 1 Kgr. Wasser:

$$B_1 = \frac{R'pu}{\gamma F u} = \frac{R'}{\gamma}\frac{p}{F} = \frac{R'}{\gamma}\frac{1}{r},$$

analog Gl. (2) in §. 89 für die Leitungswiderstandshöhe einer Röhre, wenn darin $\frac{1}{r}$ statt $\frac{4}{d}$ gesetzt wird; somit ist die Bedingung der gleichförmigen permanenten Bewegung auch:

$$\frac{R'}{\gamma} = ra \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2.$$

Nach Hagen* waren Brahms (1753) und demnächst Chézy (1775) die ersten, welche auf Grund solcher Vorstellungen ein ziemlich zutreffendes Abhängigkeitsgesetz für die mittlere Geschwindigkeit u des in einem Canal gleichförmig fliessenden Wassers aufstellten; indem sie die Reibung R' proportional u^2 setzten, folgte für u die Formel:

$$u = k\sqrt{ra} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3,$$

unter k eine Constante verstanden, deren mehr zuverlässige Bestimmung freilich erst später mit Hülfe zahlreicherer Messungen möglich wurde. Solche wurden besonders von Dubuat (1779) theils an einem kleinen aus Holz construirten Canal, theils am Canal du Jard und am Haine-Fluss ausgeführt. Auf Grund derselben gab Dubuat selbst eine sehr complicirte Formel für die mittlere Geschwindigkeit, doch zeigte Woltman ihren nicht weniger befriedigenden Anschluss an die einfache Gleichung 3. Dieselbe Ansicht theilte Eytelwein (1801), indem er zugleich aus den 36 Dubuat'schen Beobachtungen für preussisches (rheinländisches) Fussmaass $k = 90{,}9$ bestimmte, ein Werth, mit welchem demnächst die Gl. 3 zu sehr vielseitiger Anerkennung und Anwendung gelangte. Für Metermaass wäre entsprechend $k = 50{,}9$ und mit

$$\frac{R'}{\gamma} = au^2 \text{ die Constante } a = \frac{1}{k^2} = 0{,}000386,$$

* Handbuch der Wasserbaukunst, II. Theil (1844), S. 294.

wofür nach dem Vorgange Tadini's auch vielfach in runder Zahl

$$k = 50; \quad a = 0{,}0004$$

angenommen wurde.

Prony betrachtete den Widerstand als aus zwei Theilen bestehend, von denen der eine der zweiten, der andere der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional zu setzen sei, legte nämlich ebenso wie seiner Röhrenwiderstandsformel auch hier den Ausdruck:

$$\frac{R'}{\gamma} = au^2 + bu \quad (\S. 89, \text{ Gl. } 5)$$

zu Grunde, und fand aus den Beobachtungen Dubuat's in Verbindung mit einer Messung von Chézy am Entwässerungsgraben von Courpalet:

$$\frac{R'}{\gamma} = 0{,}000309\, u^2 + 0{,}000044\, u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Etwas später* bestimmte Eytelwein aus den Messungen von Dubuat in Verbindung mit solchen von Brünings, Woltman und Funk:

$$\frac{R'}{\gamma} = 0{,}000366\, u^2 + 0{,}000024\, u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

nur wenig abweichend von der Formel, welche noch später Lahmeyer (1845) zugleich mit Rücksicht auf eine grössere Zahl eigener Beobachtungen aufstellte:

$$\frac{R'}{\gamma} = 0{,}000378\, u^2 + 0{,}000022\, u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Dass übrigens die Eytelwein'sche Formel (5) zugleich mit seiner früheren Annahme

$$\frac{R'}{\gamma} = 0{,}000386\, u^2$$

so auffallend übereinstimmt, trotzdem dass letztere im Wesentlichen nur aus den Messungen Dubuat's an seinem sehr kleinen Versuchscanal abgeleitet war, erklärte Hagen** in überzeugender Weise durch einen verhängnissvollen Irrthum, darin bestehend, dass bei den Beobachtungen von Brünings und Funk die Gefälle nicht wirklich gemessen, sondern von Letzterem auf Grund der früheren Eytelwein'schen Formel in der Haupt-

* Abhandlungen der Königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin, 1813 und 1814.

** Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1837, §. 37.

sache angenommen worden waren. Auch gegen die von Eytelwein benutzten Woltman'schen Angaben wurden später gegründete Bedenken erhoben,* so dass sich die Beglaubigung der seitherigen Formeln im Wesentlichen auf die unzureichenden Messungen Dubuat's reducirt fand.

Dem unter solchen Umständen sehr fühlbaren Bedürfnisse neuer und in grösserem Maassstabe angestellter zuverlässiger Beobachtungen wurde erst vor mässig langer Zeit entsprochen theils durch die nach einer Richtung hin schon im vorigen §. besprochenen Messungen, die in den Jahren 1850—1860 unter Leitung von Humphreys und Abbot am Mississippi ausgeführt wurden, theils durch umfangreiche Untersuchungen, welche im Auftrage der französischen Regierung von 1856—1864 anfangs H. Darcy und später nach dessen Tode H. Bazin leitete. Je umfangreicher das dadurch gewonnene neue Versuchsmaterial ist, desto schwieriger ist es freilich zu übersehen und rationell zu verwerthen, so dass in Betreff der daraus abzuleitenden Gesetze und Formeln einstweilen die Ansichten der Fachmänner noch ziemlich auseinander gehen.

Was zunächst die amerikanischen Messungen betrifft, so haben zwar Humphreys und Abbot der von ihnen aufgestellten Formel eine Art von rationeller Ableitung zu geben versucht, wobei sie besonders von der Annahme ausgingen, dass zwischen Luft und Wasser (an der freien Oberfläche) ein Reibungswiderstand von ähnlicher Art und Grösse anzunehmen sei wie zwischen Wasser und Flussbett; weil aber auch abgesehen hiervon erhebliche Bedenken gegen jene Ableitung sich geltend machen lassen, wie der Verf. an einem anderen Orte** gezeigt hat, so dass dem Resultat der fraglichen Untersuchung doch nur ein rein empirischer Charakter beizulegen ist, so beschränkt sich das Interesse auf die resultirende Formel:

$$n\frac{F\sqrt{a}}{b+p} = \left(\frac{1}{m}u + \frac{1}{6}\sqrt{ku}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Darin haben F, b, p, a, u die in §. 123 festgesetzten Bedeutungen; k ist der durch die empirische Formel (11) im vorigen §. ausgedrückte Coefficient, m die gleichfalls im vorigen §. bei Gl. (16) daselbst erklärte Verhältnisszahl, welche etwas > 1 ist und für den Mississippi im Mittel $= 1{,}08$

* Förster's Bauzeitung, 1852, S. 151.

** Referat über Grebenau's deutsche Bearbeitung des Originalwerks von Humphreys und Abbot in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XIII (1869), S. 289, 353 und 481.

gefunden wurde, endlich n eine Constante, bestimmt zu 59,4 nach ausgeführter Reduction auf das Meter als hier durchweg zu Grunde gelegte Längeneinheit. Der Ausdruck von u als Function der übrigen Grössen erfordert nach Gl. (7) die Auflösung einer quadratischen Gleichung; wie der Verf. a. a. O. zeigte, ist es aber mit Rücksicht auf die untergeordnete Bedeutung des Gliedes mit $\sqrt{ku}$ vorzuziehen, aus jener Gleichung zu folgern:

$$u = \frac{m\sqrt{n}}{1 + \frac{m}{6}\sqrt{\frac{k}{u}}} \sqrt{\frac{F\sqrt{\alpha}}{b+p}} = C\sqrt{\frac{F\sqrt{\alpha}}{b+p}} \quad \ldots\ldots (8)$$

und die Werthe des Coefficienten

$$C = \frac{m\sqrt{n}}{1 + \frac{m}{6}\sqrt{\frac{k}{u}}} \quad \text{mit } k = \frac{0{,}2844}{\sqrt{r} + 0{,}457} \quad \ldots\ldots (9)$$

für verschiedene Werthe von r und u tabellarisch auszurechnen. Man findet z. B. mit $m = 1{,}08$ und $n = 59{,}4$ u. A. die in folgender Tabelle enthaltenen Werthe von C.

$r =$	0,25	0,5	1	2	4	8	16
$u = 0{,}5$	7,25	7,31	7,40	7,50	7,61	7,70	7,80
$u = 1$	7,53	7,59	7,65	7,73	7,80	7,88	7,94
$u = 1{,}5$	7,66	7,71	7,76	7,83	7,90	7,95	8,01
$u = 2$	7,75	7,79	7,84	7,90	7,95	8,00	8,05
$u = 2{,}5$	7,80	7,84	7,89	7,94	7,99	8,04	8,08

Sie sind, wie man sieht, so wenig verschieden, dass es stets genügen wird, den mit einem angenommenen Näherungswerth C_1 des fraglichen Coefficienten berechneten Näherungswerth u_1 der mittleren Geschwindigkeit höchstens ein mal zu corrigiren, indem man

$$u = \frac{C}{C_1} u_1$$

setzt, unter C den jetzt für r und u_1 der Tabelle zu entnehmenden Werth des Coefficienten verstanden.

Um Gl. (8) dem Einflusse der ungenügend begründeten Voraussetzung eines an der freien Oberfläche ebenso wie am Flussbette wirksamen Widerstandes zu entziehen, welche Annahme zur Folge hatte, dass der ganze Umfang $= b + p$ des Querschnitts anstatt des benetzten Querprofils p

allein als wesentliches Element in der Gleichung vorkommt, kann man mit Rücksicht darauf, dass nach den Messungen am Mississippi im Durchschnitt

$$p = 1{,}015\ b$$

war, statt Gl. (8) auch setzen:

$$u = \frac{C}{\sqrt{\frac{b}{p} + 1}} \sqrt{\frac{F}{p}\sqrt{a}} = c\sqrt{r\sqrt{a}} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

$$\text{mit } c = \frac{C}{\sqrt{\frac{1}{1{,}015} + 1}} = 0{,}71\ C \quad \ldots\ldots\ldots (11).$$

Von der bisher üblichen Gl. (3) unterscheidet sich dann Gl. (10) immer noch wesentlich dadurch, dass ihrzufolge u nicht $\sqrt{a}$, sondern $\sqrt[4]{a}$ proportional wäre. —

Die Beobachtungen von Bazin (von Darcy hatten bis zu seinem Tode nur die ersten Einrichtungen und Anordnungen getroffen werden können) wurden theils an vielen bestehenden künstlichen Canälen von verschiedenen Formen und Beschaffenheiten angestellt, theils und besonders an einem bei Dijon eigens zu diesem Zwecke angelegten Versuchscanal von 596 Mtr. Länge, 2 Mtr. Breite und 1 Mtr. Tiefe, welcher sein Wasser aus dem Canal de Bourgogne erhielt und in den Fluss l'Ouche abfliessen liess, und welcher zudem nach und nach mit veränderten Querschnittsformen und mit Wandverkleidungen aus verschiedenen Materialien von thunlichster Glätte bis zu sehr rauher Oberfläche und mit verschiedenen relativen Gefällen (von 0,001 bis 0,009) zum Zweck neuer Beobachtungsreihen hergestellt wurde.* Analog der Darcy'schen Formel für den Leitungswiderstand von Röhren (§. 89, Gl. 12) fand Bazin auch hier den Widerstand ausdrückbar durch die entsprechende Formel:

$$\frac{R'}{\gamma} = \left(a + \frac{b}{r}\right)u^2 \quad \text{mit} \quad r = \frac{F}{p},$$

also nach Gl. (2) die mittlere Geschwindigkeit:

---

* Sämmtliche Messungsresultate und daraus gezogene Folgerungen sind, nachdem sie von der französischen Akademie der Wissenschaften geprüft und günstig beurtheilt worden waren, im Jahre 1865 publicirt worden in dem Werke: „Recherches hydrauliques, entreprises par Mr. H. Darcy, Inspecteur général des ponts et chaussées, continuées par Mr. H. Bazin."

$$u = \sqrt{\frac{r\alpha}{a + \frac{b}{r}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12),$$

dabei aber die Coefficienten a und b ebenso hier wie dort in hohem Grade abhängig von der Beschaffenheit der Canalwand. Er unterschied in dieser Hinsicht 4 Kategorieen und bestimmte für dieselben a und b im Mittel wie folgt.

1) Canäle in sorgfältig gehobeltem Holz oder in Cement:

$$a = 0{,}00015 \quad b = 0{,}0000045$$

2) Canäle in behauenen Quadersteinen, in Backsteinen oder ungehobeltem Holz:

$$a = 0{,}00019 \quad b = 0{,}0000133$$

3) Canäle in Mauerwerk von Bruchsteinen:

$$a = 0{,}00024 \quad b = 0{,}00006$$

4) Canäle in Erde:

$$a = 0{,}00028 \quad b = 0{,}00035$$

Was die Vergleichung der amerikanischen und der französischen Messungsresultate betrifft, so ist, wenn man von der einfachen Gleichung

$$u = k\sqrt{r\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ausgeht, beziehungsweise nach jenen und diesen:

$$k = \frac{c}{\sqrt[4]{\alpha}} \quad \text{(Gl. 10) resp.} \quad k = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{b}{r}}} \quad \text{(Gl. 12).}$$

Wenn nun auch der Umstand, dass bei den Untersuchungen am Mississippi ein Einfluss der Beschaffenheit des Bettes auf den Coefficienten $c = 0{,}71\ C$, also auf k nicht wahrgenommen wurde, durch die allzu geringen Verschiedenheiten erklärlich ist, welche in dieser Hinsicht an den verschiedenen Beobachtungsstellen dort stattfanden, und wenn zwar auch nach Gl. (10) der Coefficient k (wie die obige Tabelle der Werthe von C erkennen lässt) zugleich mit r und zwar in demselben Sinne sich etwas ändert, so ist doch diese Aenderung weit geringer, als nach den Erfahrungen von Bazin; besonders aber besteht ein Gegensatz zwischen den beiderlei Erfahrungen insofern, als nach den Messungen am Mississippi sich k und das Gefälle α in umgekehrtem Sinne ändern, während Bazin eine gleichzeitige Zu- und Abnahme von k und α beobachtete, wenn auch nicht in so bedeutendem

Grade, dass er sich zur Berücksichtigung dieser Beziehung in seiner Formel veranlasst gesehen hätte. Mit Rücksicht auf die grosse Verschiedenheit der Umstände, unter denen die amerikanischen und die französischen Messungen ausgeführt wurden, braucht indessen jener Gegensatz der aus ihnen gezogenen Folgerungen nicht einem Widerspruch gleich geachtet zu werden; vielmehr mag die Formel von Humphreys und Abbot für grosse Gewässer mit mässigen Gefällen ebenso zutreffend sein wie die Bazin'sche Formel für kleine Gewässer mit grösseren Gefällen, so dass diese zweierlei Beobachtungen sich gegenseitig ergänzen und zusammen berücksichtigt werden müssen, um für den Coefficienten k der Gleichung

$$u = k\sqrt{ra}$$

einen Ausdruck abzuleiten, der allen vorkommenden Fällen voraussichtlich genügend entspricht. Dieser Ausdruck müsste den Einfluss des Rauhigkeitsgrades der Canalwand (des Flussbettes), des benetzten Querprofils r (der Dimensionen des Querschnitts) und des Gefälles a enthalten, und zwar in der Weise, dass k mit dem Rauhigkeitsgrade in entgegengesetztem Sinne, mit r in gleichem Sinne, mit a aber wenigstens bei grösseren Gewässern in entgegengesetztem Sinne sich ändert, während bei kleinen Gewässern diese letztere Beziehung sich umzukehren scheint.

Der Aufgabe einer solchen Bestimmung des Coefficienten k haben die Ingenieure Ganguillet und Kutter in sehr gründlicher Weise sich unterzogen*. Indem sie dabei mit Recht die Berücksichtigung des Rauhigkeitsgrades durch einen einzigen Coefficienten n vorzogen, um so eine m[illegible] leichte und übersichtliche Interpolation für beliebige Abstufungen der Rauhigkeit zu ermöglichen, als es vermittels der Bazin'schen Formel bei in Ermangelung einer Beziehung zwischen den beiden variablen Coefficienten a und b geschehen konnte, fanden sie für Metermaass

$$u = k\sqrt{ra} \quad \text{mit} \quad k = \frac{\frac{1}{n} + 23 + \frac{0{,}00155}{a}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{a}\right)\frac{n}{\sqrt{r}}} \quad \ldots$$

---

* Versuch zur Aufstellung einer neuen allgemeinen Formel für die gleichförmige Bewegung des Wassers in Canälen und Flüssen, gestützt auf die Resultate der in Frankreich vorgenommenen umfangreichen und sorgfältigen Untersuchungen und der in Nordamerika ausgeführten grossartigen Strommessungen. Von E. Ganguillet und W. R. Kutter, Ingenieure in Bern. Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, 1869.

wonach in der That k und n stets in entgegengesetztem, k und r in gleichem Sinne sich ändern, während die Aenderungen von k und α in ntgegengesetztem oder gleichem Sinne stattfinden, jenachdem $r > 1$ Mtr. der < 1 Mtr. ist. In Betreff des Rauhigkeitsgrades werden 6 Hauptategorieen unterschieden mit den folgenden Mittelwerthen von n.

1) Canäle von sorgfältig gehobeltem Holz oder mit glatter Cementverkleidung: $n = 0{,}010$.

2) Canäle von gewöhnlichen Brettern: $n = 0{,}012$.

3) Canäle von behauenen Quadersteinen oder gut gefügten Backsteinen: $n = 0{,}013$.

4) Canäle von Bruchsteinen: $n = 0{,}017$.

5) Canäle in Erde, natürliche Bäche und Flüsse: $n = 0{,}025$.

6) Gewässer mit gröberen Geschieben oder mit Wasserpflanzen: $n = 0{,}030$.

Ganguillet und Kutter prüften schliesslich ihre Formel für u mit ülfe von 210 verschiedenen Messungsresultaten und fanden, dass dabei e Zahlen der Fälle, in denen beziehungsweise die Formel von Humreys und Abbot, die Bazin'sche Formel und ihre eigene (bei schickher Annahme von n gemäss obigen Anhaltspunkten) die mittlere Gehwindigkeit am wenigsten abweichend von der Beobachtung ergaben, sich e 9: 21: 70 verhielten, während die absoluten Werthe der Abweichungen Durchschnitt resp. 90, 13 und 4 Procent des beobachteten Werthes n u betrugen. Selbst die Beobachtungen am Mississippi werden durch (13) besser ausgedrückt, als durch die Formel von Humphreys und bbot.

Zur Erleichterung des Gebrauchs von Gl. (13) haben Ganguillet d Kutter die Werthe von

$$a = \frac{1}{n} + 23 + \frac{0{,}00155}{\alpha} \quad \text{und} \quad b = \left(23 + \frac{0{,}00155}{\alpha}\right)n,$$

mit dann

$$k = \frac{a}{1 + \frac{b}{\sqrt{r}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

funden wird, für verschiedene Gefälle und die den obigen 6 Hauptkaterieen entsprechenden Werthe von n in Tabellen zusammengestellt, welche r auszugsweise mitgetheilt werden mögen.

α	n = 0,010		n = 0,012		n = 0,013		n = 0,017	
	a	b	a	b	a	b	a	b
0,0001	138,5	0,385	121,8	0,462	115,4	0,500	97,3	0,654
0,0002	130,7	0,307	114,1	0,369	107,7	0,400	89,6	0,523
0,0003	128,2	0,282	111,5	0,338	105,1	0,366	87,0	0,479
0,0004	126,9	0,269	110,2	0,320	103,8	0,349	85,7	0,457
0,0005	126,1	0,261	109,4	0,313	103,0	0,339	84,9	0,444
0,0006	125,6	0,256	108,9	0,307	102,5	0,332	84,4	0,435
0,0007	125,2	0,252	108,5	0,302	102,1	0,328	84,0	0,42[illegible]
0,0008	124,9	0,249	108,3	0,299	101,8	0,324	83,8	0,424
0,0009	124,7	0,247	108,0	0,297	101,6	0,321	83,5	0,420
0,001	124,5	0,245	107,9	0,295	101,5	0,319	83,4	0,417
0,002	123,8	0,238	107,1	0,285	100,7	0,309	82,6	0,404
0,003	123,5	0,235	106,8	0,282	100,4	0,306	82,3	0,40[illegible]
0,004	123,4	0,234	106,7	0,281	100,3	0,304	82,2	0,39[illegible]
0,005	123,3	0,233	106,6	0,280	100,2	0,303	82,1	0,396
0,006	123,3	0,233	106,6	0,279	100,2	0,302	82,1	0,395
0,007	123,2	0,232	106,5	0,279	100,1	0,301	82,0	0,3[illegible]
0,008	123,2	0,232	106,5	0,278	100,1	0,301	82,0	0,394
0,009	123,2	0,232	106,5	0,278	100,1	0,301	82,0	0,394
0,01	123,1	0,231	106,5	0,278	100,1	0,301	82,0	0,39[illegible]
0,1	123,0	0,230	106,3	0,276	99,9	0,299	81,8	0,391

α	n = 0,025		n = 0,030		α	n = 0,025		n = 0,0[illegible]	
	a	b	a	b		a	b	a	b
0,00001	218,0	4,450	211,3	5,340	0,0004	66,9	0,672	60,2	0,8[illegible]
0,000015	166,3	3,157	159,7	3,790	0,0005	66,1	0,652	59,4	0,7[illegible]
0,00002	140,5	2,512	133,8	3,015	0,0006	65,6	0,640	58,9	0,76[illegible]
0,000025	125,0	2,125	118,3	2,550	0,0007	65,2	0,630	58,5	0,75[illegible]
0,00003	114,7	1,867	108,0	2,240	0,0008	64,9	0,623	58,3	0,74[illegible]
0,000035	107,3	1,682	100,6	2,019	0,0009	64,7	0,618	58,0	0,74[illegible]
0,00004	101,7	1,544	95,1	1,852	0,001	64,5	0,614	57,9	0,7[illegible]
0,00005	94,0	1,350	87,3	1,620	0,002	63,8	0,594	57,1	0,71[illegible]
0,00006	88,8	1,221	82,2	1,465	0,003	63,5	0,588	56,8	0,70[illegible]
0,00007	85,1	1,128	78,5	1,354	0,004	63,4	0,585	56,7	0,70[illegible]
0,00008	82,4	1,059	75,7	1,271	0,005	63,3	0,583	56,6	[illegible]
0,00009	80,2	1,005	73,6	1,206	0,006	63,3	0,581	56,6	[illegible]
0,0001	78,5	0,962	71,8	1,155	0,007	63,2	0,580	56,5	[illegible]
0,00015	73,3	0,833	66,7	1,000	0,008	63,2	0,580	56,5	[illegible]
0,0002	70,7	0,769	64,1	0,922	0,009	63,2	0,579	56,5	[illegible]
0,0003	68,2	0,704	61,5	0,845	0,01	63,1	0,579	56,5	0,6[illegible]

Zu einem wesentlich anderen, mehr an Gl. (10) sich anschliessenden, dessen die Abweichung derselben von der ursprünglichen Gl. (3) noch bertreffenden Resultat gelangte Hagen in der schon im vorigen §. besprochenen Abhandlung.* Auf Grund einer kritischen Sichtung des vorandenen Beobachtungsmaterials, wobei übrigens nur die Messungen an atürlichen Flüssen und an Canälen mit Erdwänden berücksichtigt erden (die bedeutenden Abweichungen der Messungen an Canälen mit nders gearteten Wänden, welche von Bazin dem Einflusse der Oberlchenbeschaffenheit zugeschrieben wurden, scheinen Hagen Veranlassung geben, diese Messungen für weniger zuverlässig zu halten), legte Hagen Ganzen 66 Beobachtungen zusammengehöriger Werthe der Grössen r, u seiner Untersuchung zu Grunde, nämlich:

A. 19 Beobachtungen von Humphreys und Abbot in amerikanischen Strömen und Canälen;

B. 16 Beobachtungen, angestellt unter Leitung von Brünings 1790—92 in den Niederlanden, wobei allerdings die Gefälle, welche bei jenen im Uebrigen sehr zuverlässig erscheinenden Beobachtungen nicht mit gemessen wurden, so in Rechnung gebracht worden sind, wie sie heutiges Tages in denselben Stromstrecken bei gleichen Wasserständen (nach Mittheilungen des Chefs des niederländischen Wasserbaues Hrn. Conrad) sich darstellen;

C. 11 Beobachtungen an der Seine in Paris, angestellt unter Leitung von Poirée;

D. 20 Beobachtungen an den Rigolen Chazilly und Grosbois, welche der Scheitelstrecke des Canals von Bourgogne das Wasser zuführen.

Ausgehend von der angenommenen Formel

$$u = b\sqrt{r}\,.\,\alpha^x$$

zte Hagen der Reihe nach $x = {}^1/_2, {}^1/_3, {}^1/_4, {}^1/_5, {}^1/_6, {}^1/_7, {}^1/_8$ und benmte jedesmal und für jede der 4 Beobachtungsgruppen A, B, C, D den hrscheinlichsten Werth des Coefficienten b, sowie die Summe der Quate der Differenzen zwischen den beobachteten und den mit jenem wahreinlichsten Werthe von b nach der Formel berechneten Werthen von u. se Fehlerquadratsummen ergaben sich am kleinsten

im Falle	A	B	C	D
für $x =$	$^1/_5$	$^1/_8$	$^1/_6$	$^1/_4$

---

* Ueber die Bewegung des Wassers in Strömen. Aus den Abhandlungen Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868.

Wenn hiernach der wahrscheinlichste Werth von $x = {}^1/_5$ bis ${}^1/_6$ zu sein schien, so mussten doch auch die betreffenden Werthe von b hinsichtlich ihrer mehr oder weniger guten Uebereinstimmung unter sich für die 4 Fälle A, B, C, D zugleich berücksichtigt werden. Diese Werthe von b (bei Voraussetzung des rheinländischen Fussmaasses hinsichtlich r und u) sind für $x = {}^1/_2$ bis ${}^1/_7$ ($x = {}^1/_8$ war nur im Falle B zugleich versuchsweise angenommen worden) in der folgenden Zusammenstellung enthalten.

x	A	B	C	D	$\Sigma\left(\frac{b-b'}{b'}\right)^2$
$^1/_2$	125,7	102,5	94,80	50,19	0,344
$^1/_3$	22,64	22,75	20,84	14,52	0,110
$^1/_4$	9,79	10,48	9,94	7,83	0,046
$^1/_5$	5,95	6,72	6,36	5,41	0,026
$^1/_6$	4,28	4,96	4,73	4,23	0,018
$^1/_7$	3,39	4,00	3,81	3,55	0,016

Die letzte Columne enthält die Summen der Quadrate der verhältnissmässigen Abweichungen der je 4 Werthe b von ihrem arithmetischen Mittel b'; dieselbe ist zwar für $x = {}^1/_7$ am kleinsten, jedoch für $x =$ [illegible] nur so wenig grösser, dass mit Rücksicht zugleich auf die vorhergehende Bestimmung des relativ wahrscheinlichsten Werthes von x nun schliesslich

$$u = b \cdot \sqrt{r} \cdot \sqrt[6]{a}$$

gesetzt werden konnte. Zur endgültigen Berechnung des Coefficienten [illegible] wurden dann alle 66 einzelnen Beobachtungen der 4 Gruppen als gleichwerthig zu Grunde gelegt, und zwar gemäss der Bedingung, dass die Summe der Quadrate der verhältnissmässigen Fehler ein Minimum sei. [illegible] ergab sich für rheinländisches Fussmaass $b = 4,329$ mit einem wahrscheinlichen Fehler $= 0,048$, entsprechend einem wahrscheinlichen Fehler der Geschwindigkeit $= 0,0896$ ihres wahren Werthes. Hiernach ist für Metermaass zu setzen:

$$u = 2,425 \sqrt{r}\, \sqrt[6]{a} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{[illegible]}$$

Um dieselben 66 Beobachtungen, welche dieser Formel zu Grunde liegen, auch mit der Formel von Ganguillet und Kutter zu vergleichen, d. h. den wahrscheinlichen Fehler zu bestimmen, mit welchem Gl. [illegible] bei entsprechender Wahl des Coefficienten n jenen 66 Beobachtungen angepasst werden kann, sei zur Abkürzung

$$a = 23 + \frac{0{,}00155}{\alpha}; \quad b = \frac{a}{\sqrt{r}}; \quad x = \frac{1}{n},$$

so ist nach Gl. (13)

$$u = x \frac{x+a}{x+b} \sqrt{r\alpha} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

Setzt man nun vorläufig $x = x_0$ nach Schätzung, so ist, unter $m = 66$ die Zahl der Beobachtungen verstanden,

$$x_1 = \frac{1}{m} \Sigma \left(\frac{x_0 + b}{x_0 + a} \frac{u}{\sqrt{r\alpha}} \right)$$

ein schon etwas corrigirter Werth von x, und wenn die demselben nach Gl. (16) entsprechenden Näherungswerthe von u mit u_1 bezeichnet werden, so ist, unter

$$x = x_1 + \xi$$

einen weiter corrigirten Werth von x verstanden, mit Rücksicht auf die Kleinheit von ξ zu setzen:

$$u = u_1 + \xi \frac{du_1}{dx_1} = u_1 + \xi v_1.$$

Der wahrscheinlichste Werth von ξ, verstanden analog der Hagen'schen Rechnung als derjenige, durch welchen die Summe der Quadrate der verhältnissmässigen Fehler möglichst klein, d. h.

$$\Sigma \left(\frac{u - u_1 - \xi v_1}{u} \right)^2 = min.$$

wird, ist nun bestimmt durch die Gleichung:

$$\Sigma \left(\frac{u - u_1 - \xi v_1}{u} \frac{v_1}{u} \right) = \Sigma \left(\frac{u - u_1}{u} \frac{v_1}{u} \right) - \xi \Sigma \left(\frac{v_1}{u} \right)^2 = 0$$

und liefert als (angenähert) wahrscheinlichsten Werth:

$$x = x_1 + \xi = x_1 + \frac{\Sigma \left(\frac{u - u_1}{u} \frac{v_1}{u} \right)}{\Sigma \left(\frac{v_1}{u} \right)^2}$$

$$\text{mit } v_1 = \frac{du_1}{dx_1} = \sqrt{r\alpha} \frac{d}{dx_1} \left(x_1 \frac{x_1 + a}{x_1 + b} \right)$$

$$= \left[1 + \frac{(a-b)b}{(x_1+b)^2} \right] \sqrt{r\alpha}.$$

Werden dann endlich die mit dem so bestimmten Werth von x nach Gl. (16) berechneten Werthe von u mit u' bezeichnet zum Unterschiede

von den Beobachtungswerthen u, so ist nach den Principien der Methode der kleinsten Quadrate der wahrscheinliche verhältnissmässige Fehler r, womit die beobachteten Werthe von $u = u'$ gesetzt, d. h. durch Gl. (16) ausgedrückt werden können:

$$r = 0{,}6745 \sqrt{\frac{\Sigma\left(\frac{u-u'}{u}\right)^2}{m-1}}.$$

Auf diese Weise und indem vorläufig (entsprechend $n = 0{,}025$) $x_0 = 40$ gesetzt wurde, ergab sich $x_1 = 39{,}22$, dann $\xi = -3{,}31$, also $x = 39{,}22 - 3{,}31 = 35{,}91$ (entsprechend $n = 0{,}0278$), $r = 0{,}123$. Wären die 66 verhältnissmässigen Fehler $= \frac{u-u'}{u}$ genau nach dem Gesetz der Wahrscheinlichkeit vertheilt gewesen, so hätten absolut genommen 33 derselben $< 0{,}123$ und ebenso viele $> 0{,}123$ sein müssen, während thatsächlich 38 derselben kleiner und nur 28 grösser als 0,123 sich ergaben in Folge des Umstandes, dass unter den 66 Beobachtungen sich etwa 6 befinden, deren Abweichungen von Gl. (16) vorzugsweise gross sind, so dass sie den resultirenden wahrscheinlichen Fehler r in überwiegendem Grade bedingen. Bei Ausschluss dieser vielleicht weniger zuverlässigen Beobachtungen, wozu eine genügende Rechtfertigung freilich nicht vorliegt, wäre r wesentlich kleiner gefunden worden.

Wenn nun auch zuzugeben ist, dass den fraglichen 66 Beobachtungen die Hagen'sche Gleichung (15) besser entspricht, als die Gleichung (16) von Ganguillet und Kutter bei angemessener Wahl von n, indem der wahrscheinliche Fehler für jene nur etwa $^3/_4$ so gross ist wie für diese, so muss doch berücksichtigt werden, dass diese letztere Formel eine ganz allgemeine Gültigkeit beansprucht, während Hagen seine Formel doch nur der oben unter 5) genannten Hauptkategorie (Canäle in Erde, natürliche Bäche und Flüsse) und zwar für Gefälle $< 0{,}001$ angepasst hat. Bei derselben Einschränkung wäre die Formel von Ganguillet und Kutter in der Form zu schreiben gewesen:

$$u = x \frac{x + y + \frac{z}{\alpha}}{x + \left(y + \frac{z}{\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{r}}} \sqrt{r\alpha} = f(x, y, z) \;\ldots\ldots\; (17)$$

unter $x_1 = 35{,}91$, $y_1 = 23$, $z_1 = 0{,}00155$ nur angenäherte Werthe von

$$x = x_1 + \xi,\quad y = y_1 + \eta,\quad z = z_1 + \zeta$$

verstanden, und wenn dann die wahrscheinlichsten Werthe der Correctionen ξ, η, ζ mit $u_1 = f(x_1, y_1, z_1)$ gemäss der Gleichung

$$u = u_1 + \xi \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \zeta \frac{\partial u_1}{\partial z_1}$$

auf Grund jener 66 Beobachtungen berechnet würden, so ist es kaum fraglich, dass dadurch ein noch besserer Anschluss derselben an Gl. (17), als an Gl. (15) erzielt würde. Diese zeitraubende Rechnung ist hier unterlassen worden, weil mit Rücksicht auf die mannigfach verschiedenen Wasserleitungen zum Betriebe hydraulischer Kraftmaschinen eine möglichst allgemeine, wenn auch im Einzelnen vielleicht weniger genau zutreffende Gültigkeit der Formel wichtig ist. Zu diesem Zwecke scheint einstweilen die Formel von Ganguillet und Kutter am meisten empfehlenswerth. —

Bei der Aehnlichkeit der Einflüsse, denen das in einer Röhre und das in einem Canal fliessende Wasser ausgesetzt ist, würde es am nächsten liegen, in Betreff der allgemeinen Form des in Rede stehenden Abhängigkeitsgesetzes von dem Ausdrucke der specifischen Leitungswiderstandshöhe B_1 auszugehen, welcher nach §. 90 sowohl empirisch wie auch theoretisch für die Bewegung in Röhren sich befriedigend bewährt hat, indem darin nur der mittlere Halbmesser r an die Stelle der Röhrenweite d, also nach §. 90, Gl. (1)

$$B_1 = a\frac{u^2}{r} + b\frac{u}{r^2}$$

gesetzt wird, unter a und b Coefficienten verstanden, von denen der erstere besonders mit dem Rauhigkeitsgrade der Canalwand wächst. Mit Rücksicht auf die den gleichförmigen Beharrungszustand charakterisirende Gl. (1): $B_1 = \alpha$ würde daraus folgen:

$$\alpha = \left(a + \frac{b}{ur}\right)\frac{u^2}{r}; \quad u = \sqrt{\frac{r\alpha}{a + \frac{b}{ur}}}$$

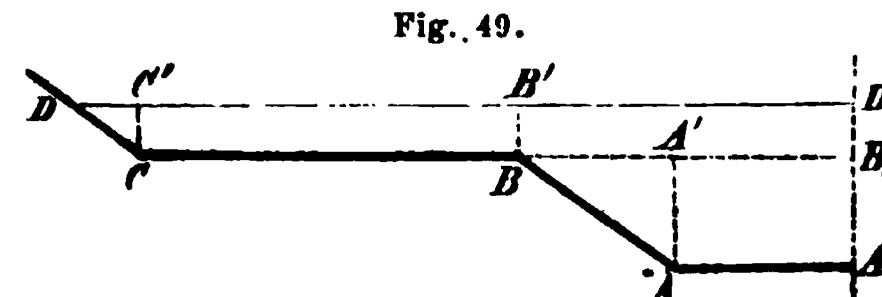
$$\text{oder} \quad u = k\sqrt{r\alpha} \quad \text{mit} \quad k = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{b}{ur}}}$$

entsprechend am meisten der Bazin'schen Formel (12) mit der Modification, dass dadurch zugleich die von Bazin beobachtete gleichzeitige Zu- und Abnahme von k und α, also auch von k und u zum Ausdruck gebracht wäre. Dass aber eine solche Beziehung von k und α bei grösseren Gewässern (nach Ganguillet und Kutter für $r > 1$ Mtr.) in umgekehrtem

Sinne stattfindet, würde in dieser Formel nicht ausgedrückt sein, es sei denn dass dem Coefficient b eine theoretisch kaum zu begründende entsprechende Abhängigkeit von r und α zugeschrieben wird. —

Bei der Benutzung aller hier mitgetheilter Formeln muss man übrigens stets berücksichtigen, dass sie aus solchen Beobachtungen abgeleitet sind, bei denen das Querprofil des Canals resp. Flussbettes eine möglichst einfache und regelmässige Form hatte der Art, dass von beiden Seiten aus gegen eine gewisse mittlere Stelle hin die Wassertiefe stetig zunimmt oder zuerst zunimmt und dann gleich bleibt, so dass einer stetigen Erhebung des Wasserquerprofils eine stetige Zunahme nicht nur des Querschnittes F, sondern auch des benetzten Querprofils p entspricht. Letzteres ist z. B. nicht der Fall, wenn das Querprofil des Canals eine gebrochene Linie mit verschiedenen horizontalen Strecken ist; Fig. 49 zeigt die Hälfte eines solchen in Beziehung auf die mittlere Senkrechte A_0D_0 symmetrisch vorausgesetzten Querprofils. Steigt dann das Wasser über die Horizontale BB_0, so dass es eben anfängt, die horizontalen Strecken BC des Canals auf beiden Seiten des mittleren und tieferen Theils zu überfluthen, so nimmt, während F nur allmählig zu wachsen fortfährt, p plötzlich um eine endliche Grösse zu, also r um eine endliche Grösse ab, und es würden alle obige Formeln den offenbar unrichtigen Schluss ergeben, dass auch die mittlere Geschwindigkeit u und die Wassermenge $Q = F$ beim Steigen des Wassers über BB_0 hinaus plötzlich abnehmen, wenn man nämlich nach wie vor die Formeln auf den ganzen Wasserquerschnitt bezöge. Letzteres ist deshalb in solchem Falle unzulässig, und muss vielmehr der Querschnitt in gesondert zu betrachtende Theile zerlegt werden durch Senkrechte an den Stellen, wo die Stetigkeitsunterbrechung des benetzten Querprofils stattfindet, bei Fig. 49 durch die Senkrechten BB', wenn DD_0 das Querprofil des Wassers ist. Setzt man dann im vorliegenden Specialfalle

Fig. 49.



$$A_0B_0 = AA' = a_1,\quad B_0D_0 = BB' = CC' = a_2,$$

$$A_0A = b_1,\quad BC = b_2,\quad \text{Winkel } BAA' = DCC' = \beta,$$

so ist $F_1 = 2.A_0ABB'D_0 = a_1(2b_1 + a_1 \, tg\,\beta) + 2a_2(b_1 + a_1 \, tg\,\beta)$

$$p_1 = 2(b_1 + a_1 \sec\beta)$$

$$F_2 = 2.BCDB' = a_2(2b_2 + a_2 \, tg\,\beta)$$

$$p_2 = 2(b_2 + a_2 \sec\beta)$$

und man findet:

$$r_1 = \frac{F_1}{p_1}, \text{ dazu } k = k_1 \text{ nach Gl. (14) und } u_1 = k_1 \sqrt{r_1 \alpha}$$

$$r_2 = \frac{F_2}{p_2}, \;\;„\;\; k = k_2 \;\;„\;\;„\;\;„\;\;„\;\; u_2 = k_2 \sqrt{r_2 \alpha},$$

endlich die Wassermenge $Q = F_1 u_1 + F_2 u_2$,
wogegen $Q = Fu$ wesentlich zu klein gefunden würde, wenn man dabei
$F = F_1 + F_2$, $p = p_1 + p_2$, $r = \frac{F}{p}$ und $u = k\sqrt{r\alpha}$ mit k entsprechend r nach Gl. (14) setzen wollte, und zwar um so mehr zu klein, je kleiner a_2 im Vergleich mit a_1 und je grösser b_2 im Vergleich mit b_1 ist, weil um so mehr dann diese letztere Berechnungsweise einen offenbar unmöglichen wesentlich verzögernden Einfluss des über den Seitentheilen BC des Canalbodens langsamer fliessenden auf das im mittleren Theile schneller fliessende Wasser voraussetzen würde. Z. B. mit

$$a_1 = 1{,}5, \quad a_2 = 0{,}3, \quad b_1 = 4, \quad b_2 = 10, \quad tg\,\beta = \frac{4}{3}, \quad sec\,\beta = \frac{5}{3}$$

$$\text{wäre } F_1 = 18{,}6, \quad p_1 = 13, \quad r_1 = 1{,}4308$$
$$F_2 = 6{,}12, \quad p_2 = 21, \quad r_2 = 0{,}2914$$

und dazu nach Gl. (13) und (14) mit $\alpha = 0{,}0005$ und dem Rauhigkeitsgrade $n = 0{,}025$:

$$k_1 = 42{,}78, \quad u_1 = 1{,}144; \quad k_2 = 29{,}94, \quad u_2 = 0{,}361$$
$$Q = F_1 u_1 + F_2 u_2 = 21{,}28 + 2{,}21 = 23{,}49,$$

wogegen mit

$$F = F_1 + F_2 = 24{,}72, \quad p = p_1 + p_2 = 34, \quad r = 0{,}7271$$
$$k = 37{,}46, \quad u = 0{,}714, \quad Q = Fu = 17{,}66$$

wesentlich zu klein gefunden würde. Wäre die Höhe a_2 noch kleiner, als 0,3 Mtr. angenommen worden, so hätte sich nach der letzteren Rechnungsweise die Wassermenge Q sogar kleiner ergeben können, als für $a_2 = 0$, d. h. kleiner als die Wassermenge = 14,82 Cubikm., welche durch den bordvollen mittleren Theil des Canals allein bei $\alpha = 0{,}0005$ pro Sec. fliessen würde. —

Während durch den hier besprochenen Umstand die Gültigkeit der aufgestellten Formeln beschränkt wird, ist jedoch andererseits ein constantes relatives Gefälle α zur Gültigkeit derselben nicht unbedingt nöthig. Sie beruhen nämlich wesentlich nur auf der Voraussetzung eines gleichförmigen Beharrungszustandes, charakterisirt durch die Gl. (1): $B_1 = \alpha$,

wobei F und u für alle Querschnitte der betreffenden Canalstrecke gleich sind. Letzteres ist nun freilich bei genau cylindrischer Form des Canals nur dann möglich, wenn auch p, folglich r und α für alle Querschnitte gleich sind; bei nicht cylindrischer Form kann dagegen F überall gleich sein auch ohne Gleichheit von p, also r und α, und ist dann zur Gleichförmigkeit der permanenten Bewegung, also zur Gültigkeit der Formeln (mit der obigen im Anschlusse an Fig. 49 besprochenen Einschränkung) nur eine gleichzeitige und solche Aenderung von p und α, also von r und α von einem zum anderen Querschnitte erforderlich, dass $f(r, \alpha)$ in allen denselben Werth hat, unter $f(r, \alpha)$ jene Function von r und α verstanden, welche gemäss der betreffenden Formel die mittlere Geschwindigkeit bei gleichförmigem Beharrungszustande liefert.

Wenn freilich die ganze im Canal fliessende Wassermasse nicht von cylindrischer Gestalt und somit die Verbindungslinie des Schwerpunktes S irgend eines Querschnittes F mit dem Schwerpunkte S_1 des in der unendlich kleinen Entfernung ds stromabwärts gelegenen Querschnittes F_1 gegen den Horizont unter einem Winkel σ geneigt ist, der von dem Abhang α der freien Wasseroberfläche an dieser Stelle verschieden sein kann, so ist die von der Schwere herrührende bewegende Kraft der zwischen F und F_1 enthaltenen Wassermasse $= \gamma F ds . \sigma$, also dieselbe pro 1 Kgr. Wasser und somit auch deren Arbeit für die Längeneinheit des Canals nicht $= \alpha$, sondern $= \sigma$, so dass es zweifelhaft erscheinen könnte, ob die Gleichförmigkeit des Beharrungszustandes nach wie vor durch die Gleichung: $B_1 = \alpha$ in der That charakterisirt ist. Allein in einem solchen Falle wären auch die Pressungen in den Querschnitten F und F_1 im Allgemeinen nicht einander gleich, und würde die bewegende Kraft der zwischen F und F_1 befindlichen Wassermasse nicht nur in der nach SS_1 gerichteten Componente ihrer Schwere, sondern ausserdem in dem Ueberschusse der Pressung in F über dieselbe in F_1 bestehen. Betrachtet man irgend ein prismatisches Element dieser Wassermasse, welches sich vom Flächenelement dF des Querschnitts F bis zum Querschnitte F_1 erstreckt längs dem Bogenelemente ds einer Bahn, die an dieser Stelle unter dem Winkel φ gegen den Horizont geneigt sein mag, so ist die nach der Bahn gerichtete bewegende Kraft dieses Wasserelementes, bestehend aus der betreffenden Componente der Schwere und dem Ueberschuss der Pressung auf die Hinterfläche dF über dieselbe auf die Vorderfläche dF, mit Rücksicht auf §. 124, Gl. (5)

$$= \gamma\, dF\, ds . \varphi + dF \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds\right)\right]$$

$$= dFds\left(\gamma\varphi - \frac{\partial p}{\partial s}\right) = \gamma\, dF\, ds\,.\,\alpha,$$

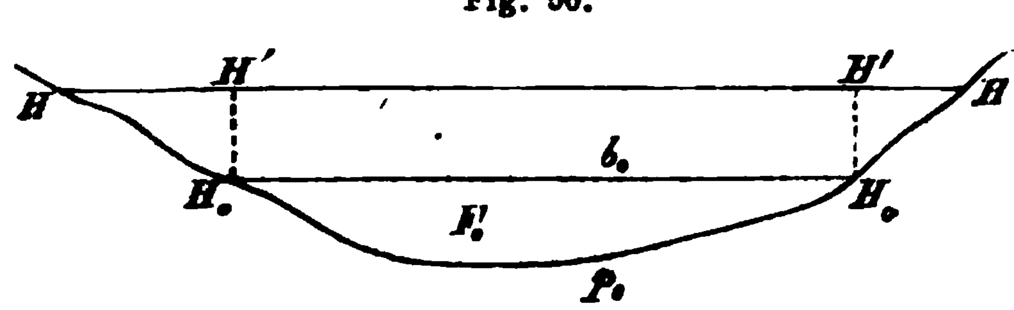
also doch wieder nur bedingt durch den Abhang der freien Wasseroberfläche, nämlich pro 1 Kgr. Wasser allgemein $= \alpha$.

Diese Bemerkung ist namentlich auch wichtig für die spätere Untersuchung einer ungleichförmigen permanenten Bewegung, da für diese die Gl. (5) in §. 124 und folglich auch die daraus gezogene Folgerung in gleicher Weise gültig ist.

§. 127. Verschiedene Aufgaben.

Wenn das Querprofil eines Canals gegeben ist, so sind durch die Höhenlage des Wasserquerprofils eines Querschnitts auch der Inhalt $= F$, das benetzte Querprofil $= p$ und der mittlere Radius $r = \frac{F}{p}$ desselben bestimmt. Nimmt man etwa eine gewisse Horizontale $H_0H_0 = b_0$ (Fig. 50) in demselben so an, dass jedes in Betracht kommende Querprofil

Fig. 50.



HH des Wassers höher liegt, und bezeichnet mit F_0 den Inhalt, mit p_0 das benetzte Querprofil des unter H_0H_0 liegenden Querschnitts, so kann in der Regel zur Berechnung des Inhalts $= F$ und des benetzten Querprofils $= p$ eines anderen Querschnitts, dessen Wasserquerprofil HH um $H_0H' = h$ höher liegt, als H_0H_0, das beiderseits hinzukommende Stück H_0H des benetzten Querprofils als gerade Linie und der Neigungswinkel HH_0H' derselben gegen die Lothrechte als unabhängig von h betrachtet werden, so dass, wenn dieser Winkel (im Mittel) auf der einen Seite $= \beta_1$, auf der anderen $= \beta_2$ ist,

$$\left.\begin{array}{l} F = F_0 + hb_0 + \frac{1}{2}h^2(tg\,\beta_1 + tg\,\beta_2) \\ p = p_0 + h(sec\beta_1 + sec\beta_2) \end{array}\right\} r = \frac{F}{p} \;..\; (1)$$

t. Indem somit F, p, r durch h bestimmt sind, können mit Rücksicht auf die Gleichung

$$Q = Fu \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

und die im vorigen §. besprochene Gleichung

$$u = f(r, \alpha) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3),$$

unter f ein Functionszeichen verstanden, 6 Aufgaben unterschieden werden, jenachdem nämlich verschiedene zwei der 4 Grössen

$$h \quad \alpha \quad u \quad Q$$

gegeben sind und die übrigen gesucht werden. Wenn gegeben sind:

1) h und α, so findet man u aus (3), dann Q aus (2),
2) h und u, so findet man Q aus (2), α aus (3),
3) h und Q, so findet man u aus (2), dann α aus (3),
4) α und u, so findet man h aus (3), dann Q aus (2),
5) α und Q, so ergiebt sich h aus der Gleichung:

$$Q = F\, f(r, \alpha),$$

dann u aus (2) oder (3),

6) u und Q, so findet man h aus (2), dann α aus (3).

Die meisten dieser Aufgaben erfordern eine indirecte Lösung durch successive Näherung, wenn nach Gl. (13) im vorigen §.

$$f(r, \alpha) = \frac{\frac{1}{n} + 23 + \frac{0{,}00155}{\alpha}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{\alpha}\right)\frac{n}{\sqrt{r}}} \sqrt{r\alpha}$$

gesetzt wird. — Anstatt an ein gegebenes Querprofil des Canals kann übrigens auch der Querschnitt an gewisse andere Bedingungen gebunden sein. Ist z. B. die Querschnittsform gegeben, so sind von einer gewissen Dimension a die Grössen F, p, r in der Weise abhängig, dass

$$F = ma^2, \quad p = na, \quad r = \frac{m}{n} a \ldots\ldots\ldots\ldots$$

gesetzt werden kann, unter m und n Verhältnisszahlen verstanden, die durch die gegebene Querschnittsform bestimmt sind. Die Aufgaben, welche den 6 verschiedenen Fällen entsprechen, dass zwei der 4 Grössen

$$a \quad \alpha \quad u \quad Q$$

gegeben sind, können analog den obigen behandelt werden bei Substitution von a für h und der Gleichungen (4) für die Gleichungen (1).

Beispiel. — Ein Entwässerungscanal, der eine veränderliche Wassermenge abzuführen hat, habe ein in Beziehung auf die mittlere Senkrechte symmetrisches Querprofil von solcher Form, wie es in Fig. 49 zur Hälfte dargestellt ist, und zwar sei (mit Benutzung der dort gebrauchten Bezeichnungen) zur Zeit der grössten Wassermenge

$$a_1 = a_2 = a,$$

$$b_1 = 2{,}25a, \quad b_2 = 6a, \quad tg\,\beta = 1{,}5, \quad \text{also} \quad sec\,\beta = 1{,}8028.^*$$

Dann ist $F_1 = F_2 = 13{,}5a^2$

$$p_1 = 8{,}1056a, \quad r_1 = \frac{13{,}5}{8{,}1056}\,a = 1{,}6655a$$

$$p_2 = 15{,}6056a, \quad r_2 = \frac{13{,}5}{15{,}6056}\,a = 0{,}8651a$$

und, wenn $\alpha = 0{,}0005187$ gegeben ist, nach der betreffenden Tabelle im vorigen §. entsprechend dem Rauhigkeitscoefficienten $n = 0{,}025$:

$$\frac{1}{n} + 23 + \frac{0{,}00155}{\alpha} = 66{,}1 - 0{,}187\,(66{,}1 - 65{,}6) = 66{,}0$$

$$\left(23 + \frac{0{,}00155}{\alpha}\right) n = 0{,}652 - 0{,}187\,(0{,}652 - 0{,}640) = 0{,}650$$

$$f(r, \alpha) = \frac{66}{1 + \frac{0{,}65}{\sqrt{r}}}\,\sqrt{0{,}0005187\,r} = \frac{1{,}50315\,r}{0{,}65 + \sqrt{r}}$$

$$f(r_1, \alpha) = \frac{1{,}940\,a}{0{,}5037 + \sqrt{a}}; \quad f(r_2, \alpha) = \frac{1{,}398\,a}{0{,}6988 + \sqrt{a}}$$

Ist nun die vom Canal abzuführende grösste Wassermenge $Q = 25$ Cubikm. pro Sec. gegeben, so hat man mit Rücksicht auf die hier nöthige Zerlegung des Querschnitts in die beiden Theile F_1 und F_2:

$$Q = F_1 . f(r_1, \alpha) + F_2 . f(r_2, \alpha)$$

$$25 = 13{,}5a^3 \left(\frac{1{,}940}{0{,}5037 + \sqrt{a}} + \frac{1{,}398}{0{,}6988 + \sqrt{a}}\right).$$

Daraus folgt

$$a = 0{,}952 \text{ Mtr.},$$

folglich

$$b_1 = 2{,}25a = 2{,}142 \text{ Mtr.}, \quad b_2 = 6a = 5{,}712 \text{ Mtr.}$$

und die Wasserbreite

$$b = 2\,(b_1 + b_2 + 3a) = 2b_1 + 3b_2 = 21{,}42 \text{ Mtr.}^{**}$$

---

* Diese Verhältnisse gehören einem Profil an, welches von Prony bei Gelegenheit seiner Arbeit über die Pontinischen Sümpfe mehrfach angewendet wurde. Description hydrographique et historique des marais pontins. Paris 1822, p. 54 etc. (Hydromechanik von Dr. M. Rühlmann, S. 307.)

** Rühlmann (Hydromechanik, S. 309) findet für dasselbe Beispiel, jedoch auf Grund der Prony'schen Gleichung (4) im vorigen §. und indem er den Querschnitt als Ganzes behandelt, $a = 0{,}871$ und $b = 19{,}60$ Mtr.

Wäre nur der mittlere Theil des Canals, übrigens ganz mit Wasser angefüllt, so wäre

$$F = a(2b_1 + 1{,}5a) = 6a^2 = 5{,}4378; \quad p = p_1 = 8{,}1056a$$

$$r = \frac{6a}{8{,}1056} = 0{,}7047; \quad f(r, \alpha) = \frac{1{,}50315r}{0{,}65 + \sqrt{r}} = 0{,}7112$$

$$Q = F.f(r, \alpha) = 3{,}867 \text{ Cubikm.}$$

Wenn die gewöhnlich abzuführende Wassermenge grösser wäre, so könnte man daraus Veranlassung nehmen, den mittleren Theil des Canals breiter oder tiefer, die beiden Seitentheile entsprechend schmaler oder flacher auszuführen.

§. 128. Vortheilhafteste Querschnittsformen.

Bei dem Entwurf eines künstlichen Canals ist zu verlangen, dass der Zweck desselben unter den gegebenen Umständen mit möglichst geringen Anlagekosten (wachsend vorzugsweise mit der Grösse des Querschnitts F erreicht werde, wozu in manchen Fällen (namentlich bei Canälen zur Zu- oder Abführung des Betriebswassers hydraulischer Kraftmaschinen, die weitere Forderung hinzutritt, dass die Bewegung des Wassers in dem Canal einen möglichst kleinen Theil des disponiblen Gefälles in Anspruch nehmen soll. Wenn das Wasserquantum Q gegeben, die Grösse des Querschnitts F aber nicht (mit Rücksicht auf die Schifffahrt oder auf sonstige Umstände) vorgezeichnet, seine Form durch gewisse Bedingungen höchstens beschränkt, aber nicht bestimmt ist, so werden jene beiden Forderungen durch die Wahl einer solchen Querschnittsform erfüllt, welche unter den gegebenen Umständen den kleinsten Widerstand zur Folge hat, für welche nämlich bei gegebenen Werthen von F und α die mittlere Geschwindigkeit u, folglich auch das Wasserquantum Q möglichst gross wäre, indem dann umgekehrt F und α bei gegebenem Q möglichst klein sind. Nach allen für im vorigen §. angeführten Formeln ist aber u bei gegebenem α um so grösser, je grösser r ist, und kommt somit die Aufgabe darauf hinaus, mit Rücksicht auf die sonst gegebenen Bedingungen die Form des Querschnitts so zu bestimmen, dass bei gegebener Grösse F desselben der mittlere Radius r möglichst gross, also das benetzte Querprofil p möglichst klein sei.

Wenn insbesondere das benetzte Querprofil eine aus einer gewissen Zahl gerader Strecken von gegebenen Richtungen bestehende gebrochene

Linie sein soll, so entspricht es der Aufgabe dann, wenn diese Seiten von gegebenen Richtungen einen Halbkreis berühren, dessen begrenzender Durchmesser im Wasserquerprofil liegt;* durch den Radius a des Halbkreises und die gegebenen Richtungswinkel lassen sich F und p so ausdrücken, dass die in den Gleichungen (4) des vorigen §. mit m und n bezeichneten Verhältnisszahlen nur von den Richtungswinkeln abhängen. Wäre nur die Seitenzahl gegeben, so würde die Hälfte eines regulären (also auch einem Halbkreise umschriebenen) Polygons der Aufgabe entsprechen, und zwar in um so höherem Grade, je grösser die Seitenzahl gegeben wäre, so dass sich schliesslich der Halbkreis selbst als diejenige Querschnittsform ergiebt, welcher bei gegebenem Inhalt das absolut kleinste benetzte Querprofil zukommt.

Gewöhnlich soll der Querschnitt ein Trapez, das benetzte Querprofil eine gebrochene Linie sein, bestehend aus einer horizontalen Grundlinie und zwei geraden Seitenlinien, die unter gegebenen Winkeln β_1 und β_2 gegen die Lothrechte geneigt sind. Ist dann

a die Höhe dieses Trapezes (die Wassertiefe),

b die obere Breite (Wasserbreite),

b_1 die untere Breite (Grundlinie oder Bodenbreite),

so ist $b = b_1 + a\,(tg\,\beta_1 + tg\,\beta_2)$

$$F = a\,\frac{b + b_1}{2} = a\left(b_1 + a\,\frac{tg\,\beta_1 + tg\,\beta_2}{2}\right)$$

$$p = b_1 + a\,(sec\,\beta_1 + sec\,\beta_2)$$

$$= \frac{F}{a} - a\,\frac{tg\,\beta_1 + tg\,\beta_2}{2} + a\,(sec\,\beta_1 + sec\,\beta_2)$$

und derjenige Werth von a, durch welchen p bei gegebenen Werthen von F, β_1 und β_2 am kleinsten wird, ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{dp}{da} = -\frac{F}{a^2} - \frac{tg\,\beta_1 + tg\,\beta_2}{2} + sec\,\beta_1 + sec\,\beta_2 = \frac{p}{a} - 2\,\frac{F}{a^2} = 0;$$

weil $\frac{d^2p}{da^2} = 2\,\frac{F}{a^3}$ positiv ist, entspricht ihm in der That ein Minimum.

* Indem der hier in Rede stehende Querschnitt als die Hälfte eines in Beziehung auf einen Durchmesser symmetrischen Querschnitts betrachtet werden kann, ist obige Behauptung in dem etwas allgemeineren geometrischen Satz enthalten, dass von allen Polygonen, deren Winkel in bestimmter Zahl und Reihenfolge gegeben sind, das einem Kreise umschriebene bei gegebenem Inhalt den kleinsten Umfang oder bei gegebenem Umfang den grössten Inhalt hat.

Für diese relativ vortheilhafteste Querschnittsform ist also:

$$\frac{F}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{p}{a} = \frac{2 - \sin\beta_1}{2\cos\beta_1} + \frac{2 - \sin\beta_2}{2\cos\beta_2}; \quad r = \frac{F}{p} = \frac{a}{2} \ldots (1.$$

$$\text{Aus } F = a\,\frac{b + b_1}{2} = \frac{ap}{2} \text{ folgt } p = b + b_1 \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

und daraus weiter

$$\frac{b}{a} = \frac{p - b_1}{a} = \sec\beta_1 + \sec\beta_2 \ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

$$\frac{b_1}{a} = \frac{1 - \sin\beta_1}{\cos\beta_1} + \frac{1 - \sin\beta_2}{\cos\beta_2} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_1}{2}\right) + tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta_2}{2}\right) \ldots 4$$

Dass das so bestimmte Trapez gemäss der oben angeführten allgemeinen Regel in der That einem Halbkreise umschrieben ist, dessen begrenzender Durchmesser im Wasserquerprofil liegt, erkennt man daran, dass der Radius des die Grundlinie und die zwei Seitenlinien des Querprofils berührenden Kreises $= a$ ist. Wird nämlich einstweilen dieser Radius mit a' bezeichnet, und mit F' die Summe der Inhalte der 3 Dreiecke, welche den Mittelpunkt des Kreises zur gemeinschaftlichen Spitze und die 3 geradlinigen Strecken des benetzten Querprofils zu Grundlinien haben, so ist

$$F' = \frac{pa'}{2}; \quad F' - F = \frac{p(a' - a)}{2}$$

und weil $F' - F$ als Inhalt eines Dreiecks mit der Grundlinie b und Höhe $= a' - a$ auch $= \frac{b(a' - a)}{2}$ ist, so folgt $a' = a$, weil b und p verschieden sind, nämlich $b_1 = p - b$ positiv ist.

Für den gewöhnlichen Fall eines symmetrischen Trapezes ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$) wird:

$$\frac{F}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{p}{a} = \frac{2 - \sin\beta}{\cos\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{b}{a} = 2\sec\beta; \quad \frac{b_1}{a} = 2\,\frac{1 - \sin\beta}{\cos\beta} = 2\,tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \ldots$$

Wäre β nicht gegeben, so wäre bei gegebenem Inhalt F

$$p = 2\,\frac{F}{a} = min., \text{ wenn } a = max., \text{ also } \frac{2 - \sin\beta}{\cos\beta} = min.$$

d. h. $\beta = 30^0$ oder wenn der trapezförmige Querschnitt die Hälfte eines regulären Sechsecks wäre, in Uebereinstimmung mit einem andern der oben angeführten allgemeinen Sätze.

Die Anlagekosten eines Canals können übrigens auch noch von anderen Umständen, als von der Grösse des Querschnitts, also der auszuhebenden Erdmasse abhängen, z. B. von der Kostbarkeit der für die Anlage zu verwendenden Bodenfläche, von der mit der Tiefe vielleicht variablen Beschaffenheit des Bodens, überhaupt von mancherlei Terrainverhältnissen. Auch können ausser den Anlagekosten und dem nöthigen Gefälle noch andere Umstände auf die Wahl der Dimensionsverhältnisse bestimmend einwirken, z. B. bei Zu- oder Ableitungscanälen hydraulischer Kraftmaschinen die Rücksicht auf Wasserverluste durch Einsickerung, wachsend mit der Wassertiefe und der Lockerheit des Bodens, oder die Rücksicht auf Störungen durch Eisbildung, wachsend umgekehrt mit abnehmender Tiefe. In vielen Fällen kann es daher vorgezogen werden, unter Verzichtleistung auf möglichste Verkleinerung des Bewegungswiderstandes von einem gewissen Werth des Verhältnisses

$$\frac{b_1}{a} = n$$

auszugehen, welches im Allgemeinen um so grösser anzunehmen ist, je grösser F, je lockerer der Boden und je weniger kostbar das zum Auswerfen des Canals disponible Terrain ist; meistens wird es grösser genommen, als der durch Gl. (4) resp. Gl. (6) bestimmte Werth. Für den symmetrischen trapezförmigen Querschnitt ist dann

$$\frac{F}{a^2} = n + tg\beta; \quad \frac{p}{a} = n + 2\sec\beta; \quad \frac{b}{a} = n + 2tg\beta \,.\,. \quad (7).$$

Hierher gehört auch eine Aufgabe von freilich mehr theoretischem, als praktischem Interesse, welche von Woltmann zuerst aufgestellt und gelöst worden zu sein scheint,* die Frage nämlich, welche Gestalt dem Querprofil eines Canals gegeben werden müsse, damit bei gegebenem Gefälle die mittlere Geschwindigkeit des gleichförmigen Beharrungszustandes für jeden vorkommenden Wasserstand gleich gross sei. Natürlich kommt dabei nur derjenige Theil des Canalquerprofils in Betracht, welcher oberhalb des Wasserquerprofils $H_0 H_0$ bei kleinstem Wasserstande liegt; und wenn bei letzterem die Wasserbreite mit $2b$, der mittlere Radius mit r bezeichnet wird, so ist die in der Aufgabe gestellte Forderung erfüllt, wenn auch für jeden höheren Wasserstand, für welchen der Querschnitt des Wassers $= F$, das benetzte Querprofil $= p$ sei, der mittlere Radius

* Hydromechanik von Dr. M. Rühlmann, S. 323.

$$\frac{F}{p} = r = Const., \quad \text{somit} \quad p\,dF - F\,dp = 0$$

$$dF = \frac{F}{p}\,dp = r\,dp$$

ist. Hieraus folgt, wenn der Mittelpunkt des dem kleinsten Wasserstande entsprechenden Wasserquerprofils $H_0H_0 = 2b$ zum Ursprunge eines recht-winkeligen Coordinatensystems der x, y im Querschnitte angenommen wird, und zwar die x-Axe senkrecht zu H_0H_0 und positiv nach oben, so das bei Voraussetzung eines oberhalb H_0H_0 bezüglich auf die x-Axe symmetrisch gestalteten Querprofils

$$dF = 2y\,dx \quad \text{und} \quad dp = 2\sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \text{ist,}$$

$$y^2 dx^2 = r^2(dx^2 + dy^2); \quad dx = \frac{r\,dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

$$x = r\,ln\left(y + \sqrt{y^2 - r^2}\right) + Const.$$

oder mit $Const. = -a - r\,ln\,r$, unter a eine andere Constante verstanden

$$a + x = r\,ln\,\frac{y + \sqrt{y^2 - r^2}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Wegen $y = b$ für $x = 0$ ist

$$a = r\,ln\,\frac{b + \sqrt{b^2 - r^2}}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Aus Gl. (8) folgt auch, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet,

$$e^{\frac{a+x}{r}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - r^2}}{r}; \quad e^{-\frac{a+x}{r}} = \frac{r}{y + \sqrt{y^2 - r^2}}$$

$$2y = r\left(e^{\frac{a+x}{r}} + e^{-\frac{a+x}{r}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

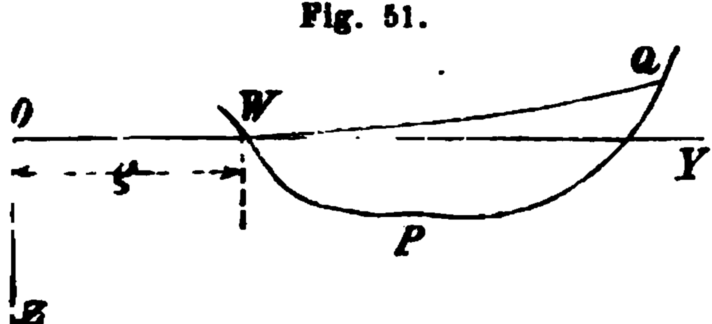
Diese Gleichung, dem auf der Seite der positiven y-Axe gelegenen Zweiges des gesuchten Canalquerprofils angehörig, ist die Gleichung einer Ketten-linie, deren horizontale Symmetrieaxe in der Tiefe a unter H_0H_0 und deren Scheitelpunkt in der Entfernung r von der x-Axe liegt.

§. 129. Einfluss von Krümmungen.

Um den Einfluss einer Canalkrümmung unter solchen Umständen zu untersuchen, dass dadurch die Möglichkeit eines ganz gleichförmigen Be-

arrungszustandes nicht ausgeschlossen wird, werde angenommen, die Canalrandfläche könne entstanden gedacht werden durch Bewegung einer ebenen Curve längs einer auf einem verticalen Cylinder (Radius $= \varrho$) liegenden Spirale von constantem und sehr kleinem Steigungswinkel φ_0 der Art, dass die Ebene jener Curve (die Querschnittsebene des Canals) von der spiralförmigen Leitlinie beständig rechtwinkelig geschnitten wird in einem Punkte F von fester Lage gegen die erzeugende Curve (das Querprofil des gekrümmten Canals). Beispielsweise sei W ein Punkt des Canalquerprofils WPQ (Fig. 51) selbst, und zwar der innere (auf der concaven Seite der Canalkrümmung gelegene) Endpunkt des Wasserquerprofils WQ, d. h. der Durchschnittslinie zwischen der Querschnittsebene und der freien Wasseroberfläche. Dieses Wasserquerprofil ist jetzt nicht eine horizontale Gerade, seine nähere Bestimmung bildet vielmehr einen Theil der vorliegenden Aufgabe.

Fig. 51.



Der Querschnitt werde auf ein rechtwinkeliges Axensystem OY, OZ in seiner Ebene bezogen, dessen Ursprung O in der Axe des verticalen Cylinders liegt; die y-Axe sei horizontal und positiv im Sinne gegen den Querschnitt, die z-Axe positiv nach unten. Der Krümmungsradius der Leitlinie des Punktes W, welcher streng genommen $= \varrho(1 + tg^2\varphi_0)$ ist, kann wegen Kleinheit des Winkels φ_0 mit demselben Rechte $= \varrho$ gesetzt werden, womit φ_0 als Gefälle in der Entfernung ϱ von der Cylinderaxe dem Sinus oder der Tangente dieses Winkels gleich zu setzen ist; ebenso kann der Krümmungsradius irgend einer anderen Bahn, die den Querschnitt im Punkte (y, z) trifft, $= y$ gesetzt werden, und ihr Neigungswinkel gegen den Horizont, insbesondere also auch das Gefälle, d. h. der Abhang der freien Wasseroberfläche in der Cylinderfläche mit dem Radius y:

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\varrho}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Die Ebene der erzeugenden Curve WPQ ist ein Querschnitt auch im Sinne von §. 72; die Krümmungs- und Normalcurven in demselben sind zwei Systeme sich rechtwinkelig schneidender Geraden, erstere parallel der y-Axe, letztere der z-Axe, also

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho''} = \frac{1}{r'} = \frac{1}{r''} = 0$$

und nach §. 72, Gl. (6)* mit $\varrho = -y$ (wobei das entgegengesetzte Vorzeichen dadurch bedingt ist, dass dort y wachsend vorausgesetzt wurde im Sinne von der Bahn gegen ihren Krümmungsmittelpunkt hin, hier im umgekehrten Sinne):

$$R_z = R\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{y}\frac{\partial w}{\partial y}\right); \quad R_y = R_z = 0.$$

Hiernach und wenn in den Gleichungen (3), §. 72 ausserdem

$$K_s = g\varphi = g\varphi_0 \frac{\varrho}{y}, \quad K_y = 0, \quad K_z = g,$$

ferner mit Rücksicht auf den vorausgesetzten gleichförmigen Beharrungszustand

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial s} = 0,$$

endlich $\mu = \frac{\gamma}{g}$ und wieder $\varrho = -y$ gesetzt wird, ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\gamma\varphi_0}{R}\frac{\varrho}{y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\gamma}{g}\frac{w^2}{y}; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Die Gleichungen (3) bestimmen das Aenderungsgesetz der Pressung im Querschnitte und dadurch auch die Gestalt des Wasserquerprofils WQ. Wenn man behufs einer ersten Annäherung für die Geschwindigkeit w ihren Mittelwerth u setzt, so folgt aus diesen Gleichungen einzeln:

$$p = \frac{\gamma u^2}{g} \ln y + f(z), \quad p = \gamma z + f_1(y),$$

also aus beiden zusammen:

$$p = C + \gamma z + \frac{\gamma u^2}{g} \ln y$$

und mit Rücksicht darauf, dass im Punkte W ($y = \varrho$, $z = 0$) die Pressung $= p_0 =$ dem Atmosphärendruck ist,

$$p = p_0 + \gamma z + \frac{\gamma u^2}{g} \ln \frac{y}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

---

* A. a. O. wurde diese Gleichung irrthümlicher Weise auf den Fall beschränkt, dass die ebenen Querschnitte alle derselben Geraden parallel sind: eine Voraussetzung, welche thatsächlich nur zur Folge hat, dass die geradlinigen Normalcurven für alle Querschnitte parallel sind.

Das Wasserquerprofil ist dadurch bestimmt, dass in allen seinen Punkten $p = p_0$ ist; seine Gleichung ist also:

$$z + \frac{u^2}{g} \ln \frac{y}{\varrho} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Ist die Wasserbreite $= b$, so ist insbesondere die Erhebung des Punktes Q über den Punkt W:

$$q = \frac{u^2}{g} \ln \left(1 + \frac{b}{\varrho}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

z. B. für $\frac{b}{\varrho} = 0{,}1 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4$

$q = 0{,}010 \quad 0{,}019 \quad 0{,}034$ Mtr. für $u = 1$ Mtr.

$q = 0{,}039 \quad 0{,}074 \quad 0{,}137$ Mtr. „ $u = 2$ Mtr.

Die Gleichung (2) bedingt das Aenderungsgesetz der Geschwindigkeit im Querschnitte. Ist z. B. letzterer von nahe gleichförmiger Tiefe und verhältnissmässig grosser Breite, so dass nach §. 124, Gl. (12) für einen geraden Canal bei dem relativen Gefälle φ

$$w = w_0 - \frac{\gamma\varphi}{2R} z^2$$

gesetzt werden könnte mit einer constanten Oberflächengeschwindigkeit w_0, so könnte für den gekrümmten Canal, wenn behufs einer ersten Annäherung hier ebenso von der Erhebung des Wasserquerprofils von W bis Q abstrahirt wird, wie so eben bei der angenäherten Bestimmung dieser Erhebung von den Geschwindigkeitsdifferenzen abgesehen wurde,

$$w = f - \frac{\gamma\varphi}{2R} z^2 = f - m \frac{\varrho}{y} z^2 \quad \text{mit} \quad m = \frac{\gamma\varphi_0}{2R}$$

gesetzt werden, unter f jetzt die Oberflächengeschwindigkeit verstanden, die als Function von y nach Gl. (2) zu bestimmen wäre. Zu dem Ende hat man

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{dy} + m \frac{\varrho}{y^2} z^2$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 f}{dy^2} - 2m \frac{\varrho}{y^3} z^2; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -2m \frac{\varrho}{y},$$

also nach Gl. (2) mit $\frac{\gamma\varphi_0}{R} = 2m$:

$$\frac{2}{y} \frac{df}{dy} + \frac{d^2 f}{dy^2} = \frac{1}{y^2} \frac{d}{dy}\left(y^2 \frac{df}{dy}\right) = 0$$

$$y^2 \frac{df}{dy} = Const. = k; \quad \frac{df}{dy} = \frac{k}{y^2}$$

$$f = -\frac{k}{y} + Const. = w_0 + k\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{y}\right),$$

wenn w_0 jetzt die Oberflächengeschwindigkeit im Punkte W bezeichnet; endlich ist

$$w = w_0 + k\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{y}\right) - m\frac{\varrho}{y}z^2 \quad \ldots\ldots\ldots (7).$$

In Folge der Abnahme des relativen Gefälles von W bis Q ist die Constante k ohne Zweifel negativ.

Ein weiteres Eingehen auf diese Verhältnisse wäre übrigens schon deshalb nicht von erheblichem technischem Interesse, weil die der Untersuchung zu Grunde liegende Voraussetzung ungestörten Fortbestehens des gleichförmigen Beharrungszustandes sich nur bei einer solchen Canalkrümmung, die sich auf eine grosse Länge erstreckt, also bei gegebenem Krümmungshalbmesser ϱ einen grossen Krümmungswinkel umfasst, gegen die Mitte der Canalkrümmung hin genügend erfüllt fände; am Anfang derselben würde das Querprofil des Wassers nur allmählig aus einer horizontalen Geraden in jene dem gleichförmigen Beharrungszustande in der Krümmung entsprechende, durch Gl. (5) annähernd bestimmte Curve übergehen, sowie am Ende aus dieser Curve in jene horizontale Gerade, so dass gewöhnlich, nämlich bei gekrümmten Canalstrecken von mässiger Länge, kaum überhaupt ein gleichförmiger Beharrungszustand streng genommen eintreten kann.

Um so mehr muss auf eine rationelle Schätzung des durch Canalkrümmungen verursachten zusätzlichen Bewegungswiderstandes verzichtet werden, welcher hier ebenso wie bei Leitungsröhren, die auf eine grössere Länge gekrümmt sind (§. 91), im Wesentlichen als auf einer Vermehrung der inneren Reibung durch nicht weiter analysirbare relative Bewegungen des Wassers beruhend zu erachten ist. Von dem Gefälle h des Wassers für die ganze (längs der Mittellinie gemessene) Länge l des gekrümmten Canals muss ein gewisser Theil h_1 zur Bewältigung jenes Krümmungswiderstandes verbraucht werden, so dass der Werth von α, welcher in den Formeln des §. 126 als relatives Gefälle hier einzusetzen wäre, nur

$$\alpha = \frac{h - h_1}{l}$$

ist. Für das Partialgefälle h_1 mag dabei in Ermangelung sonstiger ...

länglich bewährter Festsetzungen einstweilen auf Dubuat's Empfehlung dieselbe Formel zu Grunde gelegt werden, die den Krümmungswiderstand von Röhren ihm zufolge annähernd darstellt, nämlich nach §. 91, Gl. (4) und (5):

$$h_1 = C\,\Sigma\,\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{u^2}{2g}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

wobei die verschiedenen Winkel φ nach Analogie der Vorschrift in §. 91 für jeden einzelnen Fall zu bestimmen sind, indem nur die Mittellinie der freien Wasseroberfläche an die Stelle der Rohrmittellinie gesetzt wird, und insbesondere bei constantem Krümmungshalbmesser ϱ des inneren Randes der Canalkrümmung:

$$h_1 = C\,\frac{\Phi}{\varphi}\,\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{u^2}{2g}\quad\text{mit}\quad\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\varrho + \frac{1}{2}b}{\varrho + b}\quad\ldots\ldots (9),$$

unter Φ den ganzen Krümmungs- oder Ablenkungswinkel und unter b die Wasserbreite verstanden. Für den Coefficienten C, dessen Werth zudem abhängig von der Querschnittsform und von anderen Umständen sein kann, fehlt es an ausreichenden Bestimmungen; insbesondere ist es zweifelhaft, ob die Dubuat'sche Angabe:

$$\frac{C}{2g} = 0{,}0123$$

hier ebenso angenähert zutreffe wie bei Röhren von kreisförmigem Querschnitte.

Ungleichförmige permanente Bewegung des Wassers in Canälen.

§. 130. Fundamentalgleichung.

Die für jeden einzelnen Querschnitt nach wie vor constanten Grössen F (Inhalt) und u (mittlere Geschwindigkeit) sind jetzt für die verschiedenen Querschnitte in solcher Weise verschieden, dass nur das Product $Fu = Q$ für alle Querschnitte gleich ist. Wenn dabei auch die Canalwand im Allgemeinen nicht eine vollkommene Cylinderfläche sein mag, so werden doch die Profiländerungen längs derselben als stetig und so allmählig stattfindend vorausgesetzt, dass ohne allzu grossen Fehler alle Bahnen als schwach gekrümmte und von den ebenen Querschnitten fast senkrecht geschnittene Curven angenommen werden können.

Das relative Gefälle, welches längs dem Canal im Allgemeinen variabel ist, sei hier mit φ bezeichnet; dasselbe, nach der Bemerkung zu Ende von §. 126 allgemein auch gleich der bewegenden Kraft pro 1 Kgr. Wasser im Sinne der Strömung, ist jetzt als Summe von zwei Bestandtheilen zu betrachten, von welchen der eine (jedenfalls positive) $= \varphi'$ zur Bewältigung der Bewegungswiderstände, der andere (positive oder negative) zur Geschwindigkeitsänderung dient. Ist also m die Masse einer Wasserschicht zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten, so ist die Aenderung ihrer lebendigen Kraft längs dem Längenelement ds des Canals:

$$d\,\frac{mu^2}{2} = mg(\varphi - \varphi')ds.$$

Daraus folgt, wenn $dy = \varphi ds$ das Gefälle für die Länge ds bedeutet,

$$\frac{udu}{g} = dy - \varphi' ds$$

und, sofern $\varphi' = \psi(r, u)$ nach §. 126 eine gewisse Function von $r =$ und von u ist,

$$dy = \frac{udu}{g} + \psi(r, u)ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Durch Integration ergiebt sich daraus das Gefälle von einem gewissen Querschnitte F_0 bis zu einem stromabwärts in der Entfernung s davon gelegenen anderen Querschnitte F:

$$y = \frac{u^2 - u_0^2}{2g} + \int_0^s \psi(r, u)ds$$

$$= \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{F^2} - \frac{1}{F_0^2}\right) + \int_0^s \psi\left(r, \frac{Q}{F}\right)ds \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Wären Q und ausser den Querschnitten F_0, F auch noch hinlänglich viele dazwischen liegende Querschnitte ihrer Gestalt und Grösse nach bekannt, so könnte das Integral näherungsweise berechnet und so y gefunden werden. Nur in dieser Absicht würde man freilich die Gl. (2) kaum benutzen, weil durch Nivellement das Gefälle leichter und sicherer zu bestimmen wäre; indessen könnte die Vergleichung des berechneten und des gemessenen Werthes von y als Controle der Beziehung $u = f(r, \varphi')$ dienen, aus welcher $\varphi' = \psi(r, u)$ abgeleitet wurde.

Wenn ausser den fraglichen Querschnitten das Gefälle

bekannt wäre, so könnte Gl. (2) zur Bestimmung von Q dienen. Setzte man etwa

$$u = k\sqrt{r\varphi'}, \text{ also } \varphi' = \frac{1}{r}\frac{u^2}{k^2} = \frac{pQ^2}{k^2F^3} = \psi\left(r, \frac{Q}{F}\right),$$

so würde folgen:

$$Q^2 = \frac{y}{\frac{1}{2g}\left(\frac{1}{F^2} - \frac{1}{F_0^2}\right) + \int_0^s \frac{p}{k^2F^3}\, ds} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

nsofern hier auch der Coefficient k (insbesondere nach Gl. (13) in §. 126) treng genommen von φ' noch abhängig wäre, würde es zwar meist genügen, für dieses φ' einen constanten Mittelwerth zu setzen, behufs einer rsten Annäherung etwa $\varphi' = \frac{y}{s}$ und dann mit dem so nach Gl. (3) beechneten Näherungswerth Q_1 von Q nöthigenfalls

$$\varphi' = \frac{1}{s}\left[y - \frac{Q_1^2}{2g}\left(\frac{1}{F^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)\right];$$

ndessen würde auch einer solchen Bestimmung von Q die directere Methode urch Geschwindigkeitsmessungen in einem Querschnitte an einer Stelle, o F möglichst wenig veränderlich, also die Bewegung möglichst gleichrmig ist, nach Maassgabe von §. 125 vorzuziehen sein.

Von grösserer praktischer Wichtigkeit ist die in den folgenden Paraaphen zu behandelnde Anwendung obiger Fundamentalgleichung (1), betreffend die angenäherte Vorausbestimmung der Aenderung, welche die ie Wasseroberfläche eines Flusses in Folge eines projectirten Strombaues erfahren wird. Wenn insbesondere mit diesem Bau an einer gewissen Stelle eine Querschnittsverkleinerung und in Folge dessen unmittelr oberhalb derselben eine Erhebung der Wasseroberfläche von bekannter rösse verbunden ist, so ist es wichtig, im Voraus beurtheilen zu können, e dieser Aufstau in einer gewissen von der fraglichen Stelle aus stromfwärts gelegenen Flussstrecke sich geltend machen wird.

131. Allgemeines Verfahren einer angenäherten Bestimmung der freien Wasseroberfläche.

Das Bett einer gewissen Flussstrecke AB, die hinlänglich gerade ist, ı von Krümmungswiderständen abstrahiren zu dürfen, sei in Betreff seiner

Gestalt und Lage gegen den Horizont durch Nivellement und durch Aus-messung gewisser Querprofile: P an der Stelle B, P_1 in der Entfernung Δs stromaufwärts von P, P_2 in der Entfernung Δs_1 stromaufwärts von P_1 ... näherungsweise bekannt; ein seitlicher Zu- oder Abfluss von Wasser finde auf der ganzen Strecke nicht statt, so dass im Beharrungszustande dasselbe Wasserquantum Q pro Sec. durch jeden Querschnitt hindurch fliesst. Bei gegebenem Werth von Q sei auch die Lage des Wasserquerprofils in der Ebene des Flussquerprofils P (insbesondere z. B. bedingt durch einen nahe stromabwärts der Stelle B projectirten Wehrbau, Brückenbau etc. und somit der Inhalt $= F$, das benetzte Querprofil $= p$, der mittlere Radius $r = \frac{F}{p}$ dieses Querschnitts gegeben. Die freie Wasseroberfläche der Flussstrecke AB wird dann näherungsweise gefunden, indem die Lage der Wasserquerprofile in den Ebenen der Flussprofile P_1, P_2.. der Reihe nach bestimmt werden, wozu nur nöthig ist, die Gefälle Δy, Δy_1 ... für die Flussstrecken Δs, Δs_1 ... der Reihe nach zu berechnen. Bezeichnet ... F_1 den Inhalt und r_1 den mittleren Radius des Querschnitts bei P_1 ... kann nach Gl. (2) im vorigen §., sofern nur Δs hinlänglich klein ist, ... setzt werden:

$$\Delta y = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{F^2} - \frac{1}{F_1{}^2}\right) + \left[\psi\left(r, \frac{Q}{F}\right) + \psi\left(r_1, \frac{Q}{F_1}\right)\right]\frac{\Delta s}{2},$$

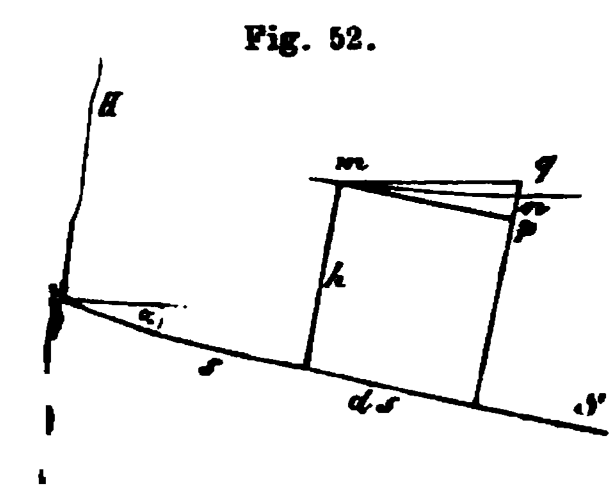
wobei zwar F_1 und r_1 erst durch die gesuchte Lage des Wasserquerprofils in der Querschnittsebene P_1, also durch Δy bestimmt sind; nimmt man aber vorläufig F_1 und r_1 entsprechend $\Delta y = 0$, so liefert obige Gleichung einen Näherungswerth von Δy, durch welchen corrigirte Werthe von F_1 und r_1 bestimmt sind, mit denen nach der Gleichung ein corrigirter Werth von Δy berechnet werden kann u. s. f., bis zwei aufeinander folgende gefundene Werthe von Δy hinlänglich wenig verschieden sind, um die Rechnung abschliessen zu dürfen. Offenbar ganz ebenso kann dann die Lage des Wasserquerprofils in der Querschnittsebene P_2 gefunden werden, bestimmt durch

$$\Delta y_1 = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{F_1{}^2} - \frac{1}{F_2{}^2}\right) + \left[\psi\left(r_1, \frac{Q}{F_1}\right) + \psi\left(r_2, \frac{Q}{F_2}\right)\right]\frac{\Delta s_1}{2},$$

indem als erster Näherungswerth $\Delta y_1 = \frac{\Delta s_1}{\Delta s}\Delta y$ gesetzt wird u. s. f.

§. 132. Staucurve bei Voraussetzung eines cylindrischen Canals.

Behufs einer weiteren und erleichterten Ausführung der im vorigen §. behandelten Aufgabe werde die Canalwand (das Flussbett) als eine Cylinderfläche von gegebenem Querprofil vorausgesetzt, deren erzeugende Geraden unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigt seien. Eine mit diesen Erzeugenden parallele und unter demselben Winkel α gegen den Horizont geneigte Ebene E schneidet alle Querschnitte in homologen Horizontalen $H_0 H_0$ (Fig. 50, §. 127), so dass für jeden Querschnitt durch die Höhe h seines Wasserquerprofils über der Horizontalen $H_0 H_0$ die Lage dieses Querprofils (der Wasserstand) sowie alle Dimensionen, insbesondere die Grössen F, b, p, r (§. 123) bestimmt sind. Irgend ein Längenschnitt schneidet die Ebene E in einer Neigungslinie OS (Fig. 52), die freie Wasseroberfläche in einem Längenprofil, das hier die Staucurve genannt werde, und die Aufgabe kommt hinaus auf die Bestimmung dieser Staucurve durch eine Gleichung zwischen ihren rechtwinkeligen Coordinaten s, h für OS als Axe der s, die von dem willkürlichen Anfangspunkte O aus stromabwärts positiv gerechnet werde.


Fig. 52.

Ist zu dem Ende (Fig. 52) mn ein Element der Staucurve, mp parallel OS und mq horizontal, so folgt aus der Gleichung

$$nq = pq - pn$$

mit Rücksicht darauf, dass α ein sehr kleiner Winkel ist:

$$dy = \alpha ds - dh \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1),$$

ferner aus $Fu = Q =$ einer gegebenen Constanten:

$$F du + u dF = 0; \quad du = -\frac{u dF}{F} = -\frac{ub}{F} dh \quad \dots\dots (2),$$

und die Substitution dieser Ausdrücke von dy und du in der Fundamentalgleichung (1), §. 130, giebt:

$$\alpha ds - dh = -\frac{b}{F}\frac{u^2}{g} dh + \varphi(r, u) ds$$

$$ds = \frac{1 - \frac{b}{F}\frac{u^2}{g}}{\alpha - \varphi(r, u)} dh = \Pi dh \quad \dots\dots\dots\dots (3),$$

als **Differentialgleichung der Staucurve**, indem F, b, r und $u = \frac{Q}{F}$ gegebene Functionen von h sind, somit auch H je nach der Annahme in Betreff der Function ψ eine bekannte Function von h ist. Der reciproke Werth von H ist = dem Ueberschuss des Abhangs des Canals über das relative Gefälle an der betreffenden Stelle, nämlich nach Gl. (1) und (3):

$$\frac{1}{H} = \frac{dh}{ds} = \alpha - \frac{dy}{ds} = \alpha - \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \; 4.$$

Im Allgemeinen ist H nicht auf einfache Weise oder überhaupt nicht mathematisch (nur empirisch) durch h ausdrückbar, so dass die Integration von Gl. (3) zur Berechnung der Strecke

$$s_n - s = \int_h^{h_n} H\,dh,$$

für welche die Wasserstandshöhe eine gegebene Aenderung von h bis h_n erfährt, nur näherungsweise ausgeführt werden kann, etwa nach der **Simpson'schen Formel**:

$$s_n - s = \frac{h_n - h}{3n}\left(H + 4H_1 + 2H_2 + \ldots + 4H_{n-1} + H_n\right),$$

unter n eine gerade Zahl und unter H_1, H_2.. die Werthe von H für

$$h_1 = h + \frac{1}{n}(h_n - h), \quad h_2 = h + \frac{2}{n}(h_n - h)\ldots$$

verstanden. Indem man so s für verschiedene Werthe von h berechnet, erhält man ebenso viele Punkte der Staucurve ausser dem gegebenen Punkte (s_n, h_n) unmittelbar oberhalb der Stelle, wo der Aufstau verursacht wird.

Die Berechnung der verschiedenen Werthe von H wird wesentlich erschwert durch die Ausrechnung der betreffenden Functionswerthe φ etc., besonders wenn dabei nach Gl. (13), §. 126

$$u = k\sqrt{r\varphi'} = \frac{\frac{1}{n} + 23 + \frac{0{,}00155}{\varphi'}}{1 + \left(23 + \frac{0{,}00155}{\varphi'}\right)\frac{n}{\sqrt{r}}}\sqrt{r\varphi'}$$

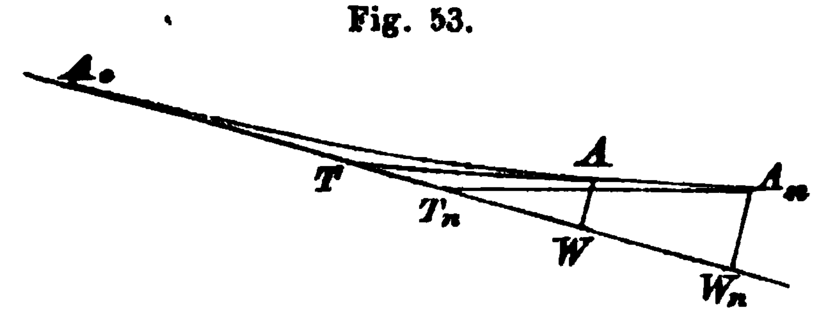
gesetzt wird, wonach die Berechnung von $\varphi' = \psi(r, u)$ die Auflösung einer Gleichung dritten Grades mit der Wurzel $\sqrt{\varphi'}$ erfordern würde. Setzt man aber

$$\varphi' = \psi(r, u) = \frac{1}{r}\frac{u^2}{k^2} = \frac{p}{F}\frac{u^2}{k^2},$$

$$\text{also } \frac{ds}{dh} = H = \frac{1 - \frac{b}{F}\frac{u^2}{g}}{\alpha - \frac{p}{F}\frac{u^2}{k^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

so kann man sich mit einer angenäherten Bestimmung des in dem Ausdrucke von k noch vorkommenden φ' begnügen, entsprechend einer einfachen Annahme in Betreff der Gestalt der Staucurve. Wird etwa dieselbe vorläufig als Kreisbogen angenommen, der das mit der Axe OS (Fig. 52) parallele Längenprofil $A_0 W_n$ (Fig. 53) des ungestauten, d. h. des in gleicher Menge in demselben Canal gleichförmig fliessenden Wassers in A_0 berührt, und sind A, A_n die Punkte dieses Kreisbogens, denen die Abscissen s, s_n mit Bezug auf Fig. 52 entsprechen, so dass in Fig. 53

Fig. 53.



$$AW = h - h_0, \quad A_n W_n = h_n - h_0$$

ist, unter h_0 den constanten Werth von h für das ungestaute Wasser verstanden, so ist, wenn AT und $A_n T_n$ den Kreisbogen beziehungsweise in A und A_n berühren und die Winkel φ, φ_n mit dem Horizont bilden = den relativen Gefällen bei A, A_n,

$$\text{Winkel } ATW = \alpha - \varphi; \quad TA_0 = TA = TW$$

$$\text{„} \quad A_n T_n W_n = \alpha - \varphi_n; \quad T_n A_0 = T_n A_n = T_n W_n$$

$$\frac{\alpha - \varphi}{\alpha - \varphi_n} = \frac{AW : TW}{A_n W_n : T_n W_n} = \frac{AW}{A_n W_n}\frac{T_n W_n}{TW} = \frac{AW}{A_n W_n}\frac{A_0 W_n}{A_0 W}$$

$$= \frac{AW}{A_n W_n}\sqrt{\frac{A_n W_n}{AW}} = \sqrt{\frac{AW}{A_n W_n}} = \sqrt{\frac{h - h_0}{h_n - h_0}}$$

$$\varphi = \alpha - (\alpha - \varphi_n)\sqrt{\frac{h - h_0}{h_n - h_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Aus φ ergiebt sich φ' vermittels der diese letztere Grösse definirenden Gleichung:

$$(\varphi - \varphi')ds = d\frac{u^2}{2g} = \frac{u\,du}{g},$$

woraus mit Rücksicht auf Gl. (2) und (4) folgt:

$$\varphi' - \varphi = \frac{u}{g}\frac{ub}{F}\frac{dh}{ds} = \frac{b}{F}\frac{u^2}{g}(\alpha - \varphi)$$

$$\varphi' = \varphi + (\alpha - \varphi) \frac{b}{F} \frac{u^2}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 8.$$

Weil übrigens für φ_n in Gl. (7) doch nach Schätzung ein sehr kleiner Bruch angenommen werden müsste, so kann man auch mit Rücksicht auf den nur sehr mässigen Grad von Annäherung, den diese ganze Rechnung beansprucht, in Gl. (7) für φ den etwas grösseren Werth φ' setzen, falls nur φ_n etwas reichlich, etwa $= 0{,}1\,\alpha$ veranschlagt wird. Dadurch erhält man für den vorliegenden Zweck genau genug:

$$\varphi' = \alpha \left(1 - 0{,}9 \sqrt{\frac{h - h_0}{h_n - h_0}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9.$$

Schliesslich ist hervorzuheben, dass die Anwendbarkeit von Gl. 5 zur angenäherten Berechnung des Integrals $= s_n - s$ an zwei Bedingungen geknüpft ist. Wenn insbesondere für einen gewissen zwischen den Integrationsgrenzen liegenden Werth der Variablen h der Nenner des Ausdrucks von $H =$ Null, also H unendlich würde, nach Gl. (6) entsprechend $\frac{dh}{ds} = 0$, d. h. der gleichförmigen Bewegung des gegebenen Wasserquantums Q in dem gegebenen Canal, so würde das Integral eine Theilung und eine besondere Untersuchung beider Theile erfordern. Wenn es sich andererseits ereignen sollte, dass für einen gewissen Werth von h zwischen den Integrationsgrenzen der Zähler des Ausdrucks von H, folglich H selbst $=$ Null, $\frac{dh}{ds}$ nach Gl. (6) unendlich wird, entsprechend einer gegen das Längenprofil des Canals senkrechten Richtung der Wasseroberfläche, so würde dieser Umstand das Stattfinden einer unter dem Namen des Wassersprunges oder der Wasserschwelle (ressaut superficiel) bekannten, zuerst von Bidone beobachteten Erscheinung andeuten, welche indessen auch eine besondere Untersuchung erfordert, weil die obige Entwickelung von Gl. (6) auf der Voraussetzung beruht, dass die Bahnen der Wassertheilchen überall nur wenig gegen das Längenprofil des Canals geneigt sind.

In der Regel sind die Verhältnisse von solcher Art, dass sowohl der Zähler als der Nenner des Ausdrucks von H (Gl. 6) beständig positiv ist. Der Zähler ist nämlich positiv, wenn

$$u < \sqrt{g \frac{F}{b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10.$$

ist, z. B. für $\frac{F}{b}$	$= 0{,}25$	0,5	1	2	4	Mtr.
u	$< 1{,}57$	2,21	3,13	4,43	6,26	„

Sofern ausserdem mit wachsendem h

$$\frac{b}{F}\frac{u^2}{g}=\frac{b}{F^3}\frac{Q^2}{g} \text{ und } \frac{p}{F}\frac{u^2}{k^2}=\frac{p}{F^3}\frac{Q^2}{k^2}$$

ohne Ende abnehmen, indem F^3 schneller wächst, als b oder p, auch k mit wachsendem $r=\frac{F}{p}$ zunimmt, ist der Nenner des Ausdrucks von H positiv, wenn h grösser als derjenige Werth h_0 ist, für welchen, dem ungestauten, oder gleichförmig fliessenden Wasser entsprechend, jener Nenner = Null ist.

Unter solchen Umständen ist also auch

$$\frac{1}{H}=\frac{dh}{ds}=\frac{\alpha-\frac{p}{F}\frac{u^2}{k^2}}{1-\frac{b}{F}\frac{u^2}{g}}$$

positiv, nimmt folglich h mit s zu. An jener Stelle, wo die Staucurve das Längenprofil des ungestauten Wassers berührt, ist $\frac{dh}{ds}=0$; sofern aber mit wachsendem h oder s

$$\frac{b}{F}\frac{u^2}{g} \text{ und } \frac{p}{F}\frac{u^2}{k^2}$$

ohne Ende abnehmen, nähert sich im Sinne der Strömung $\frac{dh}{ds}$ der Grenze α, nach Gl. (4) folglich φ der Grenze Null um so mehr, je höher das Wasser gestaut ist, und zwar $\frac{dh}{ds}$ zunehmend, φ abnehmend, entsprechend einer nach oben concaven Krümmung der Staucurve.

§. 133. Entwickelte Gleichung der Staucurve.

Das Integral der Gl. (6) im vorigen §. kann als ein geschlossener Ausdruck erhalten werden, wenn für den Coefficienten k ein constanter Werth angenommen wird, und wenn das Querprofil des Canals von solcher Gestalt ist, dass b, p, F ganzen Functionen von h gleich zu setzen sind, etwa nach §. 127

$$\left.\begin{aligned} b &= b_0+h(tg\,\beta_1+tg\,\beta_2) \ldots\ldots \\ p &= p_0+h(sec\,\beta_1+sec\,\beta_2) \ldots\ldots \\ F &= F_0+hb_0+\frac{1}{2}h^2(tg\,\beta_1+tg\,\beta_2) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

mit constanten Mittelwerthen von β_1 und β_2. Bemerkenswerth ist, dass in allen solchen Fällen die Staucurve sich asymptotisch dem Längenprofil des gleichförmig fliessenden Wassers anschliesst. Indem nämlich

$$ds = \frac{f(h)}{f_1(h)}\, dh; \quad s_n - s = \int_h^{h_n} \frac{f(h)}{f_1(h)}\, dh$$

wird, unter $f(h)$ und $f_1(h)$ ganze Functionen von h verstanden, und $h = h_0$ (entsprechend $\frac{dh}{ds} = 0$) eine Wurzel der Gleichung $f_1(h) = 0$ ist, vorausgesetzt dass nicht auch $f(h) = 0$, enthält das entwickelte Integral (dem Partialbruch mit dem Nenner $= h - h_0$ entsprechend) ein Glied mit dem Factor $ln(h - h_0)$, welches für $h = h_0$ unendlich wird.

Zur Ausführung der Rechnung ist es am einfachsten, die im vorigen §. mit E bezeichnete Ebene, welche die Querschnitte in den homologen Horizontalen H_0H_0 schneidet, in der freien Oberfläche des ungestauten gleicher Menge Q in gleichförmigem Beharrungszustande fliessenden Wassers anzunehmen, so dass $h_0 = 0$ ist und h die Erhebung der Wasseroberfläche an irgend einer Stelle in Folge des Aufstaues an einer gewissen stromabwärts gelegenen Stelle bedeutet. In den obigen Gleichungen sind dann b_0, p_0, F_0 beziehungsweise die Wasserbreite, das benetzte Querprofil und der Querschnitt des ungestauten Wassers. Schreibt man die Gl. (6) im vorigen §. in der Form:

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1 - \frac{b}{F^3}\frac{Q^2}{g}}{\alpha - \frac{p}{F^3}\frac{Q^2}{k^2}},$$

so folgt mit Rücksicht darauf, dass für $h = 0$ auch $\frac{dh}{ds} = 0$ ist, auf Grund der Annahme eines constanten Coefficienten k (vorausgesetzt dass Zähler des Ausdrucks von $\frac{ds}{dh}$ nicht $= 0$ wird):

$$\alpha - \frac{p_0}{F_0^3}\frac{Q^2}{k^2} = 0; \quad Q^2 = \alpha k^2 \frac{F_0^3}{p_0} \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{1 - \frac{\alpha k^2}{g}\frac{b}{p_0}\left(\frac{F_0}{F}\right)^3}{1 - \frac{p}{p_0}\left(\frac{F_0}{F}\right)^3} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\left(\frac{F}{F_0}\right)^3 - \frac{\alpha k^2}{g}\frac{b}{p_0}}{\left(\frac{F}{F_0}\right)^3 - \frac{p}{p_0}} \quad \ldots$$

Hierin wären b, p, F als Functionen von h, z. B. nach obigen Gleichungen (1) einzusetzen. Um aber ein hinlänglich einfaches, praktisch brauchbares Resultat zu erhalten, ist eine weitere Vereinfachung nöthig, und zwar werde angenommen:

1) es sei die Breite so überwiegend über die Tiefe, dass ohne wesentlichen Fehler

$$p = b, \quad p_0 = b_0$$

gesetzt werden kann, und

2) es sei die Canalwand oberhalb der freien Wasseroberfläche des ungestauten Flusses hinlänglich wenig gegen die Lothrechte geneigt, um ohne erheblichen Fehler auch

$$b = b_0$$

setzen zu dürfen, was unter übrigens gleichen Umständen um so eher geschehen darf, in um je höherem Grade die Voraussetzung unter 1) erfüllt ist. Setzt man nun, unter

$$a = \frac{F_0}{b_0} = \frac{F_0}{b}$$

die mittlere Tiefe des ungestauten Wassers verstanden,

$$\frac{F}{F_0} = \frac{a + h}{a} = x, \quad \text{also} \quad dh = a\,dx,$$

so geht Gl. (3) über in:

$$ds = \frac{a}{\alpha} \frac{x^3 - \frac{ak^2}{g}}{x^3 - 1} dx = \frac{a}{\alpha}\left(1 + \frac{1 - \frac{ak^2}{g}}{x^3 - 1}\right) dx \quad \ldots\ldots (4).$$

Bezeichnet H das gegebene Maximum der Stauhöhe, $X = \frac{a + H}{a}$ den entsprechenden Werth von x, und z die Entfernung vom Orte dieses Maximums stromaufwärts bis zu der Stelle, wo die Stauhöhe $= h < H$ ist, so ist $ds = -dz$, und ergiebt sich durch Integration von Gl. (4):

$$z = \frac{a}{\alpha}\left[X - x + \left(1 - \frac{ak^2}{g}\right)(i - I)\right] \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\text{mit } i = -\int \frac{dx}{x^3 - 1}; \quad \text{oder auch:}$$

$$z = \frac{H - h}{\alpha} + \frac{a}{\alpha}\left(1 - \frac{ak^2}{g}\right)(i - I) \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

Das erste Glied auf der rechten Seite ist diejenige Entfernung, bis zu

welcher die Stauhöhe von H bis h abnehmen würde, wenn die Staucurve eine horizontale Gerade wäre. Was die mit i bezeichnete Function von x betrifft, so ist wegen

$$\frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{3}\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{dx}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3}\,d\,ln(x-1) - \frac{1}{6}\,d\,ln(x^2+x+1) - \frac{2}{3}\frac{dx}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{6}\,d\,ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,d\,arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$i = -\int\frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{6}\,ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

wozu eine beliebige Constante gefügt werden kann, etwa

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2},$$

so dass schliesslich

$$i = \frac{1}{6}\,ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\,arccotg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \quad \ldots\ldots 7$$

wird; $I = i$ mit X statt x. Hiernach ist für

$$h = \infty,\ x = \infty : i = 0$$
$$h = 0,\ x = 1 : i = \infty$$

Die letzteren zusammengehörigen Werthe bestätigen die obige allgemeine Bemerkung, dass die Staucurve asymptotisch in das Längenprofil des Wassers für die gleichförmige permanente Bewegung übergeht; die ersteren lassen erkennen, dass das zweite Glied im Ausdrucke (6) von s mit um so geringerem Fehler vernachlässigt werden kann, je grösser H und h bei gegebenem a sind.

Die Werthe von i für beliebige Werthe von x zwischen 1 und ∞, also von $\frac{1}{x}$ zwischen 1 und 0, können der folgenden Tabelle* entnommen werden.

* M. Bresse, Cours de mécanique appliquée, II. partie, Paris 1860

$\frac{1}{x}$	i	$\frac{1}{x}$	i	$\frac{1}{x}$	i	$\frac{1}{x}$	i
0,999	2,1834	0,944	0,8418	0,800	0,4198	0,48	0,1207
0,998	1,9523	0,942	0,8301	0,795	0,4117	0,47	0,1154
0,997	1,8172	0,940	0,8188	0,790	0,4039	0,46	0,1102
0,996	1,7213	0,938	0,8079	0,785	0,3962	0,45	0,1052
0,995	1,6469	0,936	0,7973	0,780	0,3886	0,44	0,1003
0,994	1,5861	0,934	0,7871	0,775	0,3813	0,43	0,0955
0,993	1,5348	0,932	0,7772	0,770	0,3741	0,42	0,0909
0,992	1,4902	0,930	0,7675	0,765	0,3671	0,41	0,0865
0,991	1,4510	0,928	0,7581	0,760	0,3603	0,40	0,0821
0,990	1,4159	0,926	0,7490	0,755	0,3536	0,39	0,0779
0,989	1,3841	0,924	0,7401	0,750	0,3470	0,38	0,0738
0,988	1,3551	0,922	0,7315	0,745	0,3406	0,37	0,0699
0,987	1,3284	0,920	0,7231	0,740	0,3343	0,36	0,0660
0,986	1,3037	0,918	0,7149	0,735	0,3282	0,35	0,0623
0,985	1,2807	0,916	0,7069	0,730	0,3221	0,34	0,0587
0,984	1,2592	0,914	0,6990	0,725	0,3162	0,33	0,0553
0,983	1,2390	0,912	0,6914	0,720	0,3104	0,32	0,0519
0,982	1,2199	0,910	0,6839	0,715	0,3047	0,31	0,0486
0,981	1,2019	0,908	0,6766	0,710	0,2991	0,30	0,0455
0,980	1,1848	0,906	0,6695	0,705	0,2937	0,29	0,0425
0,979	1,1686	0,904	0,6625	0,70	0,2883	0,28	0,0395
0,978	1,1531	0,902	0,6556	0,69	0,2778	0,27	0,0367
0,977	1,1383	0,900	0,6489	0,68	0,2677	0,26	0,0340
0,976	1,1241	0,895	0,6327	0,67	0,2580	0,25	0,0314
0,975	1,1105	0,890	0,6173	0,66	0,2486	0,24	0,0290
0,974	1,0974	0,885	0,6025	0,65	0,2395	0,23	0,0266
0,973	1,0848	0,880	0,5884	0,64	0,2306	0,22	0,0243
0,972	1,0727	0,875	0,5749	0,63	0,2221	0,21	0,0221
0,971	1,0610	0,870	0,5619	0,62	0,2138	0,20	0,0201
0,970	1,0497	0,865	0,5494	0,61	0,2058	0,19	0,0181
0,968	1,0282	0,860	0,5374	0,60	0,1980	0,18	0,0162
0,966	1,0080	0,855	0,5258	0,59	0,1905	0,17	0,0145
0,964	0,9890	0,850	0,5146	0,58	0,1832	0,16	0,0128
0,962	0,9709	0,845	0,5037	0,57	0,1761	0,15	0,0113
0,960	0,9539	0,840	0,4932	0,56	0,1692	0,14	0,0098
0,958	0,9376	0,835	0,4831	0,55	0,1625	0,13	0,0085
0,956	0,9221	0,830	0,4733	0,54	0,1560	0,12	0,0072
0,954	0,9073	0,825	0,4637	0,53	0,1497	0,11	0,0061
0,952	0,8931	0,820	0,4544	0,52	0,1435	0,10	0,0050
0,950	0,8795	0,815	0,4454	0,51	0,1376	0,09	0,0041
0,948	0,8665	0,810	0,4367	0,50	0,1318	0,08	0,0032
0,946	0,8539	0,805	0,4281	0,49	0,1262	0,07	0,0025

Was den in Gl. (6) dem Coefficienten k beizulegenden Werth betrifft, so ist zu bemerken, dass er durch Gl. (2) demjenigen $= k_0$ gleich gesetzt wurde, welcher eigentlich nur dem gleichförmigen Beharrungszustande des ungestauten Wassers entspricht:

$$k_0 = \frac{Q}{F_0}\sqrt{\frac{p_0}{\alpha F_0}} = \frac{u_0}{\sqrt{a\alpha}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \; 8.$$

unter u_0 die mittlere Geschwindigkeit des ungestauten Wassers verstanden, womit Gl. (6) auch geschrieben werden kann:

$$z = \frac{1}{\alpha}\left[H - h + \left(a - \frac{u_0^2}{g}\right)(i - I)\right] \quad \ldots \ldots \ldots \; 9.$$

Um aber ein Urtheil über die Grösse des Fehlers zu gewinnen, der durch die Annahme $k = Const. = k_0$ begangen wurde, ist dieser Coëfficient k für irgend eine Stauhöhe h, insbesondere sein Grenzwerth $k = K$ für $h = H$ auf folgende Weise richtiger zu berechnen. Zunächst kann man bemerken, dass für den Theil φ' des relativen Gefälles φ, welcher an der Stelle der beliebigen Stauhöhe h mit den Widerständen im Gleichgewichte ist, gemäss der Annahme eines constanten Coefficienten k die Gleichung gilt:

$$\frac{u}{u_0} = \frac{a}{a+h} = \sqrt{\frac{a+h}{a}\frac{\varphi'}{\alpha}}; \quad \frac{\varphi'}{\alpha} = \left(\frac{a}{a+h}\right)^3 = \frac{1}{x^3} \; . \; 10.$$

Somit ist nach §. 126, Gl. (13) besser:

$$k = \frac{1}{n}\,\frac{\frac{1}{n} + 23 + \frac{0{,}00155}{\alpha}x^3}{\frac{1}{n} + \left(23 + \frac{0{,}00155}{\alpha}x^3\right)\frac{1}{\sqrt{a+h}}} \quad \ldots \ldots \; 11.$$

insbesondere $k = K$ für $h = H$, $x = X$, wobei für $\frac{1}{n}$ der Werth gesetzt werden muss, welcher aus der Gleichung

$$k_0 = \frac{u_0}{\sqrt{a\alpha}} = \frac{1}{n}\,\frac{\frac{1}{n} + m}{\frac{1}{n} + \frac{m}{\sqrt{a}}} \quad \text{mit} \quad m = 23 + \frac{0{,}00155}{\alpha}$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 + (m - k_0)\frac{1}{n} = \frac{mk_0}{\sqrt{a}}$$

sich ergiebt, nämlich

$$\frac{1}{n} = \frac{k_0 - m}{2} + \sqrt{\left(\frac{k_0 - m}{2}\right)^2 + \frac{m k_0}{\sqrt{a}}} \quad \ldots\ldots\ (12).$$

Beispiel. — Ein Fluss, dessen relatives Gefälle α im gleichförmigen Beharrungszustande $= 0{,}000115$ gemessen wurde, habe eine Breite $b = 70$ Mtr. und bei dem Wasserquantum $Q = 40$ Cubikm. die mittlere Tiefe $a = 1{,}05$ Mtr. Wenn derselbe bei dieser Wassermenge durch ein Wehr um $H = 1{,}5$ Mtr. aufgestaut würde, so soll ermittelt werden, in welchen Entfernungen vom Wehr stromaufwärts die Stauhöhe noch

$$h = 0{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}2 \text{ Mtr.}$$

betragen wird. Hier ist

$$u_0 = \frac{40}{1{,}05 \,.\, 70} = 0{,}5442; \quad a - \frac{u_0^2}{g} = 1{,}0198 \text{ Mtr.}$$

mit $g = 9{,}81$; ferner nach obiger Tabelle

$$\text{für } \frac{1}{X} = \frac{1{,}05}{2{,}55} = 0{,}412 : I = 0{,}0874$$

und für $h =$	0,6	0,4	0,2	Mtr.
also $\frac{1}{x} =$	$\frac{1{,}05}{1{,}65}$	$\frac{1{,}05}{1{,}45}$	$\frac{1{,}05}{1{,}25}$	
$=$	0,636	0,724	0,840	
$i =$	0,2272	0,3150	0,4932	
$\left(a - \frac{u_0^2}{g}\right)(i - I) =$	0,1426	0,2321	0,4138	Mtr.,
also mit $H - h =$	0,9	1,1	1,3	„
nach Gl. (9): $z\alpha =$	1,0426	1,3321	1,7138	„
$z =$	9066	11583	14902	„

Weil übrigens nach Gl. (8)

$$k_0 = 49{,}52$$

und damit nach Gl. (12)

$$\frac{1}{n} = 49{,}01 \text{ entsprechend } n = 0{,}0204$$

gefunden wird, ergiebt sich nach Gl. (11) für $h = H$ und $x = X$:

$$K = 70{,}47 = 1{,}423\, k_0,$$

wonach sich eine grosse Genauigkeit des zweiten Bestandtheils von z nicht

erwarten lässt. Derselbe ist zwar ein um so kleinerer Theil des ganzen z, je grösser h, nämlich

$$= \frac{0,1426}{1,0426} \quad \frac{0,2321}{1,3321} \quad \frac{0,4138}{1,7138}$$

$$= 0,137 \quad 0,174 \quad 0,241$$

$$\text{für } h = 0,6 \quad 0,4 \quad 0,2 \quad \text{Mtr.},$$

allein je grösser h, desto mehr ist auch der wahre Mittelwerth des Coefficienten k für die betrachtete Strecke des aufgestauten Flusses von k_0 verschieden, desto fehlerhafter folglich die obige Berechnung dieses zweiten Bestandtheils von z. —

Ein richtigeres Resultat, als nach dieser üblichen Rechnungsweise, ist zu erwarten, wenn in der Gleichung

$$\frac{dz}{dh} = \frac{1 - \frac{b}{F^3}\frac{Q^2}{g}}{\alpha - \frac{p}{F^3}\frac{Q^2}{k^2}},$$

von der die vorstehende Entwickelung ausging, dem Coefficienten k ein zwar auch constanter, aber von k_0 verschiedener, den jedesmaligen Umständen angepasster Werth beigelegt wird, etwa gemäss Gl. (11):

$$k = \frac{1}{n}\,\frac{\frac{1}{n} + 23 + \frac{0,00155}{\alpha}x_1^3}{\frac{1}{n} + \left(23 + \frac{0,00155}{\alpha}x_1^3\right)\frac{1}{\sqrt{a + h_1}}} \quad \text{mit } h_1 = \frac{H + h}{2} \text{ und } x_1 = \frac{a + h_1}{a} \quad \ldots\ldots (13)$$

während $\frac{1}{n}$ nach Gl. (12) bestimmt wird. Mit

$$\alpha - \frac{p_0}{F_0^3}\frac{Q^2}{k_0^2} = 0; \quad Q^2 = \alpha k_0^2 \frac{F_0^3}{p_0}$$

erhält dann die Gleichung die allgemeinere Form:

$$\frac{dz}{dh} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{1 - \frac{\alpha k_0^2}{g}\frac{b}{p_0}\left(\frac{F_0}{F}\right)^3}{1 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2\frac{p}{p_0}\left(\frac{F_0}{F}\right)^3} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\left(\frac{F}{F_0}\right)^3 - \frac{\alpha k_0^2}{g}\frac{b}{p_0}}{\left(\frac{F}{F_0}\right)^3 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2\frac{p}{p_0}} \quad \ldots (14)$$

und gemäss den obigen Annahmen unter 1) und 2) mit

$$p = p_0 = b; \quad \frac{F}{F_0} = \frac{a + h}{a} = x; \quad dh = a\,dx$$

$$ds = \frac{a}{\alpha} \frac{x^3 - \frac{\alpha k_0^2}{g}}{x^3 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2} dx = \frac{a}{\alpha}\left(1 + \frac{\left(\frac{k_0}{k}\right)^2 - \frac{\alpha k_0^2}{g}}{x^3 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2}\right) dx \quad . \; (4, a).$$

Daraus folgt mit $\frac{\alpha k_0^2}{g} = \frac{u_0^2}{ga}$ nach Gl. (8) und wenn

$$\left(\frac{k_0}{k}\right)^2 = c^3, \text{ also } c = \left(\frac{k_0}{k}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \; (14)$$

gesetzt wird, durch Integration von H bis h resp. X bis x:

$$s = -\int ds = \frac{a}{\alpha}\left[X - x - \left(c^3 - \frac{u_0^2}{ga}\right)\int_X^x \frac{dx}{x^3 - c^3}\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[H - h - \left(ac^3 - \frac{u_0^2}{g}\right)\int_X^x \frac{dx}{x^3 - c^3}\right]$$

oder wegen

$$-\int \frac{dx}{x^3 - c^3} = -\frac{1}{c^2}\int \frac{dx'}{x'^3 - 1} = \frac{i'}{c^2} \text{ mit } x' = \frac{x}{c}$$

$$s = \frac{1}{\alpha}\left[H - h + \left(ac - \frac{1}{g}\frac{u_0^2}{c^2}\right)(i' - I')\right] \quad \ldots \ldots \; (9, a).$$

Dabei können i' und I' der obigen Tabelle für die Argumente

$$\frac{1}{x'} = \frac{c}{x} = \frac{ac}{a + h}; \quad \frac{1}{X'} = \frac{c}{X} = \frac{ac}{a + H} \quad \ldots \ldots \; (15)$$

entnommen werden.

Für das obige Beispiel:

$$a = 1{,}05; \quad \alpha = 0{,}000115; \quad u_0 = 0{,}5442; \quad H = 1{,}5$$

ist $k_0 = 49{,}52$ und $\frac{1}{n} = 49{,}01$. Damit ergiebt sich

für $h =$	0,6	0,4	0,2
$h_1 =$	1,05	0,95	0,85
$x_1 =$	2	1,9048	1,8095
$k =$	63,28	61,72	60,20
$c =$	0,8492	0,8634	0,8779

$a c - \frac{1}{g}\frac{u_0^2}{c^2} =$	0,8498	0,8661	0,8826	
$\frac{1}{x'} =$	0,540	0,625	0,737	
$i' =$	0,1560	0,2180	0,3306	
$\frac{1}{X'} =$	0,350	0,356	0,361	
$I' =$	0,0623	0,0645	0,0664	
$\left(ac - \frac{1}{g}\frac{u_0^2}{c^2}\right)(i' - I') =$	0,0776	0,1329	0,2332	
$s\alpha =$	0,9776	1,2329	1,5332	
$s =$	8501	10721	13332	Mtr.,
also um	565	862	1570	„

kleiner, als nach der früheren Rechnung. —

Bei der Anlage eines Wehrs behufs der Concentration ei… möglichst grossen Theils des Gefälles einer gewissen Flu… strecke zum Betriebe hydraulischer Kraftmaschinen handelt … sich gewöhnlich um die Bestimmung der Höhe H, um welche an einer ge- wissen Stelle das Wasser höchstens aufgestaut werden darf, damit die da- durch bedingte Erhebung der Wasseroberfläche in der Entfernung s str… aufwärts von jener Stelle höchstens $= h$ sei. Diese Aufgabe ist dur… successive Näherung zu lösen. Nach Gl. (9) oder (9, a) ist

$$H < s\alpha + h$$

und zwar um so mehr kleiner, je kleiner h ist und je grösser voraus… lich H sich ergeben wird. Ein hiernach versuchsweise angenommener N… herungswerth von H ist dann zu gross oder zu klein, jenachdem der d… zu berechnende Werth von s grösser oder kleiner, als der gegebene, … funden wird. Wenn man sich zu dieser Rechnung und den etwa n… werdenden Wiederholungen derselben mit corrigirten Werthen von H … verbesserten Gleichung (9, a) bedient, so wird es doch wenigstens zul… sein, den mit einem ersten oder zweiten Näherungswerth von H n… Gl. (13) und (14) berechneten Coefficienten c endgültig auch bei we… Correctionsrechnungen beizubehalten.

§. 134. Verschiedene Specialfälle.

Bei den Untersuchungen in den zwei vorigen Paragraphen wurde speciell der Fall ins Auge gefasst, dass das Längenprofil des im ungleichförmigen Beharrungszustande fliessenden Wassers (als Staucurve im engeren Sinne) eine oberhalb des geradlinigen Längenprofils des gleichförmig fliessenden Wassers gelegene, nach oben schwach concav gekrümmte Curve bildet, deren Neigung gegen den Horizont $< \alpha$ ist. Ausser diesem technisch wichtigsten Specialfalle können indessen noch mehrere andere stattfinden, die sich ihrem allgemeinen Character nach am übersichtlichsten durch eine Discussion der unter den Voraussetzungen des vorigen §. entwickelten Gleichung der in Rede stehenden Curve erkennen lassen. Dabei mag, da die durch Gl. (9, a) im vorigen §. zum Ausdruck gebrachte Correction nur bei der Benutzung eines je nach den Umständen verschiedenen Stücks der fraglichen Curve von wesentlicher Bedeutung ist, hier es sich aber um die ganze Curve, um die Gesammtheit aller möglichen Fälle handelt, von der einfacheren Gl. (5) des vorigen §. ausgegangen werden, die darauf beruht, dass der Coefficient k constant = demjenigen Werth gesetzt wurde, welcher eigentlich nur dem gleichförmigen Beharrungszustande der in dem betreffenden cylindrischen Canal fliessenden betreffenden Wassermenge entspricht. Setzt man in dieser Gleichung, übrigens unter Beibehaltung der früheren Buchstabenbezeichnungen,

$$\frac{\alpha k^2}{g} = \frac{u_0^{\,2}}{g a} = \lambda^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$i = f(x)$, $I = f(X)$, und stellt man die ursprüngliche Richtung der Abscissenaxe (Axe der s, positiv stromabwärts) wieder her, setzt also $z = S - s$, unter S die Abscisse des Punktes verstanden, dessen Ordinate $h = H$ ist, so kann die Gleichung in der Form geschrieben werden:

$$\frac{\alpha}{a}(s - S) = x - X - (1 - \lambda^3)[f(x) - f(X)]$$

oder auch, wenn hier mit h die mittlere Wassertiefe, also die Höhe des Wasserquerprofils über der Ebene bezeichnet wird, welche der freien Oberfläche des im gleichförmigen Beharrungszustande fliessenden Wassers im Abstande a darunter parallel ist und die Grundebene genannt werden mag (bei einem Canal mit verticalen Seitenwänden und ebenem Boden mit letzterem zusammenfallend), wenn somit $h = ax$, $H = aX$ gesetzt und die s-Axe in einer Neigungslinie der Grundebene liegend angenommen wird:

$$a(s - S) = h - H - a(1 - \lambda^3)[f(x) - f(X)].$$

S und H können nun als Coordinaten irgend eines bestimmten, übrigens willkürlich zu wählenden Punktes der Curve betrachtet werden; wird insbesondere $H = 0$ gesetzt und der Ursprung der Coordinaten in diesen Punkt verlegt, so dass auch $S = 0$ ist, so ergiebt sich als Gleichung der Curve wegen

$$f(0) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc cotg } \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg } \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$as = h - (1 - \lambda^3)[f(x) + \mu]a \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

mit $\mu = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0{,}6046.$

Daraus folgt mit Rücksicht auf

$$f(x) = -\int \frac{dx}{x^3 - 1}; \quad \frac{df(x)}{dh} = \frac{df(x)}{dx}\frac{dx}{dh} = \frac{1}{1 - x^3}\frac{1}{a}$$

$$a\frac{ds}{dh} = 1 - \frac{1 - \lambda^3}{1 - x^3}; \quad \frac{ds}{dh} = \frac{1}{a}\frac{\lambda^3 - x^3}{1 - x^3} \ldots\ldots\ldots$$

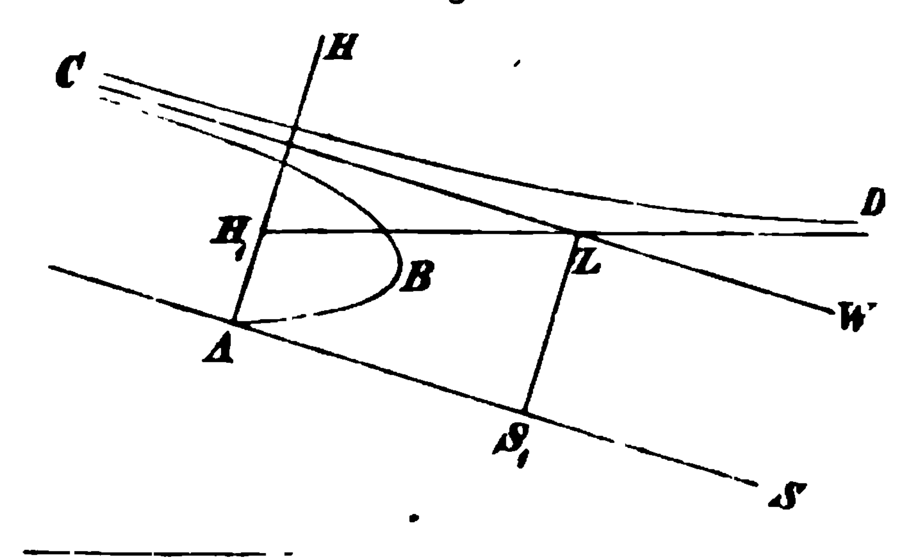
$$\frac{d^2s}{dh^2} = \frac{1}{a}\frac{-3(1 - \lambda^3)x^2}{(1 - x^3)^2}\frac{1}{a} = -3\frac{1 - \lambda^3}{aa}\left(\frac{x}{1 - x^3}\right)^2 \ldots 4$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem λ kleiner oder grösser als 1 ist.

1) Im Falle: $\lambda < 1$, $u_0 < \sqrt{ga}$, $a < \frac{g}{k^2}$

ist $\frac{d^2s}{dh^2}$ beständig negativ, die Curve also überall concav stromaufwärts gekrümmt: Fig. 54*). Im Punkte A ($x = 0$) beginnt die Curve mit der Neigung $\frac{dh}{ds} = \frac{a}{\lambda^3}$ gegen die s-Axe und mit unendlich schwacher Krümmung wegen $\frac{d^2s}{dh^2} = \ldots$ bei wachsendem x bleibt zun...

Fig. 54.



*) Diese Figur, Bresse's Mécanique appliquée entnommen, ist für λ ... also $u_0 = 0{,}5477\sqrt{ga}$ gezeichnet, indem dabei für die Längen s der Massstab 200 mal so klein genommen wurde, wie für die Höhen h, so dass auch ... alle Neigungswinkel der Curve gegen die Horizontale und gegen die s-Axe entsprechend zu gross erscheinen.

$\frac{dh}{ds}$ positiv bis im Punkte B für $x = \lambda$, $h = \lambda a$, jener Differentialquotient unendlich, die Curve rechtwinkelig gegen die s-Axe gerichtet wird und nun im Sinne der negativen s-Axe zu verlaufen anfängt, indem $\frac{dh}{ds}$ negativ wird für $x > \lambda$. Bemerkenswerth ist, dass die Umkehrung bei B mit einem gegen a sehr kleinen Krümmungshalbmesser ϱ stattfindet; indem nämlich für $x = \lambda$

$$\frac{ds}{dh} = 0; \quad \frac{d^2s}{dh^2} = -\frac{3}{a\alpha}\,\frac{\lambda^2}{1-\lambda^3}$$

ist, ergiebt sich der Absolutwerth

$$\varrho = \pm \frac{\left(1 + \frac{ds^2}{dh^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2s}{dh^2}} = \frac{\alpha}{3}\,\frac{1-\lambda^3}{\lambda^2}\,a$$

oder mit $\frac{ak^2}{g} = \lambda^3$ (Gl. 1): $\varrho = \frac{g}{3k^2}\,\lambda(1-\lambda^3)\,a$

höchstens $= 0{,}1575\,\frac{ga}{k^2} = \frac{1{,}545}{k^2}\,a$ für $\lambda^3 = \frac{1}{4}$,

insbesondere z. B. $\varrho = 0{,}000618\,a$ mit dem Mittelwerth $k = 50$.

Für $x = 1$, $h = a$, wird $\frac{dh}{ds} = 0$ und $s = -\infty$ wegen $f(1) = \infty$.

Die Curve nähert sich asymptotisch dem geradlinigen Längenprofil CW des im gleichförmigen Beharrungszustande fliessenden Wassers.

Für $x > 1$ wird $\frac{dh}{ds}$ wieder positiv und wächst bis $\frac{dh}{ds} = \alpha$ für $x = \infty$.

Der entsprechende Curvenzweig CD geht asymptotisch von der Geraden CW aus und nähert sich, je mehr $f(x)$ in die Grenze $f(\infty) = 0$ übergeht, mehr und mehr nach Gl. (2) der horizontalen Geraden

$$\alpha s = h - (1-\lambda^3)\,\mu a$$

als zweiter Asymptote. Letztere schneidet die Axe AH im Punkte H_1, oberhalb A, für welchen

$$AH_1 = (1-\lambda^3)\,\mu a$$

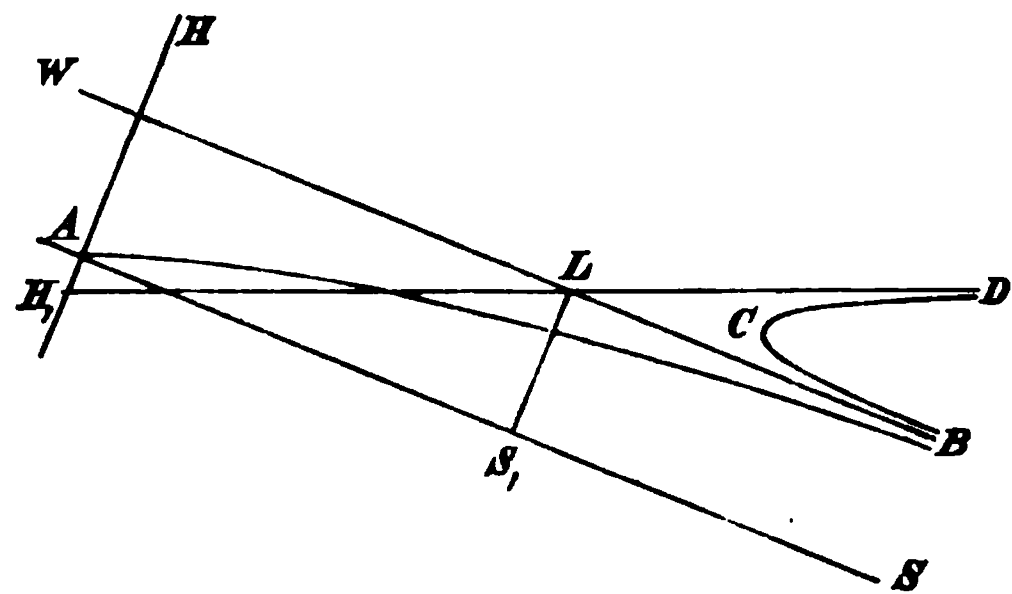
ist, und die Gerade CW im Punkte L mit der Abscisse

$$AS_1 = \frac{1-(1-\lambda^3)\,\mu}{\alpha}\,a.$$

2) Im Falle: $\lambda > 1$, $u_0 > \sqrt{ga}$, $a > \frac{g}{k^2}$

ist $\frac{d^2s}{dh^2}$ beständig positiv, die Curve also überall concav stromabwärts gekrümmt: Fig. 55*). Im Punkte A ($x = 0$) beginnt die Curve wieder mit der Neigung $\frac{dh}{ds} = \frac{a}{\lambda^3}$ gegen die s-Axe und mit unendlich schwacher Krümmung.

Fig. 55.



Bei wachsendem x bleibt $\frac{dh}{ds}$ positiv bis $x = 1$, $h = a$; indem dann $\frac{dh}{ds} = 0$ wird und gleichzeitig $s = \infty$, nähert sich der Curvenzweig AB asymptotisch dem geradlinigen Längenprofil WB des gleichförmig fliessenden Wassers.

Wenn x über 1 hinaus wächst, wird $\frac{dh}{ds}$ negativ; die Curve geht von der Geraden WB im entgegengesetzten Sinne asymptotisch aus und nähert sich mehr und mehr der zur s-Axe senkrechten Richtung $\left(\frac{dh}{ds} = \infty\right)$, welche im Scheitelpunkte C für $x = \lambda$ erreicht wird. Der Krümmungsradius an dieser Stelle ergiebt sich analog dem Obigen absolut genommen

$$\varrho = \frac{g}{3k^2}\,\lambda(\lambda^3 - 1)\,a.$$

Er kann zwar wesentlich grösser sein, als im Scheitelpunkte B Fig. 54, ist indessen meistens auch hier ein nur kleiner Theil von a; z. B.

für	$\lambda^3 =$	4	9
	$\frac{u_0}{\sqrt{ga}} =$	2	3
ist	$\frac{\varrho}{a} =$	$\frac{15,57}{k^2}$	$\frac{54,42}{k^2}$
	$=$	0,0062	0,0218 mit $k = 50$.

*) Gezeichnet nach Bresse, mécanique appliquée, mit $\lambda^3 = 2$, indem jedoch bei unter entsprechender Vergrösserung von a der Maassstab für die Längen im Verhältnisse 1 : 100 kleiner genommen wurde wie für die Höhen h.

Für $x > \lambda$ wird $\frac{dh}{ds}$ wieder positiv und nähert sich abnehmend der Grenze α für $x = \infty$. Die Gleichung der Curve geht mehr und mehr in

$$\alpha s = h + (\lambda^3 - 1)\,\mu a$$

über, d. i. die Gleichung einer horizontalen Geraden, welcher sich der Curvenzweig CD asymptotisch nähert. Diese Asymptote schneidet die Axe AH in der Entfernung

$$AH_1 = (\lambda^3 - 1)\,\mu a$$

unterhalb von A, und die Gerade WB im Punkte L mit der Abscisse

$$AS_1 = \frac{1 + (\lambda^3 - 1)\,\mu}{\alpha}\,a.$$

Endlich ist zu bemerken, dass auf der Grenze zwischen beiden besprochenen Fällen, d. h. für

$$\lambda = 1,\ u_0 = \sqrt{ga},\ \alpha = \frac{g}{k^2}$$

die Curve in die durch A gehende horizontale Gerade: $h = \alpha s$ übergeht, welche in der That die Curven der Figuren 54 und 55 vollständig trennt, so dass die erste ganz darüber, die zweite ganz darunter liegt. Der Verlust an lebendiger Kraft des Wassers wird in diesem Falle für jedes Längenelement des Canals gerade verbraucht durch die Arbeit des Bewegungswiderstandes. —

Alle drei Zweige AB, CB, CD der Curven, Fig. 54 und 55, können von thatsächlicher Bedeutung sein für verschiedene Aufgaben, welche die ungleichförmige permanente Bewegung des Wassers in einem Canal betreffen, insoweit wenigstens jene Curven unter nur kleinen Winkeln gegen die s-Axe geneigt sind, was aber im Falle $\lambda < 1$ (Fig. 54) wegen der sehr scharfen Krümmung bei B mit Ausschluss eines nur sehr kleinen Curvenstücks an dieser Stelle in der That der Fall ist, ebenso auch für $\lambda > 1$ (Fig. 55) mit Ausschluss eines nur kleinen Curvenstücks bei C, sofern nicht etwa λ ungewöhnlich gross ist.

Es handle sich z. B. um den Beharrungszustand des Wassers in einem Canal, dem dasselbe am oberen Ende aus einer Oeffnung in der Seitenwand eines Wasserbehälters stetig zufliesst, während es am anderen Ende entweder frei oder mehr oder weniger durch ein Hinderniss gehemmt und dadurch entsprechend aufgestaut abfliesst. Der cylindrische Canal entspreche den Voraussetzungen, auf denen die obigen Gleichungen (1) bis (4) beruhen, d. h. es

sei überall die Wasserbreite hinlänglich gross im Vergleich mit der mittleren Tiefe, um ohne erheblichen Fehler $p = b$ setzen, ferner innerhalb der Grenzen, zwischen denen das Querprofil des Wassers variabel ist, das Canalquerprofil hinlänglich wenig gegen die Lothrechte geneigt, um auch b als constant voraussetzen zu dürfen. Der Umfang der Oeffnung, durch welche das Wasser in den Canal sich ergiesst, bilde oben eine horizontale Gerade und falle im Uebrigen mit dem Querprofil des Canals zusammen; nach dem Durchfluss durch diese Oeffnung kann das Wasser zunächst eine Contraction erfahren, und wenn $F_1 = bh_1$ der kleinste Querschnitt, u_1 die mittlere Geschwindigkeit in demselben ist, so sind durch $Q = F_1 u_1$ und α auch a and u_0 bestimmt: siehe §. 127, Aufgabe 5).

Ist nun $\lambda < 1$ und $h_1 < \lambda a$, so fliesst das Wasser zunächst mit stetig wachsender Tiefe h im Canal weiter, indem sein Längenprofil, entsprechend dem Curvenzweige AB in Fig. 54, eine nach oben concav gekrümmte Curve bildet bis h fast $= \lambda a$ geworden ist; dann entsteht ein Wassersprung, indem das Längenprofil sich plötzlich bis zu der dem gleichförmigen Beharrungszustande entsprechenden Geraden CW erhebt. Ist $\lambda a < h_1 < a$, so entsteht dieser Sprung sogleich nach dem Eintritt des Wassers in den Canal, die Oberfläche CW desselben tritt zurück bis zur Wand des Behälters oberhalb der Mündung, und geht der Ausfluss aus dieser in einen sogenannten Ausfluss unter Wasser über. Ist andererseits $\lambda > 1$, so fliesst das Wasser, wenn $h_1 < a$ ist, mit stetig wachsender, wenn aber $a < h_1 < \lambda a$ ist, mit stetig abnehmender Tiefe im Canal weiter, indem das Längenprofil, asymptotisch der Geraden WB sich nähernd, im ersten Falle eine nach oben convexe, im zweiten eine nach oben concave Curve bildet, entsprechend den Zweigen AB resp. CB in Fig. 55. — Wenn das Wasser nicht durch eine ringsumschlossene Mündung, sondern durch einen oben offenen und unten bis zum Canalboden sich erstreckenden Wassereinschnitt in den Canal einflösse aus einem Behälter, in welchem die Höhe der horizontalen freien Wasseroberfläche über der Grundebene des Canals an dessen oberem Ende $> a$ ist, so würde das Wasser in dem Wandeinschnitt einen Ueberfall bilden, indem seine freie Oberfläche im Falle $\lambda < 1$ bis zur Geraden CW, Fig. 54, im Falle $\lambda > 1$ bis zum Curvenzweige CB Fig. 55, abfiele und dann das Wasser im ersten Falle mit gleichförmiger Tiefe a, im zweiten Falle mit allmählig bis a abnehmender Tiefe im Canal weiter flösse.

Wenn nach eingetretenem gleichförmigen Beharrungszustande das Wasser am Ende des Canals (Gerinnes) frei abfliesst, nach dem Abflusse einen parabolisch niederfallenden Strahl bildend, so findet im Falle $\lambda < 1$

schon vorher eine stetige Abnahme der Wassertiefe im Canal statt gemäss dem Curvenzweige *CB*, Fig. 54, während im Falle $\lambda > 1$ das Wasser bis zum Ende des Canals mit derselben Tiefe a gleichförmig fortfliesst, d. h. mit dem geradlinigen Längenprofil *WB*, Fig. 55. Ebenso verhält es sich, wenn der Canal das Wasser in einen unteren Behälter abfliessen lässt, dessen freie Wasseroberfläche die Querschnittsebene am Ende des Canals in einer gewissen Höhe über der Grundebene, die jedoch $< a$ ist, schneidet; nur dass, je mehr diese Höhe der Grenze a sich nähert, desto mehr im Falle $\lambda < 1$ die Abnahme der Wassertiefe gemäss der Curve *CB*, Fig. 54, verschwindet, d. h. das im Längenprofil des Wassers realisirte Stück dieses Curvenzweiges sich weniger weit gegen *B* hin erstreckt. — Hat der Canal eine nur mässige Länge, so kann es der Fall sein, dass ein gleichförmiger Beharrungszustand selbst nicht angenähert eintritt, dass vielmehr im Falle $\lambda < 1$, $h_1 < \lambda a$ das aufwärts concave Längenprofil *AB*, Fig. 54, in die aufwärts convexe Krümmung des Wasserabsturzes am Ende des Canals übergeht bevor der Sprung von *B* bis *CW* sich ausbilden konnte, oder dass im Falle $\lambda > 1$ selbst am Ende des Canals die Wassertiefe noch merklich $< a$ oder $> a$ ist, einem Punkte des Curvenzweiges *AB* oder *CB*, Fig. 55, entsprechend jenachdem $h_1 < a$ oder $> a$ war.

Wenn aber der Abfluss des Wassers aus dem Canal ein solches Hinderniss findet, wodurch es aufgestaut wird, indem z. B. der Canal am Ende durch eine Wand gesperrt ist, über deren oberen Rand das Wasser hinweg fliessen muss, oder indem er in einen Behälter mündet, dessen freie Wasseroberfläche die Querschnittsebene am Ende des Canals in einer Höhe $> a$ über der Grundebene schneidet, so bildet gegen dieses Ende hin das Längenprofil des Wassers im Falle $\lambda < 1$ eine nach oben concave Curve (die in den vorigen Paragraphen näher besprochene gewöhnliche Staucurve) gemäss dem Zweige *CD*, Fig. 54, dagegen im Falle $\lambda > 1$ eine nach oben convexe Curve: *CD*, Fig. 55; weil aber im letzteren Falle die Gerade *WC* nicht stetig in die Curve *CD* übergeht, so findet bei *C* eine sprungweise Erhebung der Wasseroberfläche statt. Die Staucurve wird im Sinne *CD* zwar mehr und mehr, im Canal selbst jedoch nie vollständig horizontal; wenn also der Canal in einen grossen Behälter mündet, in dem das Wasser mit horizontaler Oberfläche in Ruhe ist, so erfolgt der Uebergang der Oberfläche des im Canal fliessenden Wassers in jene Horizontalebene mit einer sehr schnellen, wenn auch sehr kleinen Richtungsänderung, entsprechend einem sehr schnellen Verlust an lebendiger Kraft des in den Behälter einfliessenden Wassers durch wirbelförmige Bewegungen. — Wenn endlich der Einfluss des Wassers in einen Canal von mässiger Länge,

während $h_1 < \lambda a$ im Falle $\lambda < 1$ oder $h_1 < a$ im Falle $\lambda > 1$ ist, verbunden wäre mit behindertem Abfluss und entsprechendem Aufstau am Ende, so würde das Längenprofil sich an einer gewissen Stelle vom Curvenzweige AB sofort bis zum Curvenzweige CD sprungweise erheben.

Beispiel. — In einen Canal mit ebenem Boden und verticalen Seitenwänden fliesse das Wasser durch eine Poncelet'sche Mündung (Fig. 35, S. 462);

H sei die Höhe des Oberwasserspiegels über dem Mittelpunkte der Mündung,

h_0 die Höhe der letzteren (viel kleiner, als die Breite),

h_1 die Höhe (Tiefe) des von oben contrahirten Wasserstroms nahe ausserhalb der Mündung,

u_1 die mittlere Geschwindigkeit in diesem contrahirten Querschnitt,

μ der Ausfluss-, φ der Geschwindigkeits-, also $\frac{\mu}{\varphi}$ der Contractionscoefficient.

Dann ist
$$h_1 = \frac{\mu}{\varphi} h_0, \quad u_1 = \varphi \sqrt{2gH}$$

und die mittlere Geschwindigkeit des gleichförmigen Beharrungszustandes

$$u_0 = \frac{h_1 u_1}{a}, \text{ also } k\sqrt{aa} = \mu \frac{h_0}{a} \sqrt{2gH}$$

$$ka\sqrt{a} = \mu h_0 \sqrt{\frac{2gH}{a}}$$

oder mit $k = \dfrac{A}{1 + \dfrac{B}{\sqrt{a}}}$ (§. 126, Gl. 14)

$$\frac{a^2}{B + \sqrt{a}} = \frac{\mu h_0}{A} \sqrt{\frac{2gH}{a}}.$$

Ist nun z. B. $a = 0{,}05$ und nach §. 85, entsprechend einer Neigung der Schütze von ca. 30^0 gegen die Lothrechte,

$$\mu = 0{,}75, \quad \frac{\mu}{\varphi} = 0{,}8 \text{ also } \varphi = 0{,}9375,$$

ferner nach §. 126 für den Rauhigkeitscoefficienten $n = 0{,}013$

$$A = 100, \quad B = 0{,}3$$

und endlich $h_0 = 0{,}2H$, so ergiebt sich mit $g = 9{,}81$:

$$h_1 = 0{,}16H, \quad u_1 = 4{,}153\sqrt{H}$$

$$u_0 = \frac{h_1 u_1}{a} = 0{,}6645\,\frac{H\sqrt{H}}{a}$$

und zur Bestimmung von a:

$$\frac{a^2}{0{,}3 + \sqrt{a}} = 0{,}02972\,H\sqrt{H}.$$

Hiernach findet man z. B.

für $H =$	0,75	1	1,25	1,5
$h_0 =$	0,15	0,20	0,25	0,30
$h_1 =$	0,12	0,16	0,20	0,24
$u_1 =$	3,596	4,153	4,643	5,086
$a =$	0,110	0,142	0,172	0,202
$u_0 =$	3,924	4,680	5,399	6,043
$\lambda^3 = \frac{u_0^2}{ga} =$	14,27	15,72	17,28	18,43
$\lambda =$	2,425	2,505	2,585	2,642.

In allen Fällen ist hier $a < h_1 < \lambda a$, und fliesst also das Wasser mit abnehmender Tiefe, asymptotisch der Grenze a sich nähernd, in dem Canale weiter mit einem Längenprofil, welches dem Curvenzweige CB, Fig. 55, angehört.

Die Annahmen dieser Beispiele sind den Verhältnissen angepasst, wie sie bei der Zuleitung des Wassers zu einem Poncelet'schen Rade vorkommen. Dabei pflegt indessen die Länge dieses Zuleitungsgerinnes von der Schütze bis zum Rade so gering zu sein, dass die Wassertiefe nur höchstens wenige Millimeter $< h_1$ werden, und deshalb mit Rücksicht auf die nicht sehr grosse Zuverlässigkeit des hier $= 0{,}8$ angenommenen Contractionscoefficienten unbedenklich auch noch an der Eintrittsstelle des Wassers in das Rad seine Strahldicke $= h_1$ und seine Geschwindigkeit $= u_1$ gesetzt werden kann. Um nämlich die Länge $= s - s_1$ der Canalstrecke zu berechnen, für welche die Wassertiefe von h_1 bis h abnimmt, hat man nach Gl. (2)

$$\alpha(s - s_1) = h - h_1 + (\lambda^3 - 1)[f(x) - f(x_1)]\,a$$

mit $x = \frac{h}{a}$ und $x_1 = \frac{h_1}{a}$. So findet man in obigen Fällen für $h_1 - h = 0{,}002$ Mtr., also

h	=	0,118	0,158	0,198	0,238
$\frac{1}{x}$	=	0,9322	0,8987	0,8687	0,8487
$\frac{1}{x_1}$	=	0,9167	0,8875	0,8600	0,8417
$f(x)$	=	0,7782	0,6447	0,5586	0,5118
$f(x_1)$	=	0,7097	0,6099	0,5374	0,4968
$s - s_1$	=	1,96	1,41	1,15	1,02 Mtr.

Die Werthe von $f(x)$ und $f(x_1)$ konnten hier der Tabelle im vorigen §. durch Interpolation entnommen werden. Bei anderen Aufgaben, entsprechend den Curvenzweigen AB, CB, Fig. 54 oder AB, Fig. 55 können indessen auch die Werthe von $f(x)$ für $x < 1$ gebraucht werden, welche gleichfalls von Bresse (mécanique appliquée) tabellarisch berechnet, nachstehend mitgetheilt sind.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,00	— 0,6046	0,44	— 0,1547	0,790	0,3258	0,944	[illegible]
0,01	— 0,5946	0,45	— 0,1438	0,795	0,3357	0,946	0,8354
0,02	— 0,5846	0,46	— 0,1327	0,800	0,3459	0,948	0,8487
0,03	— 0,5746	0,47	— 0,1216	0,805	0,3562	0,950	0,8624
0,04	— 0,5646	0,48	— 0,1104	0,810	0,3668	0,952	0,8767
0,05	— 0,5546	0,49	— 0,0991	0,815	0,3776	0,954	0,8916
0,06	— 0,5446	0,50	— 0,0878	0,820	0,3886	0,956	0,9071
0,07	— 0,5346	0,51	— 0,0763	0,825	0,3998	0,958	[illegible]
0,08	— 0,5246	0,52	— 0,0647	0,830	0,4114	0,960	0,9402
0,09	— 0,5146	0,53	— 0,0530	0,835	0,4232	0,962	[illegible]
0,10	— 0,5046	0,54	— 0,0412	0,840	0,4353	0,964	0,9767
0,11	— 0,4946	0,55	— 0,0293	0,845	0,4478	0,966	[illegible]
0,12	— 0,4845	0,56	— 0,0172	0,850	0,4605	0,968	[illegible]
0,13	— 0,4745	0,57	— 0,0050	0,855	0,4737	0,970	[illegible]
0,14	— 0,4645	0,58	+ 0,0074	0,860	0,4872	0,971	1,0512
0,15	— 0,4545	0,59	+ 0,0199	0,865	0,5012	0,972	[illegible]
0,16	— 0,4444	0,60	+ 0,0325	0,870	0,5156	0,973	[illegible]
0,17	— 0,4344	0,61	+ 0,0454	0,875	0,5305	0,974	[illegible]
0,18	— 0,4243	0,62	+ 0,0584	0,880	0,5459	0,975	[illegible]
0,19	— 0,4143	0,63	+ 0,0716	0,885	0,5619	0,976	[illegible]
0,20	— 0,4042	0,64	+ 0,0851	0,890	0,5785	0,977	[illegible]
0,21	— 0,3941	0,65	+ 0,0987	0,895	0,5958	0,978	1,1457
0,22	— 0,3840	0,66	+ 0,1127	0,900	0,6138	0,979	1,1615
0,23	— 0,3739	0,67	+ 0,1268	0,902	0,6213	0,980	1,1781

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,24	— 0,3638	0,68	+ 0,1413	0,904	0,6289	0,981	1,1955
0,25	— 0,3536	0,69	+ 0,1560	0,906	0,6366	0,982	1,2139
0,26	— 0,3434	0,70	+ 0,1711	0,908	0,6445	0,983	1,2333
0,27	— 0,3333	0,705	+ 0,1787	0,910	0,6525	0,984	1,2538
0,28	— 0,3230	0,710	+ 0,1864	0,912	0,6607	0,985	1,2757
0,29	— 0,3128	0,715	+ 0,1943	0,914	0,6691	0,986	1,2990
0,30	— 0,3025	0,720	+ 0,2022	0,916	0,6776	0,987	1,3241
0,31	— 0,2923	0,725	+ 0,2102	0,918	0,6864	0,988	1,3511
0,32	— 0,2819	0,730	+ 0,2184	0,920	0,6953	0,989	1,3804
0,33	— 0,2716	0,735	+ 0,2266	0,922	0,7045	0,990	1,4125
0,34	— 0,2612	0,740	+ 0,2350	0,924	0,7138	0,991	1,4480
0,35	— 0,2508	0,745	+ 0,2434	0,926	0,7234	0,992	1,4876
0,36	— 0,2403	0,750	+ 0,2520	0,928	0,7332	0,993	1,5324
0,37	— 0,2298	0,755	+ 0,2607	0,930	0,7433	0,994	1,5841
0,38	— 0,2192	0,760	+ 0,2696	0,932	0,7537	0,995	1,6452
0,39	— 0,2086	0,765	+ 0,2785	0,934	0,7643	0,996	1,7200
0,40	— 0,1980	0,770	+ 0,2877	0,936	0,7753	0,997	1,8162
0,41	— 0,1872	0,775	+ 0,2970	0,938	0,7866	0,998	1,9517
0,42	— 0,1765	0,780	+ 0,3064	0,940	0,7982	0,999	2,1831
0,43	— 0,1656	0,785	+ 0,3160	0,942	0,8102	1,000	∞

Wenn die obwaltenden Verhältnisse von den bei der Ableitung von Gl. (2) vorausgesetzten in höherem Grade abweichen, wenn insbesondere die Wassertiefe nicht viel kleiner, als die Canalbreite ist, so ändern sich zwar die Curven, Fig. 54 und 55, mehr oder weniger, ohne jedoch ihren allgemeinen Charakter zu verlieren. In solchen Fällen muss auf die allgemeinere Differentialgleichung (3) des vorigen §. zurückgegangen werden, oder noch besser, wenn zugleich auf die Veränderlichkeit des Coefficienten k Rücksicht genommen werden soll, auf die Gl. (3, a):

$$\frac{ds}{dh} = \frac{1}{\alpha} \frac{\left(\frac{F}{F_0}\right)^3 - \frac{\alpha k_0^{\,2}}{g} \frac{b}{p_0}}{\left(\frac{F}{F_0}\right)^3 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 \frac{p}{p_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Um aber hier zu praktisch brauchbaren Ausdrücken zu gelangen, muss man darauf verzichten, die ganze Curve durch eine einheitliche Gleichung auszudrücken, vielmehr sich darauf beschränken, für das jeweils in Betracht kommende Stück derselben einen angenäherten Ausdruck zu gewinnen. Handelt es sich z. B. um einen Canal von constanter Breite b mit ebenem Boden und verticalen Seitenwänden, so ist

$$\frac{F}{F_0} = \frac{h}{a}, \; p = b + 2h, \; p_0 = b + 2a$$

und kann für k nach Gl. (11) im vorigen §. der Mittelwerth

$$k = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n} + 23 + \frac{0{,}00155}{\alpha} x_1^3}{\frac{1}{n} + \left(23 + \frac{0{,}00155}{\alpha} x_1^3\right)\sqrt{\frac{b + 2h_1}{bh_1}}} \; \ldots \ldots (6$$

($k_0 = k$ für $x_1 = 1$, $h_1 = a$) gesetzt werden mit $x_1 = \frac{h_1}{a}$, unter h_1 einen Mittelwerth der variablen Wassertiefe für die in Betracht gezogene Canalstrecke verstanden. Mit den Bezeichnungen

$$\frac{h}{a} = x, \; 2\frac{a}{b} = \delta, \text{ also } p = b(1 + \delta x), \; p_0 = b(1 + \delta),$$

$$\text{ferner mit } \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 = c^3, \; \frac{\alpha k_0^2}{g} = \lambda^3 \; \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7$$

erhält dann obige Differentialgleichung die Form

$$\frac{ds}{dx} = \frac{a}{\alpha} \frac{x^3 - \lambda^3 \frac{1}{1+\delta}}{x^3 - c^3 \frac{1+\delta x}{1+\delta}} = \frac{a}{\alpha} \frac{x^3 - \lambda_1^3}{x^3 - c_1^3(1+\delta x)}$$

$$= \frac{a}{\alpha}\left[1 + \frac{c_1^3 - \lambda_1^3 + c_1^3\delta x}{x^3 - c_1^3 - c_1^3\delta x}\right]$$

$$\text{mit } c_1^3 = \frac{c^3}{1+\delta}, \; \lambda_1^3 = \frac{\lambda^3}{1+\delta} \; \ldots \ldots \ldots \ldots (8$$

Das Integral dieser Gleichung lässt sich nun zwar als ein geschlossener dreigliedriger Ausdruck vermittels der drei Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - c_1^3 - c_1^3\delta x = 0$$

darstellen; wesentlich einfacher wird aber die Lösung auf die schon tabellarisch bekannte Function $f(x)$ zurückgeführt, indem, unter x_1 den bereits vorhin benutzten Mittelwerth von x verstanden (vorausgesetzt, dass die Werthe x für die betrachtete Canalstrecke nur mässig variabel ist),

$$\frac{c_1^3 - \lambda_1^3 + c_1^3\delta x}{x^3 - c_1^3 - c_1^3\delta x} = \frac{c_1^3 - \lambda_1^3}{x^3 - c_1^3} \Delta,$$

$$\Delta = \frac{1 + \frac{c_1^3\delta x_1}{c_1^3 - \lambda_1^3}}{1 - \frac{c_1^3\delta x_1}{x_1^3 - c_1^3}} \; \ldots \ldots \ldots \ldots (9$$

gesetzt wird. Auf solche Weise erhält man wegen

$$-\int \frac{dx}{x^3 - c_1^{\,3}} = -\frac{1}{c_1^{\,2}} \int \frac{dx'}{x'^3 - 1} = \frac{1}{c_1^{\,2}} f(x') \text{ mit } x' = \frac{x}{c_1} = \frac{h}{ac_1}$$

$$as = h - \frac{\Delta}{c_1^{\,2}} (c_1^{\,3} - \lambda_1^{\,3})\, a\, f(x') + Const. \ldots\ldots (10).$$

§. 135. Der Wassersprung.

Diese in den vorigen Paragraphen bereits erwähnte Erscheinung, bestehend in der plötzlichen Zunahme der Wassertiefe h (verstanden wie im vorigen §. als Höhe über der Grundebene) an einer gewissen Stelle des Canals, wurde zuerst von Bidone*) beobachtet, als er u. A. in einem gemauerten Canal mit unter $\alpha = 0{,}023$ geneigtem ebenen Boden und um $b = 0{,}325$ Mtr. von einander entfernten verticalen ebenen Seitenwänden eine gewisse Wassermenge $Q = 0{,}0351$ Cubikm. pro Sec. zuerst in gleichförmigem Beharrungszustande, der Tiefe $a = 0{,}064$ Mtr. entsprechend, abfliessen liess, dann aber durch ein Wehr am Ende des Canals das Wasser bis zur Tiefe $H = 0{,}28$ Mtr. (in 1 Mtr. Entfernung stromaufwärts vom Wehr gemessen) aufstaute: bis zu 4,5 Mtr. Enfernung vor dem Wehr blieb dann die Wassertiefe nach wie vor $= a$, wuchs an dieser Stelle plötzlich um 0,125 Mtr. und dann stetig weiter bis H in abnehmendem Grade, entsprechend einer aufwärts schwach convexen Krümmung der Wasseroberfläche.

Dieser Wassersprung war also offenbar derjenige, welcher in dem plötzlichen Uebergange des Längenprofils aus der Geraden WB, Fig. 55, in den Curvenzweig CD besteht. Dass er stattfinden musste, ergiebt sich daraus, dass für einen Werth von h, welcher $> a$ und $< H$ ist, $\frac{dh}{dx} = \infty$ wird. Nach der allgemeinen Differentialgleichung (6), §. 132 für den Beharrungszustand des in einem cylindrischen Canale strömenden Wassers ist dies in der That der Fall, wenn

$$\frac{b}{F}\frac{u^2}{g} = 1, \text{ also } \frac{F^3}{b} = \frac{Q^2}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

insbesondere für $b = Const.$, somit $F = bh$, wenn

*) Mémoires de l'Académie de Turin, 1820.

$$h = \sqrt[3]{\frac{1}{g}\left(\frac{Q}{b}\right)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

ist, bei dem Bidone'schen Versuche für $h = 0{,}106$ Mtr. —

Zur Berechnung der Sprunghöhe mag zunächst mit Bresse*) das Princip des Antriebs oder der Bewegungsgrössen benutzt werden, nach welchem, wenn F_1 und F die Querschnitte des Wasserstroms unmittelbar vor und hinter der Sprungstelle bedeuten, der Zuwachs an Bewegungsgrösse der zwischen F_1 und F in irgend einem Augenblicke enthaltenen Wassermasse im Sinne der Strömung (d. h. im Sinne der erzeugenden Geraden des cylindrischen Canals) während des folgenden Zeitelements gleich ist dem Antriebe, d. h. der mit dt multiplicirten Summe aller auf jene Wassermasse im Sinne der Strömung wirkenden äusseren Kräfte. Wegen des Beharrungszustandes ist jener Zuwachs an Bewegungsgrösse = dem Ueberschusse der Bewegungsgrösse des durch F über dieselbe des durch F_1 während dt fliessenden Wassers. Ist nun w die Geschwindigkeit in einem Elemente dF von F, also die durch dieses Element während dt fliessende Wassermasse $= \frac{\gamma}{g}\, dF.\, w\, dt$, ihre Bewegungsgrösse $= \frac{\gamma}{g}\, dF.\, w^2 dt$, so ist letztere für das durch die ganze Fläche F während dt fliessende Wasser:

$$\frac{\gamma}{g}\, dt \int w^2 dF = \frac{\gamma}{g}\, \mu F u^2 dt,$$

unter μ einen Coefficienten verstanden, der vom Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten w im Querschnitte abhängt und jedenfalls > 1 ist. Setzt man nämlich $w = u + v$, unter v eine positive oder negative Grösse verstanden, so ist dem Begriffe der mittleren Geschwindigkeit u gemäss

$$\int w\, dF = Fu + \int v\, dF = Fu, \text{ also } \int v\, dF = 0,$$

$$\int w^2 dF = Fu^2 + 2u\int v\, dF + \int v^2 dF = Fu^2 + \int v^2 dF$$

$$\text{d. h. } \int w^2 dF > Fu^2.$$

Für den Querschnitt F_1 mag zwar der entsprechende Coefficient $= \mu_1$ etwas von μ verschieden sein; wenn aber von dieser Verschiedenheit abgesehen wird, so kann nun die Abnahme an Bewegungsgrösse der zwischen

*) Mécanique appliquée, t. II, p. 245, im Anschlusse an eine von Belanger im Jahre 1838 aufgestellte Theorie.

F_1 und F momentan enthaltenen Wassermasse im Sinne der Strömung für das Zeitelement dt

$$= \frac{\gamma}{g} \mu (F_1 u_1^2 - F u^2) dt$$

gesetzt werden, unter u_1 die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitte F_1 verstanden.

Was die äusseren Kräfte betrifft, so sind die Componente der Schwere im Sinne der Strömung und die Reibung an der Canalwand, welche sich ausserdem theilweise gegenseitig aufheben, hier schon wegen der Kürze der Canalstrecke von F_1 bis F von untergeordneter Bedeutung, so dass, da auch der resultirende Atmosphärendruck auf die ganze Oberfläche nach jeder Richtung = Null ist, als resultirende äussere Kraft entgegengesetzt dem Sinne der Strömung hier nur der Ueberschuss des hydraulischen Ueberdrucks in F über denselben in F_1 in Betracht kommt. Dürfte man annehmen, dass die Bahnen der Wassertheilchen, die zwischen F_1 und F mehr oder weniger gekrümmt sein müssen, in F_1 noch und in F schon wieder ganz gerade sind, so wäre der hydraulische Ueberdruck in F und F_1 gleich dem hydrostatischen $= \gamma F f$ resp. $= \gamma F_1 f_1$, also der Ueberschuss des ersten über den zweiten $= \gamma (Ff - F_1 f_1)$, wenn f und f_1 die Tiefen der Schwerpunkte von F und F_1 unter der freien Wasseroberfläche bedeuten. Wahrscheinlich aber sind die Bahnen in F_1 schon convex nach unten, in F noch concav nach unten gekrümmt anzunehmen, entsprechend in F_1 einer vermehrten, in F einer verminderten Zunahme des Ueberdrucks von oben nach unten, so dass derselbe im Ganzen für $F < \gamma F f$, für $F_1 > \gamma F_1 f_1$, und um so mehr der Ueberschuss des ersten über den zweiten

$$< \gamma (Ff - F_1 f_1), \text{ etwa } = \gamma \varphi (Ff - F_1 f_1)$$

sein wird, unter φ einen echten Bruch verstanden (ein Umstand, der von Bresse übersehen wurde). Nach dem zu Grunde liegenden Princip hat man also die Gleichung:

$$\gamma \varphi (Ff - F_1 f_1) dt = \frac{\gamma}{g} \mu (F_1 u_1^2 - F u^2) dt$$

oder, unter μ jetzt einen erfahrungsmässig zu bestimmenden Coefficienten verstanden, der aus verschiedenen Gründen > 1 ist (wegen Ungleichheit der Geschwindigkeiten und wegen Krümmung der Bahnen in den Querschnitten F_1 und F):

$$Ff - F_1 f_1 = \frac{\mu}{g} (F_1 u_1^2 - F u^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Da bei gegebenem Querprofil des Canals f und f_1 durch F und F_1 bestimmt sind, so können durch Gl. (3) in Verbindung mit der Gleichung

$$Fu = F_1 u_1$$

entweder F und u bestimmt werden, wenn F_1 und u_1 gegeben, oder umgekehrt letztere Grössen, wenn erstere gegeben sind.

Wenn insbesondere für den Fall, dass der Sprung vom gleichförmigen Beharrungszustande ausgeht,

$$F_1 = F_0,\ f_1 = f_0,\ u_1 = u_0 \text{ und } \frac{u_0^2}{2g} = h_0$$

gesetzt wird, ergiebt sich zur Bestimmung von F bei gegebenen Werthen von F_0, f_0, h_0 die Gleichung:

$$\frac{F}{F_0} f - f_0 = 2\mu h_0 \left(1 - \frac{F_0}{F}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

und für einen rechteckigen Querschnitt, wie bei den Bidone'schen Beobachtungen, mit

$$\frac{F}{F_0} = \frac{h}{a},\ f = \frac{h}{2},\ f_0 = \frac{a}{2}$$

$$\frac{h^2 - a^2}{a} = 4\mu h_0 \frac{h - a}{h};\quad \mu = \frac{h(h + a)}{4ah_0} \ldots\ldots 5$$

Folgende Tabelle enthält in der 4. Columne die nach dieser Gl. 5 berechneten Werthe von μ entsprechend den in den 3 ersten Columnen enthaltenen Werthen von a, h_0, h, wie sie von Bidone durch je 16 Messungen (in 4 Versuchsreihen) bestimmt wurden.*

Nr.	a	h_0	h	μ	$\mu - \mu'$	φ	$\varphi - \varphi'$
I, 1	0,0470	0,0944	0,1284	1,269	— 0,004	0,996	0,027
2	0,0472	0,0936	0,1331	1,358	0,085	1,050	0,081
3	0,0474	0,0921	0,1310	1,338	0,065	1,044	0,075
4	0,0464	0,0966	0,1328	1,327	0,054	1,019	0,050
II, 1	0,0635	0,1478	0,1868	1,245	— 0,028	0,943	— 0,026
2	0,0639	0,1461	0,1889	1,279	0,006	0,966	— 0,003
3	0,0643	0,1444	0,1921	1,326	0,053	0,997	0,028
4	0,0646	0,1428	0,1957	1,380	0,107	1,030	0,061
5	0,0626	0,1523	0,1972	1,343	0,070	0,983	0,014
III, 1	0,0750	0,1872	0,2252	1,204	— 0,069	0,902	— 0,067
2	0,0743	0,1910	0,2300	1,233	— 0,040	0,910	— 0,059
3	0,0738	0,1930	0,2330	1,255	— 0,018	0,917	— 0,052
IV, 1	0,0457	0,0981	0,1213	1,130	— 0,143	0,898	— 0,071
2	0,0455	0,0989	0,1237	1,163	— 0,110	0,914	— 0,055
3	0,0455	0,0989	0,1303	1,273	0,000	0,976	0,007
4	0,0453	0,0998	0,1289	1,242	— 0,031	0,956	— 0,013

*) Hydromechanik von Dr. M. Rühlmann, S. 367.

Der **Mittelwerth** von μ ist:

$$\mu = 1{,}273$$

und wenn derselbe als wahrscheinlichster Werth mit μ' bezeichnet wird, so ist der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen Bestimmung von μ:

$$r = 0{,}6745 \sqrt{\frac{(\mu - \mu')^2}{15}} = 0{,}0476 = 0{,}0374\ \mu'.$$

Hiernach ist Gl. (5) als ein genügend correcter Ausdruck des Zusammenhanges der von Bidone gemessenen Grössen zu betrachten, und kann danach für andere analoge Fälle gesetzt werden:

$$\frac{h}{a} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 4\mu\frac{h_0}{a}} \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Uebrigens scheint sich ein noch etwas besserer Ausdruck zu ergeben, wenn, mit Belanger* ausgehend von dem Princip der Arbeit oder der lebendigen Kräfte,

$$\varphi \cdot \gamma Q \frac{u_1^2 - u^2}{2g} = \gamma Q\, [h - f - (h_1 - f_1)] + \gamma (Ffu - F_1 f_1 u_1)$$

gesetzt wird, d. h. die Abnahme der lebendigen Kraft pro Sec. vom Querschnitte F_1 bis zum Querschnitte F = der Arbeit zur Erhebung (des Schwerpunktes) von der Höhe $h_1 - f_1$ bis zur Höhe $h - f$ über der Grundebene plus dem Ueberschusse der Arbeit des Gegendrucks in F über die des Drucks in F_1, indem dabei der erfahrungsmässig zu bestimmende Coefficient φ die hierbei vernachlässigten Umstände berücksichtigen soll, dass thatsächlich das mittlere Geschwindigkeitsquadrat für einen Querschnitt etwas grösser ist, als das Quadrat seiner mittleren Geschwindigkeit, dass ferner auf der rechten Seite obiger Gleichung eigentlich noch ein Glied = dem Arbeitsverlust durch innere Widerstände hinzugefügt werden müsste, dass aber endlich ein Abzug gemacht werden müsste mit Rücksicht darauf, dass der Ueberdruck in $F < \gamma F f$, in $F_1 > \gamma F_1 f_1$ anzunehmen ist. Indem die Einflüsse dieser verschiedenen Umstände sich zum Theil gegenseitig aufheben, lässt sich erwarten, dass φ nicht viel von der Einheit verschieden sich herausstellen werde. Aus dieser Gleichung folgt nun mit

$$Q = Fu = F_1 u_1$$

$$\varphi \frac{u_1^2 - u^2}{2g} = h - f - (h_1 - f_1) + f - f_1 = h - h_1 \ldots (7),$$

wodurch in Verbindung mit $Fu = F_1 u_1$ entweder h und u bestimmt sind,

---

* Nach seiner ursprünglichen Bearbeitung des Problems, 1827: Essai sur mouvement des eaux courantes.

wenn h_1 und u_1 gegeben, oder umgekehrt h_1 und u_1, wenn h und u ge-geben sind, vorausgesetzt dass φ als ein hinlänglich constanter Zahlenwerth erfahrungsmässig bekannt ist.

Wenn insbesondere für den Fall, dass der Sprung vom gleichförmigen Beharrungszustande ausgeht,

$$F_1 = F_0, \; h_1 = a, \; u_1 = u_0 \text{ und } \frac{u_0^2}{2g} = h_0$$

gesetzt wird, ergiebt sich zur Berechnung von h die Gleichung:

$$h - a = \varphi h_0 \left[1 - \left(\frac{F_0}{F}\right)^2\right] \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und für einen rechteckigen Querschnitt mit $\frac{F}{F_0} = \frac{h}{a}$:

$$h^2 = \varphi h_0 (h + a); \quad \varphi = \frac{h^2}{h_0 (h + a)} \ldots\ldots\ldots$$

Aus den Bidone'schen Messungen ergeben sich hiernach die in der vorletzten Columne obiger Tabelle enthaltenen Werthe von φ, und zwar, wenn das arithmetische Mittel

$$\varphi = 0{,}969$$

als wahrscheinlichster Werth mit φ' bezeichnet wird, mit einem wahrscheinlichen Fehler

$$r = 0{,}6745 \sqrt{\frac{(\varphi - \varphi')^2}{15}} = 0{,}0347 = 0{,}0358\, \varphi',$$

der im Verhältniss zu φ' noch etwas kleiner ist, als der obige im Verhältniss zu μ'. Für andere analoge Fälle kann also auch nach Gl. (9) gesetzt werden:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{\varphi}{2} + \sqrt{\frac{\varphi}{2}\left(\frac{\varphi}{2} + 2\,\frac{a}{h_0}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots 1\ldots$$

Ob diese Gleichung oder Gl. (6) die Gesetzmässigkeit der Erscheinung richtiger darstellt, ob also φ oder μ einen weniger veränderlichen Werth hat, ist nur durch weitere Versuche zu entscheiden. —

Nach Festsetzung der Sprunghöhe kann nun auch der Ort des Sprunges im Canal ermittelt werden mit Hülfe der in den vorigen Paragraphen discutirten Gleichung des Längenprofils für den ungleichförmigen Beharrungszustand des Wassers, wenigstens zunächst dann, wenn der Sprung von einer kleineren bis zur Tiefe a des gleichförmigen Beharrungszustandes, oder von dieser bis zu einer grösseren Wassertiefe stattfindet; denn dann ist von den beiden Wassertiefen vor und nach dem

Sprunge die eine $= a$ und folglich die andere durch die so eben discutirte Beziehung zwischen beiden bestimmt. Wenn freilich, wie es bei einem Canal von geringerer Länge der Fall sein kann, ein gleichförmiger Beharrungszustand gar nicht eintritt, sondern der Sprung sogleich vom Curvenzweige AB bis zum Zweige CD (Fig. 54 und Fig. 55 im vorigen §.) erfolgt, so findet eine Unsicherheit in fraglicher Beziehung statt; sofern indessen der Sprung jedenfalls in der Nähe des Scheitelpunktes B, Fig. 54 resp. C, Fig. 55 zu erwarten und an der entsprechenden Stelle des Zweiges CD, Fig. 54 resp. AB, Fig. 55 der Differentialquotient $\frac{dh}{ds}$ sehr klein ist, so wird man wenig irren, wenn man im ersten Falle die Wassertiefe unmittelbar nach dem Sprunge nach Schätzung etwas kleiner, als die Ordinate des dem Punkte B, Fig. 54, für gleiche Abscisse s entsprechenden Punktes von CD, resp. im zweiten Falle die Wassertiefe vor dem Sprunge etwas grösser, als die Ordinate des dem Punkte C, Fig. 55, entsprechenden Punktes von AB annimmt.

Beispielsweise mag die zu Anfang dieses §. erwähnte specielle Beobachtung Bidone's, bei welcher in einem Canal von constanter Breite $b = 0{,}325$ Mtr. mit ebenem, unter $\alpha = 0{,}023$ geneigtem Boden und mit verticalen Seitenwänden das Wasserquantum $Q = 0{,}0351$ Cubikm. pro Secunde abfloss, und wobei der Sprung von der Tiefe $a = 0{,}064$ Mtr. des gleichförmigen Beharrungszustandes bis zur Tiefe $h = 0{,}064 + 0{,}125 = 0{,}189$ Mtr. erfolgte, rechnungsmässig geprüft, d. h. die Länge $= S - s$ der Canalstrecke berechnet werden, auf welcher die Wassertiefe stromabwärts vom Sprunge weiter von h bis $H = 0{,}280$ Mtr. der Theorie zufolge zunehmen sollte, eine Länge, die der Beobachtung zufolge ungefähr 3.5 Mtr. betrug. Nach diesen Daten ergiebt sich zunächst für den gleichförmigen Beharrungszustand:

$$F_0 = ab = 0{,}0208; \quad u_0 = \frac{Q}{F_0} = 1{,}6875$$

$$r_0 = \frac{F_0}{b + 2a} = 0{,}0459; \quad k_0 = \frac{u_0}{\sqrt{r_0 \alpha}} = 51{,}94$$

und für den Rauhigkeitscoefficienten des Canals nach §. 133, Gl. (12) mit r_0 statt a und

$$m = 23 + \frac{0{,}00155}{\alpha} = 23{,}07$$

$$\frac{1}{n} = \frac{k_0 - m}{2} + \sqrt{\left(\frac{k_0 - m}{2}\right)^2 + \frac{m k_0}{\sqrt{r_0}}} = 67{,}36; \quad n = 0{,}0148.$$

Indem nun hier die Gleichungen (6) — (10) des vorigen §. Anwendung finden, ergiebt sich mit

$$h_1 = \frac{h + H}{2} = 0{,}2345; \quad x_1 = \frac{h_1}{a} = 3{,}664$$

$$k = 41{,}43 \text{ nach Gl. (6)},$$

$$c^3 = \left(\frac{k_0}{k}\right)^2 = 1{,}5714; \quad \lambda^3 = \frac{uk_0^{\,2}}{g} = 6{,}3244 \text{ nach Gl. (7)}$$

und mit $\delta = 2\frac{a}{b} = 0{,}3938$:

$$c_1^{\,3} = \frac{c^3}{1+\delta} = 1{,}1275; \quad c_1 = 1{,}0408; \quad \lambda_1^{\,3} = \frac{\lambda^3}{1+\delta} = 4{,}5...$$

nach Gl. (8) und $\Delta = 0{,}5412$ nach Gl. (9). Endlich mit

$$\frac{1}{x'} = \frac{ac_1}{h} = 0{,}3524; \quad \frac{1}{X'} = \frac{ac_1}{H} = 0{,}2379,$$

$$\text{also } f(x') = 0{,}0632 \text{ und } f(X') = 0{,}0285$$

gemäss der Tabelle in §. 133, findet man nach Gl. (10) im vorigen §.

$$S - s = \frac{1}{a}\left(H - h - \frac{\Delta}{c_1^{\,2}}(\lambda_1^{\,3} - c_1^{\,3})\, a\, [f(x') - f(X')]\right)$$

$$= \frac{1}{a}(0{,}091 - 0{,}0038) = 3{,}8 \text{ Mtr.}$$

d. Einfluss plötzlicher Querschnittsänderungen.

§. 136. Vorbemerkungen und Uebersicht verschiedener Fälle.

Plötzliche oder wenigstens auf sehr kurze Strecken beschränkte Querschnittsänderungen des in Canälen, überhaupt des mit theilweise freier Oberfläche strömenden Wassers, mit welchen erhebliche Richtungsänderungen und Krümmungen der von den Wassertheilchen durchflossenen Bahnen verbunden sind, können besonders durch Wände verursacht werden, die den Wasserstrom von unten oder von den Seiten oder in beiden Beziehungen zugleich einengen, indem die Wand eine oben offene oder wenigstens eine oben bis über die freie Wasseroberfläche hinaus sich erstreckende Durchbrechung hat, deren Rand mehr oder weniger von der Canalwand entfernt ist, und welche hier als **freie Wandöffnung** bezeichnet werde im Gegensatze zu einer sogenannten Mündung, d. i. einer rings umgrenzten und vom durchfliessenden Wasser ganz ausgefüllten Wandöffnung. Gewöhnlich ist eine solche Wand vertical und rechtwinkelig gegen die verticalen Längsschnitte des Canals gerichtet, die Durchbrechung der Wand aber rechteckig

mit einem horizontalen unteren Rande und verticalen Seitenrändern, wie es im Folgenden vorausgesetzt wird, sofern das Gegentheil nicht ausdrücklich bemerkt ist. Man sagt dann, das Wasser bilde einen Ueberfall über diesem unteren Rande, und unterscheidet Ueberfälle, welche die ganze oder nur einen Theil der Canalbreite einnehmen, jenachdem der Wasserstrom durch die Wand nur von unten oder zugleich seitwärts eingeengt wird.

Wenn ferner die beiden Theile des Canals, welche oberhalb und unterhalb, d. h. stromaufwärts und stromabwärts von der Wand liegen, als Zufluss- und Abflusscanal bezeichnet werden, so pflegt man vollkommene und unvollkommene Ueberfälle zu unterscheiden, jenachdem die Wand von der rückwärts verlängert gedachten freien Wasseroberfläche im Abflusscanal (dieselbe an einer solchen Stelle gemeint, wo sie eben, die Bewegung des Wassers gleichförmig geworden ist) unter oder über dem horizontalen Ueberfallrande geschnitten wird. Im Zuflusscanal verursacht die Wand einen Stau, d. h. eine Erhebung des Wassers mit aufwärts gewöhnlich schwach concaver Krümmung der freien Oberfläche, die nur kurz vor der Wand in eine nach oben convexe Krümmung übergeht. Dieser Stau liefert die Druckhöhe, welche nöthig ist, um die im verengten Querschnitte entsprechend vergrösserte Geschwindigkeit zu erzeugen, und die nach oben convexe Krümmung der freien Wasseroberfläche am Ende des Zuflusscanals, entsprechend einem gegen die Wand hin zunehmend wachsenden Gefälle, wird durch den Umstand bedingt, dass unter dem Einflusse der inneren Reibung sich jene Geschwindigkeitszunahme wesentlich bis zur Oberfläche erstrecken muss. Da von dieser letzten Strecke des Zuflusscanals, in welcher die Bahnen der Wassertheilchen erheblich convergent und gekrümmt werden, und mit den Geschwindigkeiten, insbesondere auch mit der Oberflächengeschwindigkeit zugleich das relative Gefälle schon vor der Ueberfallwand merklich zunimmt, bei der Theorie der Ueberfälle wiederholt die Rede sein muss, mag sie der Kürze wegen mit einem besonderen Wort, nämlich im Anschlusse an eine bei natürlichen, insbesondere grösseren Wasserläufen übliche Benennung als Stromschnelle bezeichnet werden. Bei Gerinnen und kleineren Canälen wird der Erfahrung zufolge gewöhnlich angenommen, dass ihr Einfluss sich bis etwa 1 Mtr. stromaufwärts von der Ueberfallwand erstreckt.

Als besonderer Fall ist der bemerkenswerth, dass der Zuflusscanal durch einen hinlänglich grossen Behälter ersetzt ist, um das Wasser in demselben im Wesentlichen als mit horizontaler freier Oberfläche in Ruhe befindlich betrachten zu können. Die Ueberfallwand ist dann ein

Theil der Gefässwand; von einem Stau durch dieselbe kann keine Rede sein, nur von der Stromschnelle infolge des Abflusses durch die freie Wandöffnung (des Ueberfalles über ihrem unteren Rande), charakterisirt auch hier durch eine allmählige Senkung der freien Oberfläche mit aufwärts convexer Krümmung gegen die Wandöffnung hin. Andererseits kann der Abflusscanal ganz fehlen, so dass das Wasser hinter der Wand frei niederfällt; der nothwendig vollkommene wird dann insbesondere ein freier Ueberfall genannt. Beide Specialfälle sind combinirt in dem Fundamentalfalle des freien Abflusses aus einem rechteckigen Einschnitte in der verticalen ebenen Seitenwand eines Gefässes.

Als Grenzfall eines unvollkommenen Ueberfalles ist endlich noch der hervorzuheben, dass die Wand des Abflusscanals sich unmittelbar an den Rand der Wandöffnung mit gleichem Querprofil anschliesst, ein Fall, welcher, besonders combinirt vorkommend mit dem Specialfalle eines grösseren Behälters mit fast ruhigem Wasser an Stelle des Zuflusscanals, auch als Abfluss durch eine freie Wandöffnung mit Ansatzgerinne bezeichnet werden kann. —

Nach dem Durchflusse durch die Wandöffnung kann der Wasserstrom ebenso wie bei Mündungen eine Contraction erfahren, wenigstens unten und an den Seiten, überhaupt am Rande der Wandöffnung, bedingt durch die mehr oder weniger grossen Winkel, unter denen die Bahnen der Wassertheilchen am Rande gegen die Normale der Ueberfallsebene convergiren; unter der Ueberfallsebene wird dabei die Ebene der Randlinie, d. h. der als eben vorausgesetzten Linie verstanden, in welcher der Rand der Wandöffnung von einer mit der mittleren Strömungsrichtung in derselben parallelen Cylinderfläche berührt wird. Im weiteren Sinne kann indessen auch schon die Senkung der freien Wasseroberfläche im Bereich der Stromschnelle als eine Contraction von oben betrachtet werden, eine Auffassung, welche dadurch motivirt ist, dass die fragliche Senkung sich ebenso wie die untere und seitliche Contraction an der Randlinie einer zuverlässigen rationellen Beurtheilung a priori entzieht und deshalb am einfachsten mit ihr zusammen durch einen empirisch zu bestimmenden Correctionscoefficienten in Rechnung gebracht wird. Der Querschnitt des Wassers mit der Ueberfallsebene wird dann ausser der Randlinie durch die horizontale Gerade begrenzt gedacht, in der die Ueberfallsebene von der Ebene geschnitten wird, welche die freie Wasseroberfläche am Anfange der Stromschnelle berührt und übrigens meistens (bei mässigem Gefälle des Zuflusscanals und mässiger Länge der Stromschnelle) ohne in Betracht kommenden Unterschied des Resultats auch als Horizontalebene ange-

nommen werden kann. Am Rande der Wandöffnung kann die Contraction (ebenso wie es für Mündungen in §. 82 erklärt wurde) mehr oder weniger geschwächt sein, jenachdem die Wand am Rande mehr oder weniger abgerundet ist oder die Wassertheilchen durch mehr oder weniger schräge Leitflächen am Ende des Zuflusscanals gegen die Ueberfallsebene hin geleitet werden, ferner mehr oder weniger unvollkommen je nach der kleineren oder grösseren Entfernung der Randlinie von der Wandfläche des Zuflusscanals resp. vom Boden oder von den Seitenwänden des Ausflussbehälters, endlich mehr oder weniger partiell (unvollständig) jenachdem die Contraction an einem grösseren oder kleineren Theil des Randes ganz aufgehoben ist; letzteres ist besonders seitlich der Fall bei einem Ueberfall, der die ganze *Breite* des Canals einnimmt, dagegen an der unteren Seite bei einer Wand, durch welche umgekehrt das Wasser nur seitlich eingeengt wird.

In allen Fällen handelt es sich um die Beziehungen, welche zwischen den Dimensionen des Zu- und Abflusscanals und der Wandöffnung, den Höhenlagen des Oberwasserspiegels (am Anfang der Stromschnelle) und bei unvollkommenen Ueberfällen des Unterwasserspiegels (an der Stelle, wo im Abflusscanal die Bahnen der Wassertheilchen zuerst wieder parallel geworden sind resp. ein gleichförmiger Beharrungszustand eingetreten ist), sowie endlich der pro Secunde überfallenden, überhaupt durch die Wandöffnung fliessenden Wassermenge stattfinden. Bei den Versuchen zur Bestimmung der in diesen Beziehungen vorkommenden Constanten wurden vorzugsweise Oeffnungen in dünnen Wänden angewendet, hergestellt durch eine solche Abschrägung des Randes, dass dadurch die Randlinie als scharfe Kante in die vordere Fläche der ebenen Wand verlegt wurde, die Contraction also möglichst ungeschwächt und ungestört durch Adhäsion des Wassers an der Randfläche zu Stande kommen konnte. Die aus solchen Versuchen abgeleiteten Coefficienten sind deshalb für manche übrigens hierher gehörige technische Anlagen nicht ohne Weiteres als gültig zu betrachten, insbesondere z. B. bei den sogenannten Wehren, die zum örtlichen Aufstau des Wassers eines natürlichen Flusses als abgerundete Dämme mit horizontaler Scheitellinie quer durch den Fluss errichtet und als Ueberfall- oder Grundwehre bezeichnet werden, jenachdem das Wasser über ihnen einen vollkommenen oder unvollkommenen Ueberfall bildet. Bei denselben handelt es sich vorzugsweise um die Vorausberechnung der Wehrhöhe, die bei gegebener Wassermenge des Flusses eine gewisse Stauhöhe verursachen wird, d. h. eine gewisse Erhebung des Oberwasserspiegels (am Anfang der Stromschnelle) über der freien Ober-

fläche des vor Anlage des Wehrs bei derselben Wassermenge in gleichförmigem Beharrungszustande befindlichen Flusses.

Wenn ein solches Wehr die Bestimmung hat, das Gefälle einer gewissen Flussstrecke zum Zweck des Betriebes hydraulischer Kraftmaschinen örtlich zu concentriren, so pflegt ein Theil des aufgestauten Wassers durch einen Canal, der unmittelbar oberhalb des Wehrs vom Flusse abgezweigt ist, der seitwärts von diesem in einiger Entfernung befindlichen Maschinenanlage zugeleitet zu werden, so dass das Wasserquantum Q, welches den Ueberfall bildet und stromabwärts vom Wehr im Flussbette abfliesst, nur ein Theil der ganzen Wassermenge Q_0 des Flusses ist. Zur Beurtheilung des Wehrs hinsichtlich seines Charakters als Ueberfall- oder Grundwehr, wozu die Kenntniss der Höhenlage des Unterwasserspiegels erforderlich ist, muss dann zunächst ermittelt werden, um wie viel die dem gleichförmigen Beharrungszustande entsprechende freie Oberfläche bei der Wassermenge Q tiefer liegt, als bei der Wassermenge Q_0? Ist zu dem Ende allgemein (d. h. abgesehen davon, ob $Q < Q_0$ oder $> Q_0$ ist) der Querschnitt, die Wasserbreite, das benetzte Querprofil, der mittlere Radius und die mittlere Geschwindigkeit

bei der Wassermenge $Q_0 = F_0 \quad b_0 \quad p_0 \quad r_0 \quad u_0$

" " " $Q = F \quad b \quad p \quad r \quad u$,

so ist mit Rücksicht darauf, dass das Gefälle in beiden Fällen gleich = dem Abhang α des als cylindrisch vorausgesetzten Canals oder Flussbettes ist:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{Fu}{F_0 u_0} = \frac{k}{k_0}\frac{F}{F_0}\sqrt{\frac{r}{r_0}} = \frac{k}{k_0}\left(\frac{F}{F_0}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{F}{F_0} = \left(\frac{k_0}{k}\frac{Q}{Q_0}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

und dabei nach §. 126, Gl. (14)

$$\frac{k_0}{k} = \frac{A}{1+\frac{B}{\sqrt{r_0}}} : \frac{A}{1+\frac{B}{\sqrt{r}}} = \frac{1+B\sqrt{\frac{p}{F}}}{1+B\sqrt{\frac{p_0}{F_0}}} \quad \ldots\ldots \quad 2$$

mit $B = \left(23 + \frac{0,00155}{\alpha}\right)n$, unter n einen Rauhigkeitscoefficienten verstanden, der hier durchschnittlich = 0,025 gesetzt werden kann; endlich, wenn h die (positive oder negative) Höhe des Wasserquerprofils bei der Wassermenge Q über demselben bei der Wassermenge Q_0, und β den mittleren Winkel bedeutet, um welchen zwischen beiden das Canalquerprofil beiderseits gegen die Lothrechte geneigt ist:

$$\left.\begin{array}{l} F = F_0 + hb_0 + h^2 tg\beta \\ p = p_0 + 2h\sec\beta \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Durch diese Gleichungen (1) — (3) ist h bestimmt, wenn Q_0, F_0, b_0, p_0, a, β und Q gegeben sind, und zwar ist $h \gtrless 0$, jenachdem $Q \gtrless Q_0$ ist.

Wenn die Breite gross in Vergleich mit der mittleren Tiefe und β ein kleiner Winkel ist, kann näherungsweise gesetzt werden:

$$\frac{b}{b_0} = 1; \quad \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(1 + 2\frac{h}{b}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{2}{3}\frac{h}{b}$$

$$\frac{F}{F_0} = \frac{a+h}{a}; \quad \frac{k_0}{k} = \frac{1 + \dfrac{B}{\sqrt{a+h}}}{1 + \dfrac{B}{\sqrt{a}}},$$

unter a die mittlere Tiefe bei der Wassermenge Q_0 verstanden, also nach Gl. (1):

$$\frac{a+h}{a} = \left(\frac{1 + \dfrac{B}{\sqrt{a+h}}}{1 + \dfrac{B}{\sqrt{a}}} \frac{Q}{Q_0}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\frac{h}{b}\right) \ldots\ldots (4).$$

Durch Einsetzung des ersten Näherungswerthes

$$\frac{a+h}{a} = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^{\frac{2}{3}}$$

auf der rechten Seite dieser Gleichung ergiebt sich als zweiter Näherungswerth:

$$\frac{a+h}{a} = \left(\frac{1 + \dfrac{B}{\sqrt{a}}\left(\dfrac{Q_0}{Q}\right)^{\frac{1}{3}}}{1 + \dfrac{B}{\sqrt{a}}} \frac{Q}{Q_0}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\frac{a}{b}\left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right)$$

oder wenn mit $e = -h$ die Erniedrigung der Wasseroberfläche in dem hier in Rede stehenden Falle $Q < Q_0$ bezeichnet wird:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a+h}{a} = 1 - \dfrac{e}{a} = x\left(1 - y\dfrac{a}{b}\right) \ldots\ldots \\ x = \left(\dfrac{\dfrac{Q}{Q_0} + \dfrac{B}{\sqrt{a}}\left(\dfrac{Q}{Q_0}\right)^{\frac{2}{3}}}{1 + \dfrac{B}{\sqrt{a}}}\right)^{\frac{2}{3}}; \quad y = \dfrac{2}{3}\left[1 - \left(\dfrac{Q}{Q_0}\right)^{\frac{2}{3}}\right] \end{array}\right\} \ldots (5).$$

Zur Erleichterung des Gebrauchs dieser Formel sind in folgender Tabelle die Werthe von x und y für verschiedene Werthe von $\frac{Q}{Q_0}$ und $\frac{B}{\sqrt{a}}$ zusammengestellt.

$\frac{Q}{Q_0}$	y	x für $\frac{B}{\sqrt{a}} =$						
		0,5	1	1,5	2	3	5	∞
0,2	0,439	0,394	0,419	0,433	0,443	0,455	0,466	0,48[illegible]
0,3	0,368	0,496	0,519	0,533	0,542	0,553	0,564	0,586
0,4	0,305	0,585	0,606	0,618	0,626	0,636	0,646	0.665
0,5	0,247	0,666	0,683	0,694	0,701	0,709	0,718	0.735
0,6	0,192	0,740	0,755	0,763	0,769	0,776	0,783	0.797
0,7	0,141	0,810	0,821	0,828	0,832	0,837	0,843	0,853
0,8	0,092	0,876	0,884	0,888	0,891	0,895	0,898	0.906

Die Werthe von B können der betreffenden Tabelle in §. 126 (daselbst mit b bezeichnet) entnommen werden.

§. 137. Vollkommene Ueberfälle.

Wenn man einen vollkommenen Ueberfall als Grenzfall des Ausflusses aus einer rechteckigen Mündung in einer verticalen Wand bei abnehmender Wasserstandshöhe betrachtet, so kann man nach §. 79, Gl. (7) das pro Se- überfallende Wasserquantum

$$Q = \frac{2}{3}\,\mu b\,\sqrt{2g}\left(H_1^{\frac{3}{2}} - H_2^{\frac{3}{2}}\right)$$

setzen, unter μ einen erfahrungsmässig zu bestimmenden Coefficienten, b die Ueberfallbreite, H_1 und H_2 die wirksamen Druckhöhen für den unteren Ueberfallrand und für das (hier an die Stelle des oberen Randes der Mündung tretende) Wasserquerprofil in der Ueberfallsebene verstanden. Letztere sind wegen Gleichheit des an der freien Oberfläche überall herrschenden atmosphärischen Drucks einfach = den Höhen h_1 und h_2 der freien Wasseroberfläche am Anfang der Stromschnelle (siehe vor. §. über den betreffenden Stellen zu setzen, wenn, wie bei dem Ausflusse aus einem Einschnitt in der Seitenwand eines Gefässes, die Geschwindigkeit zu vernachlässigen ist, die das Wasser am Anfang der Stromschnelle schon besitzt. Uebrigens hat diese Geschwindigkeit dieselbe Wirkung, als ob die Wasseroberfläche, von der aus die Höhen h_1 und h_2 gemessen werden, um

die entsprechende Geschwindigkeitshöhe höher läge, und wenn also k den Mittelwerth der letzteren bezeichnet, ist allgemein

$$H_1 = h_1 + k, \quad H_2 = h_2 + k.$$

Das Gesetz, nach welchem h_2 von h_1 und von den übrigen Elementen des Ueberfalles abhängt, ist indessen selbst empirisch (insbesondere durch Messungen und daraus abgeleitete empirische Formeln von Lesbros) nur ungenügend bekannt, und wird es deshalb vorgezogen, das Gefälle $= h_2$ der Stromschnelle schon als Erscheinung einer Contraction von oben zu betrachten und durch den Coefficienten μ mit zu berücksichtigen. Wenn somit $H_2 = k$ und $H_1 = h + k$ gesetzt wird, unter h jetzt die zuvor mit h_1 bezeichnete Höhe der freien Wasseroberfläche am Anfang der Stromschnelle über dem horizontalen Ueberfallrande verstanden, und wenn der Einfachheit wegen μ für $\frac{2}{3}\mu$ gesetzt wird, ergiebt sich:

$$Q = \mu b \sqrt{2g}\left[(h+k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

Je zusammengesetzter die Bedeutung des Coefficienten μ in dieser Gleichung ist, desto mehr ist seine einigermassen zuverlässige Bestimmung auf einzelne Specialfälle beschränkt.

1) Für den Fundamentalfall des freien Abflusses aus einem rechteckigen Einschnitte in der verticalen ebenen Seitenwand eines Gefässes sind namentlich von Poncelet und Lesbros, später von Lesbros allein ausgedehnte Versuche angestellt worden (in Verbindung mit den in den §§. 84 und 85 besprochenen Versuchen über den Ausfluss aus rechteckigen Mündungen), und haben sich dabei insbesondere dann, wenn die Ränder des Einschnittes vom Boden und von den Seitenwänden des Gefässes hinlänglich weit entfernt waren, um die Contraction als vollkommen und vollständig bezeichnen zu können, die folgenden Werthe von μ ergeben, entsprechend (nach Gl. 1 mit $k = 0$) der Gleichung:

$$Q = \mu b h \sqrt{2gh} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2),$$

und zwar erhalten aus Versuchen mit Ueberfällen von 0,2 und 0,6 Mtr. Breite in dünner Wand (Wandöffnung mit abgeschrägten Rändern).

$h =$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,08	0,1	0,15	0,2	0,3	0,6
$b = 0,2: \mu =$	0,424	0,417	0,412	0,407	0,401	0,397	0,395	0,393	0,390	—	—
$b = 0,6: \mu =$	—	—	0,418	0,416	0,412	0,409	0,406	0,400	0,395	0,391	0,390

2) Wenn der Ueberfall sich in einem Canal befindet (eventuell als freier Ueberfall am Ende des Canals), so kann die mittlere Geschwindigkeitshöhe k, die das Wasser im Querschnitte F_0 am Anfang der Strom-

schnelle schon besitzt, von merklichem Einfluss sein um so mehr, je grösser das Verhältniss

$$n = \frac{bh}{F_0} = \frac{bh}{b_0 h_0}$$

ist, unter b_0 die Wasserbreite und unter h_0 die mittlere Tiefe an der Stelle des Querschnitts F_0 verstanden. Indem dann aber die Contraction mehr oder weniger unvollkommen ist (eventuell zugleich unvollständig bei einem Ueberfall, der die ganze Breite des Canals einnimmt), somit auch μ von n abhängt, ist es am einfachsten, nach wie vor die Gleichung (2) zu Grunde zu legen und dabei μ als empirische Function von n aus den betreffenden Versuchen abzuleiten.

Dergleichen Versuche von Castel, angestellt mit Ueberfällen bis zu 0,75 Mtr. Breite und mit abgeschrägten Rändern, dienten vorzugsweise zur Bestimmung des Einflusses des Verhältnisses $\frac{b}{b_0}$; ihnen zufolge kann in Gl. (2) gesetzt werden:

$$\mu = 0{,}381 + 0{,}062\,\frac{b}{b_0} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

wenn $\frac{b}{b_0} > \frac{1}{3}$, $n < \frac{1}{5}$ und die Höhe der Ueberfallkante über dem Unterwasserspiegel $> 2h$ ist. Dabei ist im Falle $b = b_0$ hier wie im Folgenden stets vorausgesetzt, dass die Seitenwände des Zuflusscanals wenigstens oberhalb des Ueberfallrandes vertical sind.

Allgemeine Gültigkeit (wenigstens bis $n = 0{,}5$) beanspruchen die von Weisbach aus seinen Versuchen mit Ueberfällen in dünner Wand bis etwa 0,4 Mtr. Breite abgeleiteten Resultate, wonach bei vollständiger Contraction (hinlänglicher Entfernung beider Seitenränder der Ueberfallöffnung von den Seitenwänden des Canals, also b wesentlich $< b_0$)

$$\mu = \mu_1 = \mu_0\,(1 + 1{,}718\,n^4) \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

dagegen bei Ueberfällen, welche die ganze Breite des Canals einnehmen,

$$\mu = \mu_2 = \mu_0\,(1{,}041 + 0{,}3693\,n^2) \ldots\ldots\ldots (5)$$

soll gesetzt werden können, unter μ_0 den betreffenden Coefficienten der Poncelet-Lesbros'schen Fundamentaltabelle verstanden: siehe oben unter 1) für $b = 0{,}2$ Mtr. Nachstehend sind die den Formeln (4) und (5) für verschiedene Werthe von n entsprechenden Verhältnisse $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ und $\frac{\mu_2}{\mu_0}$ zusammengestellt.

$n =$	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$\mu_1 : \mu_0 =$	1,000	1,001	1,003	1,007	1,014	1,026	1,044	1,070	1,107
$\mu_2 : \mu_0 =$	1,045	1,049	1,056	1,064	1,074	1,086	1,100	1,116	1,133

Insbesondere für vollkommene Ueberfälle auf der ganzen Breite des Gerinnes ergab sich aus Versuchen von Bornemann* aus den Jahren 1866, 1867, 1869 und zwar aus im Ganzen 47 Versuchen, wobei

$$b = b_0 = 1{,}13 \text{ Mtr.},\ h = 0{,}7 - 0{,}21 \text{ Mtr.},\ \frac{h}{h_0} = 0{,}2 - 0{,}8$$

war, bei Voraussetzung von Gl. (2):

$$\mu = 0{,}5673 - 0{,}1239 \sqrt{\frac{h}{h_0}} \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler $= 0{,}0148$, und bei Voraussetzung von Gl. (1):

$$\mu = 0{,}6448 - 0{,}2777 \sqrt{\frac{h}{h_0}}$$

mit einem übrigens nur so wenig kleineren wahrscheinlichen Fehler, dass dadurch die Annahme dieser Gl. (1) statt der einfacheren Gl. (2) nicht genügend motivirt erschien. Dagegen zeigte die gleichfalls versuchte Gleichung

$$Q = \mu b\,(h + k)\sqrt{2g\,(h + k)} \cdots\cdots\cdots\cdots (7),$$

$$\text{welcher } \mu = 0{,}6402 - 0{,}2862 \sqrt{\frac{h}{h_0}} \cdots\cdots\cdots (8)$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler $= 0{,}0133$ entsprach, besonders für die grösseren Werthe von $\frac{h}{h_0}$ eine bessere Uebereinstimmung mit den Beobachtungen, so dass Bornemann die Gl. (2) mit μ nach Gl. (6) für $\frac{h}{h_0} < \frac{1}{3}$, dagegen Gl. (7) mit μ nach Gl. (8) für $\frac{h}{h_0} > \frac{1}{3}$ empfehlen zu sollen glaubt. Bei der Benutzung von Gl. (7) zur Berechnung von Q kann man zunächst mit $k = 0$ einen Näherungswerth Q', damit $k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q'}{F_0}\right)^2$ und dann nach Gl. (7) einen corrigirten Werth von Q berechnen.

Die Resultate dieser Bornemann'schen Versuche, bei denen der Ueberfallrand auch durch Abschrägung scharfkantig hergestellt war, bestätigen nicht die Weisbach'sche Formel (5):

$$\mu = \mu_0 \left[1{,}041 + 0{,}3693 \left(\frac{h}{h_0}\right)^2\right],$$

nach welcher μ mit wachsendem Verhältniss $\frac{h}{h_0}$ nicht abnehmen, sondern wachsen sollte, wenn auch dieses Verhalten dadurch etwas abgeschwächt wird, dass μ_0 mit wachsendem h abnimmt. Jedenfalls und besonders für

* Civilingenieur, Jahrgang XVI.

die kleineren Werthe von $\frac{h}{h_0}$ ist der Coefficient μ in Gl. (2) nach Bornemann grösser, als nach Castel und nach Weisbach. Z. B. für $\frac{h}{h_0} = 0,25$ ist nach Gl. (6): $\mu = 0,505$, dagegen nach Gl. (5) höchstens $= 0,424 .$ $1,064 = 0,451$ wenig verschieden von $\mu = 0,443$ nach Gl. (3); für $\frac{h}{h_0} = 0,5$ ist nach Gl. (6): $\mu = 0,480$, nach Gl. (5) höchstens ebenso gross, nämlich mit $\mu_0 = \frac{0,480}{1,133} = 0,424$.

3) Wenn die Ueberfallwand geneigt ist, und zwar im Sinne der Strömung vornüber unter einem gewissen Winkel δ gegen die Lothrechte, so dass die von unten dem Ueberfallrande zufliessenden Wassertheilchen höchstens um $(90 - \delta)$ Grad ihre Bewegungsrichtung zu ändern haben, um die Ueberfallsebene zu durchströmen, so wird dadurch hier die Contraction geschwächt, also μ vergrössert. So fand Weisbach bei einem die ganze Breite des Gerinnes einnehmenden freien Ueberfalle (entsprechend der obigen Gl. 2)

$$\mu = 0,447 \text{ für } \delta = 26,5^0, \quad \mu = 0,467 \text{ für } \delta = 45^0,$$

zusammenzufassen in der Gleichung:

$$\mu = 0,418 + 0,00108\,\delta,$$

also, wenn μ_0 (hier $= 0,418$) den Werth von μ für $\delta = 0$, d. h. für die verticale Wand bedeutet,

$$\mu = \mu_0 \, (1 + 0,0026\,\delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Ist die Wand unter einem gewissen Winkel $= \delta'$ Grad im umgekehrten Sinne geneigt, so ist $\mu < \mu_0$, z. B. nach Boileau $= 0,973\,\mu$ für $\delta' = 18,5$ Grad, entsprechend

$$\mu = \mu_0 \, (1 - 0,0015\,\delta') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Ein schräger Zufluss anderer Art findet bei Ueberfällen dann statt, wenn die übrigens verticale Wand unter einem gewissen Winkel $= \delta$ Grad gegen die zur Bewegungsrichtung des Wassers senkrechte Ebene geneigt ist. Boileau fand in solchem Falle

$$\mu = 0,942\,\mu_0 \text{ für } \delta = 45^0, \quad \mu = 0,911\,\mu_0 \text{ für } \delta = 65^0,$$

entsprechend

$$\mu = \mu_0 \, (1 - 0,0013\,\delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

wobei vorausgesetzt ist, dass unter b in Gl. (2) stets die ganze Länge des horizontalen Ueberfallrandes verstanden wird.

Eine grosse Zuverlässigkeit in Betreff der Anwendung auf andere Verhältnisse können die Beziehungen (9) — (11) bei der geringen Zahl der ihnen zu Grunde liegenden Beobachtungen nicht in Anspruch nehmen.

4) Bei einem Ueberfallwehr, gebildet durch einen abgerundeten Damm, dessen horizontale Scheitellinie höher liegt, als der Unterwasserspiegel, ist jener Abrundung wegen der Coefficient μ grösser, als unter sonst gleichen Umständen für einen Ueberfall über scharfkantigem Rande, wenn auch nicht in demselben Verhältnisse, wie die Contraction geringer ist, weil die Reibung des mit vermehrter Geschwindigkeit an der Oberfläche des Wehrdammes hin fliessenden Wassers eine Verkleinerung des Geschwindigkeitscoefficienten verursachen muss, als dessen Product mit einem Contractionscoefficienten der resultirende Coefficient μ betrachtet werden kann. Für solche Ueberfallwehre mit Flügelwänden, wodurch eine seitliche Contraction verhindert wird, soll

$$\text{nach Eytelwein:}\quad \mu = 0,57$$

$$\text{nach Weisbach:}\quad \mu = \frac{2}{3} \cdot 0,8 = 0,53$$

zu setzen sein, vorausgesetzt dass die Geschwindigkeit des zufliessenden Wassers besonders in Rechnung gebracht wird wie durch obige Gl. (1). Darin ist hier

$$k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_0}{F_0}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12),$$

unter F_0 den Querschnitt des aufgestauten Wassers (am Anfang der Stromschnelle) und unter Q_0 das pro Sec. hindurch fliessende ganze Wasserquantum des Flusses verstanden, welches hier grösser ist, als das den Ueberfall bildende $= Q$, wenn der Ueberschuss $= Q_0 - Q$ durch einen dicht oberhalb des Wehrs abgezweigten Canal fortgeleitet wird. Ist nun die Höhe $= H$ gegeben, bis zu der das Wasser (am Anfang der Stromschnelle) über der freien Oberfläche E des bei derselben Wassermenge Q_0 im gleichförmigen Beharrungszustande befindlichen Flusses durch das Wehr aufgestaut werden soll, so ist dadurch F_0, also k bestimmt, und ergiebt sich die erforderliche Höhe

$$x = H - h$$

der Scheitellinie des Wehrs über der Ebene E durch Substitution des Ausdrucks von h nach Gl. (1):

$$x = H - \left(\frac{Q}{\mu b \sqrt{2g}} + k^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} + k \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

vorausgesetzt dass dieses $x \gtrsim -e$ gefunden wird, unter e die der Abzweigung des Wasserquantums $= Q_0 - Q$ entsprechende, nach den Angaben im vorigen §. zu berechnende Erniedrigung des Unterwasserspiegels unter die Ebene E verstanden; anderen Falls wäre der Ueberfall unvollkommen und das Wehr nach den Regeln des folgenden §. als Grundwehr zu berechnen.

Uebrigens kann eine solche Berechnung der Wehrhöhe mit einem constanten Werthe von μ (= 0,57 resp. 0,53) auf grosse Zuverlässigkeit nicht Anspruch machen, da sich annehmen lässt, dass die bei Ueberfällen mit scharfkantigem Rande constatirte Abhängigkeit des Coefficienten μ von dem Verhältnisse n resp. $\frac{h}{h_0}$ grossentheils durch die Veränderlichkeit des Gefälles der Stromschnelle bedingt wird, die auch bei Aufhebung der unteren Contraction durch Abrundung des Ueberfallrandes sich gleicher Weise geltend machen wird. Es ist deshalb vielleicht richtiger, auch hier die Gl. (2) mit dem Bornemann'schen Ausdrucke (6) von μ für breite Ueberfälle zu Grunde zu legen, sofern nur letzterer wegen Abrundung des Ueberfallrandes entsprechend vergrössert wird. Diese Vergrösserung hätte nach Gl. (9) im Verhältnisse

$$1 + 0{,}0026 . 90 = 1{,}234$$

zu geschehen, wenn jener Formel eine unbeschränkte Gültigkeit zugeschrieben und die untere Contraction bei einem Ueberfallwehr als vollkommen aufgehoben betrachtet werden dürfte; weil aber Beides nicht der Fall ist, mag mit Rücksicht zugleich auf den vermehrten Reibungswiderstand des Wehrdammes nach vorläufiger Schätzung der Ausdruck (6) nur mit 1,15 (entsprechend $\delta = 58^0$ nach Gl. 9) multiplicirt, also

$$\mu = 0{,}642 - 0{,}142 \sqrt{\frac{h}{h_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

gesetzt werden. Darin ist $h_0 = a + H$, unter a die mittlere Tiefe des ungestauten Flusses bei der Wassermenge Q_0 verstanden, und entspricht $\mu = 0{,}57$ dem Verhältnisse $\frac{h}{h_0} = \frac{1}{4}$. Wird dieser Näherungswerth von μ mit μ' bezeichnet, so findet man aus Gl. (2) den entsprechenden Näherungswerth von h:

$$\left.\begin{array}{l} h' = \left(\dfrac{Q}{\mu' b \sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}}; \quad \text{damit } \mu = 0{,}642 - 0{,}142 \sqrt{\dfrac{h'}{h_0}} \\ h = h' \left(\dfrac{\mu'}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}}; \quad x = H - h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} . (15)$$

Es sei z. B. ein kleiner Fluss von $b = 8$ Mtr. Breite, dessen Wassermenge $Q_0 = 4{,}8$ Cubikm. bei $a = 0{,}4$ Mtr. mittlerer Tiefe beträgt, durch ein die ganze Breite b einnehmendes quer durch den Fluss zu erbauendes gerades Wehr um $H = 1{,}1$ Mtr. aufzustauen behufs Fortleitung von 1,6 Cubikm. des aufgestauten Wassers durch einen abgezweigten Canal, so dass $Q = 3{,}2$ Cubikm. Wasser pro Sec. den Ueberfall bilden. Hier ist

$$h_0 = 1{,}5 \text{ Mtr.}, \quad F_0 = 12 \text{ Quadratm., also } k = 0{,}00815 \text{ Mtr.}$$

nach Gl. (12), und mit $\mu = 0{,}57$ nach Gl. 13):

$$x = H - h = 1{,}1 - 0{,}285 = 0{,}815 \text{ Mtr.}$$

die Höhe, bis zu welcher sich das Wehr über die Oberfläche des ungestauten Flusses erheben muss.

Nach den Gleichungen (15) findet man hier nahe denselben Werth, nämlich mit $\mu' = 0{,}57$:

$$h' = 0{,}293;\quad \mu = 0{,}579;\quad h = 0.290;\quad x = 0{,}810 \text{ Mtr.}$$

§. 138. Unvollkommene Ueberfälle.

Bei einem unvollkommenen Ueberfalle sei h_1 die Höhe des Oberwasserspiegels, h_2 die Höhe des Unterwasserspiegels über dem horizontalen Ueberfallrande, ersterer verstanden an einer Stelle (etwa 1 Mtr. stromaufwärts von der Wand, nämlich am Anfang der Stromschnelle), wo er noch fast eben, letzterer an einer solchen Stelle in ähnlicher Entfernung stromabwärts von der Wand, wo er wieder fast eben geworden ist, $h = h_1 - h_2$ die Höhendifferenz beider Wasseroberflächen, übrigens, wie im Vorhergehenden, b die Ueberfallbreite und k die der mittleren Geschwindigkeit im Querschnitt F_0 am Anfang der Stromschnelle entsprechende Höhe. Wenn dann wieder das Gefälle der Stromschnelle als eine Contractionserscheinung, somit das Rechteck $= bh_1$ als Durchflussöffnung betrachtet wird, so kann diese in zwei Theile zerlegt werden der Art, dass das Wasser im oberen von der Höhe h einen eigentlichen (vollkommenen) Ueberfall bildet, durch den unteren aber wie durch eine Mündung unter Wasser hindurchfliesst. Das den unvollkommenen Ueberfall bildende, pro Sec. durch die ganze Wandöffnung fliessende Wasserquantum ist dann mit Rücksicht auf Gl. (1) im vorigen §.

$$Q = b\sqrt{2g}\left\{\mu_1\left[(h+k)^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}}\right] + \mu_2 h_2 (h+k)^{\frac{1}{2}}\right\} \quad . . (1),$$

wie namentlich von Weisbach empfohlen wurde, indem er zugleich $\mu_1 = \mu_2$ und (für Ueberfälle über mehr oder weniger breiten und abgerundeten Dämmen, wie sie zu technischen Zwecken ausgeführt zu werden pflegen) $\mu_2 = 0{,}8$ setzte.

Durch Unterdrückung der Geschwindigkeitshöhe k vorbehaltlich der Berücksichtigung ihres Einflusses durch entsprechende Wahl der Coefficienten μ_1 und μ_2 geht Gl. (1) über in:

$$Q = b\sqrt{2gh}\,(\mu_1 h + \mu_2 h_2) \quad . . . . (2),$$

eine Formel, welche insbesondere von **Redtenbacher** empfohlen wurde, und zwar mit

$$\mu_1 = 0{,}57 \text{ und } \mu_2 = 0{,}62$$

gleichfalls mit Rücksicht auf solche Verhältnisse, wie sie bei technischen Ausführungen vorkommen.

Uebrigens beruhen sowohl jene von **Weisbach** als namentlich diese von **Redtenbacher** angegebenen Zahlenwerthe der Coefficienten zum Theil nur auf unsicherer Schätzung. Ausgedehnte Versuche wurden zwar von **Lesbros** angestellt und daraus auf Grund der Formel

$$Q = \mu b h_1 \sqrt{2gh} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \, 3.$$

in welche Gl. (2) mit $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ übergeht, die in der folgenden Tabelle enthaltenen Werthe von μ abgeleitet:

$\frac{h}{h_1}$	μ	$\frac{h}{h_1}$	μ	$\frac{h}{h_1}$	μ	$\frac{h}{h_1}$	μ	$\frac{h}{h_1}$	μ
0,002	0,295	0,009	0,600	0,04	0,531	0,2	0,507	0,55	0,466
0,003	0,363	0,01	0,596	0,045	0,526	0,25	0,502	0,6	0,459
0,004	0,430	0,015	0,580	0,05	0,522	0,3	0,497	0,7	0,444
0,005	0,496	0,02	0,570	0,06	0,519	0,35	0,492	0,8	0,427
0,006	0,556	0,025	0,557	0,08	0,517	0,4	0,487	0,9	0,409
0,007	0,597	0,03	0,546	0,1	0,516	0,45	0,480	1,0	0,390
0,008	0,605	0,035	0,537	0,15	0,512	0,5	0,474		

Abgesehen davon indessen, dass die grosse Verschiedenheit dieser Werthe gegen die Angemessenheit von Gl. (3) als Ausdruck der Gesetzmässigkeit der in Rede stehenden Erscheinung spricht, wurden auch die **Lesbros**'schen Versuche unter solchen Verhältnissen angestellt, welche für die technischen Anwendungen von wenig Interesse sind; sie beziehen sich auf schmale Ueberfälle ($b = 0{,}25$ Mtr.), die nur einen Theil der Canalbreite einnehmen.

Technisch werthvollere Versuche wurden in den Jahren 1866, 1867 und 1869 von **Bornemann** angestellt mit **Ueberfällen auf der ganzen Breite** ($b = b_0 = 1{,}135$ Mtr.) **des Canals**, hergestellt durch eingesetzte Bretterwände von verschiedenen Höhen, deren oberer horizontaler Rand gegen das Unterwasser hin abgeschrägt war.* Nachdem mit Hülfe der

* Bei Gelegenheit dieser Versuche wurden die im vorigen §. angeführten Resultate in Betreff **vollkommener** Ueberfälle auf der ganzen Breite des Canals nur nebenbei gewonnen, indem zur Erzielung verschiedener Höhen h_1 in einem Abstande = 3,7 Mtr. stromabwärts von der Ueberfallwand eine andere Bretterwand eingebaut wurde, über der das Wasser frei überfallend in einen Aichkasten zur Wassermessung abfloss.

gewonnenen 36 brauchbaren Gruppen zusammengehöriger (je als Mittel aus mehreren einzelnen Messungen erhaltenen) Werthe der Elemente Q, h_1, h_2 und der zur Bestimmung von

$$k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{F_0}\right)^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{bh_0}\right)^2 \qquad (4)$$

dienenden Wassertiefe im Querschnitte $F_0 = bh_0$ zunächst die Lesbros'sche Gl. (3) geprüft und, wie zu erwarten, untauglich gefunden worden war, wurden vermittels der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Werthe der Coefficienten von Gl. (1) zu

$$\mu_1 = 0{,}2203; \quad \mu_2 = 0{,}9053$$

berechnet mit einem wahrscheinlichen Fehler

$$r = 0{,}2045 \text{ von } \frac{Q}{b(h+k)\sqrt{2g(h+k)}}.$$

Uebrigens ergab sich r noch etwas kleiner, nämlich

$$r = 0{,}1970,$$

als bei Voraussetzung der zugleich einfacheren und somit empfehlenswertheren Gleichung:

$$Q = b\sqrt{2g(h+k)}\,[\mu_1(h+k) + \mu_2 h_2] \qquad (5),$$

erhalten aus Gl. (1) durch Unterdrückung von $k^{\frac{3}{2}}$ in dem Gliede mit μ_1, entsprechend dem Ersatz von Gl. (1) im vorigen §. durch Gl. (7) daselbst, die wahrscheinlichsten Werthe

$$\mu_1 = 0{,}2162; \quad \mu_2 = 0{,}9026 \qquad (6)$$

aus den Versuchen abgeleitet wurden.

Wenn man in Gl. (5): $h = h_1 - h_2$ setzt und dann Q als Function nur von h_2 betrachtet, so findet man leicht, dass es ein Maximum von Q giebt für

$$h_2 = \frac{2\mu_2 - 3\mu_1}{3(\mu_2 - \mu_1)}(h_1 + k) = 0{,}5123\,(h_1 + k) \qquad (7)$$

bei Einführung der Zahlenwerthe (6) von μ_1 und μ_2. Von der durch dieses h_2 bestimmten Höhenlage des Unterwasserspiegels ausgehend würde somit nicht nur das Steigen, sondern auch das Sinken desselben bei gleich bleibenden übrigen Elementen eine Abnahme von Q zur Folge haben, falls die Gleichungen (5) und (6) wenigstens für solche Verhältnisse als zuverlässig betrachtet werden dürfen, die den durch Gl. (7) bestimmten nahe kommen.

Indessen kann der wahrscheinliche Fehler $r = 0{,}197$, mit welchem nach Gl. (5) und (6) die Grösse

$$\frac{Q}{b(h+k)\sqrt{2g(h+k)}} = 0{,}2162 + 0{,}9026 \frac{h_2}{h+k}$$

gesetzt wurde, in Vergleich mit dem Werth dieser Grösse selbst (bei den Versuchen zwischen 0,484 und 17,63 liegend) doch zu gross werden, als dass bei den kleineren Werthen des Verhältnisses $\frac{h_2}{h+k}$ (bei den Versuchen zwischen 0,0606 und 18,18 liegend) der obigen Gl. (5) oder wenigstens den Werthen (6) von μ_1 und μ_2 eine hinlängliche Zuverlässigkeit zugeschrieben werden könnte, wie auch schon daraus zu entnehmen ist, dass für $h_2 = 0$, d. h. für den Uebergang des unvollkommenen Ueberfalles in einen vollkommenen die Gl. (5) mit Gl. (7) im vorigen §. der Form nach identisch wird, dass dagegen dann nach Gl. (8) daselbst dem Coefficienten $\mu = \mu_1$ ein wesentlich anderer Werth beigelegt werden muss, als 0,2162.

Unter diesen Umständen ist es vorzuziehen, auf eine allgemeine Gültigkeit der Formel zu verzichten und wenigstens für solche Fälle, in denen das Verhältniss $\frac{h_2}{h+k}$ unter einer gewissen Grenze liegt, die Coefficienten μ_1 und μ_2 besonders zu bestimmen. So fand Bornemann

$$\text{für } \frac{h_2}{h+k} < 3, \text{ also } \frac{h_2}{h_1+k} < 0{,}75$$

$$\mu_1 = 0{,}3448; \quad \mu_2 = 0{,}8364 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6_a)$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler

$$r = 0{,}0724 \text{ von } \frac{Q}{b(h+k)\sqrt{2g(h+k)}}.$$

Auf Grund dieser neuen Werthe von μ_1 und μ_2 wird nun auch die Höhe h_2, welche nach Gl. (7) dem Maximum von Q unter sonst gegebenen Umständen entspricht, eine andere, nämlich

$$h_2 = 0{,}4329\,(h_1 + k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7_a).$$

und es lässt sich erwarten, dass sie sich noch kleiner und richtiger ergeben hätte, wenn die wahrscheinlichsten Werthe von μ_1 und μ_2 für noch kleinere Grenzwerthe der Verhältnisse $\frac{h_2}{h+k}$ und $\frac{h_2}{h_1+k}$ aus der entsprechend kleineren Zahl der vorliegenden Versuche abgeleitet worden wären.

Für grössere Werthe dieser Verhältnisse sind zwar die Zahlenwerthe (6) von μ_1 und μ_2 in hinlänglichem Einklang mit den Versuchen; weil aber in solchen Fällen das Glied $\mu_2 h_2$ in Gl. (5) wesentlich $> \mu_1(h+k)$ ist, liess sich erwarten, dass ein meist schon genügender Ausdruck des gesetzmässigen Verhaltens durch die einfachere Gleichung

$$Q = \mu b h_2 \sqrt{2g(h+k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

gewährt werden würde. Bei Voraussetzung derselben fand Bornemann aus den betreffenden 12 seiner 36 Gruppen zusammengehöriger Versuchswerthe:

$$\mu = 0{,}9216 \text{ für } \frac{h_2}{h+k} > 3, \ \frac{h_2}{h_1+k} > 0{,}75 \quad \ldots (10)$$

mit dem wahrscheinlichen Fehler

$$r = 0{,}3125 \text{ von } \frac{Q}{b(h+k)\sqrt{2g(h+k)}} = \mu \frac{h_2}{h+k}$$

entsprechend einem wahrscheinlichen Fehler des Coefficienten μ selbst, der höchstens etwa $= 0{,}1$ sein kann.

Diese Gl. (9) gewährt den Vortheil, dass sie eine directe Berechnung der Wassermenge Q gestattet auch mit Rücksicht darauf, dass k von ihr abhängt. Durch Substitution des Ausdrucks (4) von k erhält man nämlich:

$$\left(\frac{Q}{\mu b h_2}\right)^2 - \left(\frac{Q}{b h_0}\right)^2 = 2gh$$

$$Q = \mu b h_2 \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\mu \frac{h_2}{h_0}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Bei der Benutzung von Gl. (5) zu demselben Zweck kann man bemerken, dass dieselbe aus Gl. (9) durch die Substitution

$$\mu h_2 = \mu_1 (h+k) + \mu_2 h_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

hervorgeht. Mit $\mu h_2 = \mu_1 h + \mu_2 h_2$, entsprechend der vorläufigen Annahme $k = 0$, findet man also aus Gl. (11) einen Näherungswerth Q' von Q, damit $k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q'}{b h_0}\right)^2$ und dann aus Gl. (12) einen corrigirten Werth von μh_2, endlich mit diesem aus Gl. (11) einen corrigirten Werth von Q.

Bei einem Grundwehr (unvollkommenen Ueberfallwehr), gebildet durch einen abgerundeten Damm, dessen horizontale Scheitellinie tiefer liegt, als der Unterwasserspiegel, ist der Coefficient μ_2 in Gl. (5) resp. μ in Gl. (9) ohne Zweifel grösser, als er von Bornemann bei scharfkantigem Ueberfallrande gefunden wurde; in welchem Grade freilich die Abrundung durch Schwächung der unteren Contraction den betreffenden Coefficienten vergrössert, kann nur durch specielle Versuche mit Zuverlässigkeit ermittelt werden. Wahrscheinlich wird man indessen nicht sehr irren, wenn man in solchen Fällen im Anschlusse an die Bornemann'schen Bestimmungen (8) von μ_1 und μ_2 bis auf Weiteres etwa

$$\mu_1 = 0{,}35; \quad \mu_2 = 0{,}9 \text{ für } h_2 < 0{,}75\,(h_1 + k) \quad \ldots (13)$$

setzt dagegen in Gl. (9) statt des Werthes (10):

$$\mu = 0{,}95 \text{ für } h_2 > 0{,}75\,(h_1 + k) \quad \ldots\ldots\ldots (14.$$

Behufs der Anlage eines solchen Wehrs ist vor Allem die Höhe zu berechnen, welche ihm unter gewissen Umständen gegeben werden muss. Ist dann wieder, ebenso wie bei dem im vorigen §. unter 4) berechneten Ueberfallwehr, Q_0 das pro Sec. durch jeden Querschnitt strömende ganze Wasserquantum des Flusses für den vorausgesetzten Zustand desselben, Q der Theil von Q_0, der über das Wehr hinweg fliessen soll, während der andere Theil $= Q_0 - Q$ von einem dicht oberhalb des Wehrs abgezweigten Canal aufgenommen wird, ist ferner H die gegebene Stauhöhe über der freien Oberfläche E des bei der Wassermenge Q_0 im gleichförmigen Beharrungszustande befindlichen Flusses und e die nach §. 136 zu berechnende Erniedrigung des Unterwasserspiegels in Folge der Reduction des Wasserquantums von Q_0 auf Q, endlich x die gesuchte Tiefe der Scheitellinie des Wehrs unter der Ebene E, so hat man

$$h_1 = x + H,\; h_2 = x - e,\; h = H + e,$$

also nach Gl. (5) mit $k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_0}{F_0}\right)^2$

$$x = h_2 + e = \frac{Q}{\mu_2 b\sqrt{2g(H+e+k)}} - \frac{\mu_1}{\mu_2}(H+e+k) + e \quad (15.$$

vorausgesetzt, dass sich hiernach $x > e$ ergiebt, widrigenfalls die Höhe des Wehrs als eines Ueberfallwehrs im engeren Sinne nach Gl. (13) des vorigen §. zu berechnen wäre. Gewöhnlich ist hierbei $h_2 < 0{,}75\,(h_1 + k)$ und kann also $\mu_1 = 0{,}35$ und $\mu_2 = 0{,}9$ gesetzt werden.

Wenn z. B. die Aufgabe zu Ende des vorigen §. unter Beibehaltung der Daten:

$$a = 0{,}1 \text{ Mtr.},\; b = 8 \text{ Mtr.},\; Q_0 = 4{,}8 \text{ Cubikm.},\; Q = 3{,}2 \text{ Cubikm.}$$

dahin abgeändert wird, dass die Stauhöhe H nur 0,15 Mtr. betragen soll, so ist

$$F_0 = 8 \cdot 0{,}55 = 4{,}4 \text{ Quadratm.},\; k = 0{,}0606 \text{ Mtr.}$$

Um nun zunächst die Grösse e nach Gl. (5), §. 136 zu berechnen, [illegible] die Coefficienten x und y dieser Gleichung der dort mitgetheilten Tabelle [illegible] werden entsprechend $\frac{Q}{Q_0} = \frac{2}{3}$ und dem Werthe von $\frac{B}{b}$ [illegible]. Grösse B ist aber nach der betreffenden Tabelle in §. 126 durch das [illegible] für den gleichförmigen Beharrungszustand des Flusses, welches [illegible] vorliegenden Falle $= 0{,}[illegible]$ sei, und durch den Rauhigkeitscoefficienten [illegible]

n bestimmt. Letzterer könnte aus c und den übrigen Daten der Aufgabe nach Gl. (12), §. 133 abgeleitet werden; weil indessen der Coefficient n nur in untergeordnetem Grade von $\frac{B}{\sqrt{a}}$ abhängt, genügt für den vorliegenden Zweck die Annahme eines Mittelwerthes von n, etwa $n = 0{,}025$, welchem und $\alpha = 0{,}003$ nach der Tabelle in §. 126

$$B = 0{,}588, \text{ also } \frac{B}{\sqrt{a}} = 0{,}93$$

entspricht. Hiermit und mit $\frac{Q}{Q_4} = \frac{2}{3}$ ergiebt sich aus der betreffenden Tabelle in §. 136

$$x = 0{,}798 \text{ und } y = 0{,}158$$

und aus Gl. (5) daselbst

$$e = a\left(1 - x\right)\left(1 - y\frac{a}{b}\right) = 0{,}0833 \text{ Mtr.}$$

Jetzt kann die Tiefe x der Scheitellinie des Wehrs unter der Wasseroberfläche E des ursprünglichen Flusses nach Gl. (15) berechnet werden, und ergiebt sich mit $\mu_1 = 0{,}35$ und $\mu_2 = 0{,}9$

$$x = 0{,}1851 - 0{,}1143 + 0{,}0833 = 0{,}1541 \text{ Mtr.} > e,$$

$$h_1 = 0{,}3041 \text{ Mtr.}, \quad h_2 = 0{,}0708 \text{ Mtr.} < 0{,}75\,(h_1 - k)$$

zu nachträglicher Rechtfertigung des Gebrauchs von Gl. (15) mit den angenommenen Werthen von μ_1 und μ_2.

§. 139. Freie Wandöffnung mit Ansatzgerinne.

Am Ende eines cylindrischen Canals (Zuflusscanals) befinde sich eine verticale Wand mit einer rechteckigen freien Oeffnung, d. h. einem oben offenen Einschnitte mit einem horizontalen unteren Rande und zwei verticalen Seitenrändern. An diese Wandöffnung schliesse sich ein sogenanntes Ansatzgerinne an, d. h. ein cylindrischer Abflusscanal in solcher Weise, dass die Randlinie der Wandöffnung ein Querprofil dieses Canals ist. Das am Ende des Zuflusscanals durch die Wand aufgestaute Wasser bildet dann einen unvollkommenen Ueberfall, indem es die freie Wandöffnung durchströmt, um mit vergrösserter Geschwindigkeit im Ansatzgerinne abzufliessen. Die Eigenthümlichkeit dieser besonderen Art eines unvollkommenen Ueberfalles besteht aber darin, dass die Tiefe des horizontalen Ueberfallrandes unter dem Unterwasserspiegel ein Maximum, nämlich h_2 (bei Beibehaltung

setzt, dagegen in Gl. (9) statt des Werthes (10):

$$\mu = 0{,}98 \text{ für } h_2 > 0{,}75\,(h_1 + k) \quad \ldots\ldots\ldots (14).$$

Behufs der Anlage eines solchen Wehrs ist vor Allem die Höhe zu berechnen, welche ihm unter gewissen Umständen gegeben werden muss. Ist dann wieder, ebenso wie bei dem im vorigen §. unter 4) berechneten Ueberfallwehr, Q_0 das pro Sec. durch jeden Querschnitt strömende ganze Wasserquantum des Flusses für den vorausgesetzten Zustand desselben, Q der Theil von Q_0, der über das Wehr hinweg fliessen soll, während der andere Theil $= Q_0 - Q$ von einem dicht oberhalb des Wehrs abgezweigten Canal aufgenommen wird, ist ferner H die gegebene Stauhöhe über der freien Oberfläche E des bei der Wassermenge Q_0 im gleichförmigen Beharrungszustande befindlichen Flusses und e die nach §. 136 zu berechnende Erniedrigung des Unterwasserspiegels in Folge der Reduction des Wasserquantums von Q_0 auf Q, endlich x die gesuchte Tiefe der Scheitellinie des Wehrs unter der Ebene E, so hat man

$$h_1 = x + H,\quad h_2 = x - e,\quad h = H + e,$$

also nach Gl. (5) mit $k = \frac{1}{2g}\left(\frac{Q_0}{F_0}\right)^2$

$$x = h_2 + e = \frac{Q}{\mu_2 b\sqrt{2g(H+e+k)}} - \frac{\mu_1}{\mu_2}(H+e+k) + e \quad (15),$$

vorausgesetzt, dass sich hiernach $x > e$ ergiebt, widrigenfalls die Höhe des Wehrs als eines Ueberfallwehrs im engeren Sinne nach Gl. (13) im vorigen §. zu berechnen wäre. Gewöhnlich ist hierbei $h_2 < 0{,}75\,(h_1 + k)$ und kann also $\mu_1 = 0{,}35$ und $\mu_2 = 0{,}9$ gesetzt werden.

Wenn z. B. die Aufgabe zu Ende des vorigen §. unter Beibehaltung der Daten:

$$a = 0{,}4 \text{ Mtr.},\quad b = 8 \text{ Mtr.},\quad Q_0 = 4{,}8 \text{ Cubikm.},\quad Q = 3{,}2 \text{ Cubikm.}$$

dahin abgeändert wird, dass die Stauhöhe H nur 0,15 Mtr. betragen soll, so ist

$$F_0 = 8 \,.\, 0{,}55 = 4{,}4 \text{ Quadratm.},\quad k = 0{,}0606 \text{ Mtr.}$$

Um nun zunächst die Grösse e nach Gl. (5), §. 136 zu berechnen, können die Coefficienten x und y dieser Gleichung der dort mitgetheilten Tabelle entnommen werden entsprechend $\frac{Q}{Q_0} = \frac{2}{3}$ und dem Werthe von $\frac{B}{\sqrt{a}}$. Die Grösse B ist aber nach der betreffenden Tabelle in §. 126 durch das Gefälle α für den gleichförmigen Beharrungszustand des Flusses, welches im vorliegenden Falle $= 0{,}003$ sei, und durch den Rauhigkeitscoefficienten

n bestimmt. Letzterer könnte aus α und den übrigen Daten der Aufgabe nach Gl. (12), §. 133 abgeleitet werden; weil indessen der Coefficient x nur in untergeordnetem Grade von $\frac{B}{\sqrt{a}}$ abhängt, genügt für den vorliegenden Zweck die Annahme eines Mittelwerthes von n, etwa $n = 0{,}025$, welchem und $\alpha = 0{,}003$ nach der Tabelle in §. 126

$$B = 0{,}588\,, \quad \text{also} \quad \frac{B}{\sqrt{a}} = 0{,}93$$

entspricht. Hiermit und mit $\frac{Q}{Q_0} = \frac{2}{3}$ ergiebt sich aus der betreffenden Tabelle in §. 136

$$x = 0{,}798 \quad \text{und} \quad y = 0{,}158$$

und aus Gl. (5) daselbst

$$e = a\left[1 - x\left(1 - y\,\frac{a}{b}\right)\right] = 0{,}0833 \text{ Mtr.}$$

Jetzt kann die Tiefe x der Scheitellinie des Wehrs unter der Wasseroberfläche E des ursprünglichen Flusses nach Gl. (15) berechnet werden, und ergiebt sich mit $\mu_1 = 0{,}35$ und $\mu_2 = 0{,}9$

$$x = 0{,}1851 - 0{,}1143 + 0{,}0833 = 0{,}1541 \text{ Mtr.} > e,$$

$$h_1 = 0{,}3041 \text{ Mtr.}, \quad h_2 = 0{,}0708 \text{ Mtr.} < 0{,}75\,(h_1 + k)$$

zu nachträglicher Rechtfertigung des Gebrauchs von Gl. (15) mit den angenommenen Werthen von μ_1 und μ_2.

§. 139. Freie Wandöffnung mit Ansatzgerinne.

Am Ende eines cylindrischen Canals (Zuflusscanals) befinde sich eine verticale Wand mit einer rechteckigen freien Oeffnung, d. h. einem oben offenen Einschnitte mit einem horizontalen unteren Rande und zwei verticalen Seitenrändern. An diese Wandöffnung schliesse sich ein sogenanntes Ansatzgerinne an, d. h. ein cylindrischer Abflusscanal in solcher Weise, dass die Randlinie der Wandöffnung ein Querprofil dieses Canals ist. Das am Ende des Zuflusscanals durch die Wand aufgestaute Wasser bildet dann einen unvollkommenen Ueberfall, indem es die freie Wandöffnung durchströmt, um mit vergrösserter Geschwindigkeit im Ansatzgerinne abzufliessen. Die Eigenthümlichkeit dieser besonderen Art eines unvollkommenen Ueberfalles besteht aber darin, dass die Tiefe des horizontalen Ueberfallrandes unter dem Unterwasserspiegel ein Maximum, nämlich h_2 (bei Beibehaltung

der im vorigen §. gebrauchten Buchstabenbezeichnungen) zugleich die dem gleichförmigen Beharrungszustande entsprechende Wassertiefe im Abflusscanal ist; dabei wird das Gefälle $= \alpha$ des letzteren als hinlänglich gross vorausgesetzt, um den Eintritt dieses gleichförmigen Beharrungszustandes schon in mässiger Entfernung von der Ueberfallwand zu ermöglichen.

Sofern nun hier h_2 ein verhältnissmässig grosser Theil von h_1 zu sein pflegt, kann nach Gl. (9) und (11) im vorigen §. gesetzt werden:

$$Q \doteq \mu b h_2 \sqrt{2g(h+k)} = \mu b h_2 \sqrt{\frac{2gh}{1-(\mu n)^2}} \quad \ldots\ldots 1,$$

unter n das Verhältniss der Wasserquerschnitte im Ansatzgerinne und im Zuflusscanal (am Anfang der Stromschnelle vor der Ueberfallwand verstanden.

Schliesst sich das Ansatzgerinne an eine freie Oeffnung in der Seitenwand eines grösseren Behälters, so wird mit $k = 0$, $n = 0$:

$$Q = \mu b h_2 \sqrt{2gh} = \mu b h_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad \ldots\ldots\ldots 2.$$

In Folge der besonderen Bedeutung von h_2 steht nun aber diese Grösse hier noch in einer anderen Beziehung zu Q, die ausserdem namentlich vom Gefälle α des Ansatzgerinnes abhängt; nach §. 126, Gl. (13) und (14) ist nämlich

$$\frac{Q}{bh_2} = k\sqrt{r\alpha} \text{ mit } k = \frac{A}{1+\frac{B}{\sqrt{r}}},\ r = \frac{bh_2}{b+2h_2} \quad \ldots\ 3,$$

unter A und B Coefficienten verstanden, die von der Beschaffenheit der Wände des Ansatzgerinnes sowie von α abhängig sind und (dort mit a und b bezeichnet) der betreffenden Tabelle in §. 126 entnommen werden können. Durch Gl. (2) und (3) sind zwei der Grössen

$$Q \quad b \quad h_1 \quad h_2 \quad \alpha$$

bestimmt, wenn die übrigen gegeben sind und μ bekannt ist. Zur Ableitung von μ aus Versuchen müssten alle diese Grössen ausser einer durch Messung bekannt sein.

Dergleichen Versuche von Lesbros mit Ansatzgerinnen von $b = 0,2$ Mtr. Breite und $\alpha = 0$ bei 3 Mtr. Länge oder $\alpha = 0,1$ bei 2,5 Mtr Länge haben wenig praktischen Werth. In dem horizontalen Gerinne ($\alpha = 0$) konnte ein gleichförmiger Beharrungszustand des abfliessenden Wassers gar nicht eintreten, musste vielmehr die Wassertiefe bis zum Ende stetig abnehmen und das Versuchsresultat durch die zufällig benutzte Länge des Gerinnes $=$ 3 Mtr. wesentlich bedingt sein. Bei dem an-

wöhnlich grossen Gefälle $\alpha = 0{,}1$ war dagegen h_2 so klein im Vergleich mit h_1, dass Gl. (2) auf diesen Fall nicht passt und die Verhältnisse sich denen eines freien Ausflusses näherten; auf Grund der Gleichung

$$Q = \mu b h_1 \sqrt{2gh_1}$$

wurden in der That die Werthe von μ nur wenig kleiner, als die in §. 137 unter 1) für $b = 0{,}2$ Mtr. angegebenen gefunden.

Nach Dubuat und nach Eytelwein ist für solche Verhältnisse, wie sie bei technischen Ausführungen vorzukommen pflegen, in Gl. (1) oder (2) der Coefficient $\mu = 0{,}75 - 1$ zu setzen, wachsend mit den Dimensionen des Abflusscanals, dagegen um so kleiner, je vollständiger und vollkommener die Contraction sich ausbilden kann*. Bei der Unsicherheit dieser weiten Grenzen dürften einstweilen auch für den vorliegenden Fall die Bornemann'schen Versuche mit unvollkommenen Ueberfällen den zuverlässigsten Anhalt gewähren. Setzt man danach für den Fall, dass nur am unteren scharfkantigen Rande Contraction stattfindet (abgesehen von der oberen Contraction durch Senkung der Wasseroberfläche in der Stromschnelle)

$$\mu = 0{,}92 \quad \text{gemäss Gl. (10) im vorigen §.,}$$

so mag nach Analogie von §. 84 unter 4) bei vollkommener Contraction auch an den Seiten:

$$\mu = \frac{0{,}92}{1 + 0{,}14 \dfrac{h_1}{b + h_1}} \text{ nahe } = 0{,}92\left(1 - 0{,}14 \frac{h_1}{b + h_1}\right) \quad . \quad (4)$$

gesetzt werden; wenn aber auch am unteren Rande durch Abrundung die Contraction als aufgehoben zu betrachten ist:

$$\mu = 0{,}92\left[1 + 0{,}14 \frac{b}{2(b + h_1)}\right] = 0{,}92\left(1 + 0{,}07 \frac{b}{b + h_1}\right) \quad . \quad (5).$$

Als Beispiel diene die folgende Aufgabe d'Aubuisson's**:

Aus einem Flussbassin (einer sogen. Anspannung) wird ein Quantum Wasser unter der Bedingung gekauft, dass dasselbe durch einen rechtwinkligen, 4 Mtr. breiten Ausschnitt in der Dammkappe, dessen Schwelle 2 Mtr. unter dem tiefsten Wasserstande des Bassins angeordnet ist, abgeleitet werde. Das gekaufte Wasser soll nach einer 265 Mtr. entfernten Stelle zum Wasserradbetriebe und zwar in der Weise fortgeleitet werden,

* M. Rühlmann, Hydromechanik, S. 328.

** Traité d'hydraulique, p. 150 nach M. Rühlmann's Hydromechanik, S. 330.

dass der Wasserspiegel am Ende des mit gleichem Querschnitt an den Ausschnitt sich anschliessenden Leitungscanals 0,44 Mtr. unter dem Niveau des Sammelbehälters beim kleinsten Wasser desselben liegt. Welche Wassermenge (Q) wird hiernach (bei dem vorausgesetzten niedrigsten Wasserstande) der Canal fortzuleiten haben, welches relative Gefälle (α) wird derselbe erhalten müssen, und wie gross wird die Wassertiefe (h_2) in ihm sein?

Von den 5 Grössen Q, b, h_1, h_2, α sind hier nur zwei:

$$b = 4 \text{ Mtr.}, \quad h_1 = 2 \text{ Mtr.}$$

gegeben, dagegen hat man zur Berechnung der übrigen, wenn $l = 265$ Mtr. die gegebene Länge des Canals bedeutet, ausser den Gleichungen (2) und (3) noch die weitere Bedingung:

$$h_1 - h_2 + l\alpha = 0{,}44, \text{ also } h_2 - 265\alpha = 1{,}56.$$

Bei ringsum scharfkantigem Rande des Einschnitts wäre nach Gl. (4)

$$\mu = 0{,}92\left(1 - 0{,}14\,\frac{2}{4+2}\right) = 0{,}877,$$

wofür aber nach Schätzung $\mu = 0{,}9$ gesetzt werde besonders mit Rücksicht darauf, dass schon durch die gegen die Lothrechte geneigte Lage der dem Bassin zugekehrten Seitenebene des Dammes die Contraction am unteren Rande der Oeffnung geschwächt wird (d'Aubuisson setzt hier $\mu = 0{,}905$). Unter der Voraussetzung ferner, dass der Canal in Bruchsteinen ausgeführt wird, kann nach §. 126 sein Rauhigkeitscoefficient $n = 0{,}017$ gesetzt werden. Nimmt man nun h_2 versuchsweise zwischen 1,56 und 2 Mtr. an, so findet man dazu $\alpha = \frac{h_2 - 1{,}56}{265}$, damit und mit $n = 0{,}017$ die Coefficienten A und B nach §. 126, dann der Reihe nach r, k und Q nach Gl. (3), endlich auch Q nach Gl. (2), und ist nun die Annahme von h_2 so lange zu corrigiren bis beide Werthe von Q genügend übereinstimmen. Auf diese Weise ergiebt sich:

$$h_2 = 1{,}809 \text{ Mtr.}, \quad \alpha = 0{,}00094, \quad Q = 12{,}61 \text{ Cubikm.} —$$

Schliesslich ist zu bemerken, dass, wenn das Ansatzgerinne nicht, wie hier vorausgesetzt wurde, einen ebenen Boden mit dem Gefälle α und verticale ebene Seitenwände hat, vielmehr sein Querprofil und entsprechend die Randlinie der Wandöffnung von irgend einer anderen Form ist, statt Gl. (1) und (3) gesetzt werden kann:

$$Q = \mu F\sqrt{2g(h+k)} = \mu F\sqrt{\frac{2gh}{1-(\mu n)^2}} \quad \ldots \ldots$$

$$Q = kF\sqrt{ra} \text{ mit } k = \frac{A}{1 + \frac{B}{\sqrt{r}}},\ r = \frac{F}{p} \ \ldots\ldots (7),$$

unter F den Wasserquerschnitt im Ansatzgerinne und unter p das benetzte Querprofil desselben verstanden. Der Werth von μ ist dann aber nicht mit gleicher Annäherung wie oben auf Grund bekannter Erfahrungen anzugeben.

§. 140. Aufstau des Wassers durch seitliche Querschnittsverengung.

Eine Querschnittsverengung des Wasserstroms nach der Breite, nämlich durch Wände mit verticalen Rändern, die bis zum Canalboden hinabreichen, wird namentlich bei Flüssen durch Brückenpfeiler verursacht. Ist dabei für den unverengten und im gleichförmigen Beharrungszustande befindlichen Fluss:

- a die mittlere Tiefe, b die Wasserbreite entsprechend der Wassermenge $Q = abu$, also
- u die mittlere Geschwindigkeit, ist ferner bei gleicher Höhe der freien Wasseroberfläche
- b_1 die durch die Pfeiler verminderte Wasserbreite,
- a_1 die möglicher Weise zugleich etwas veränderte mittlere Tiefe zwischen den Pfeilern, und ist endlich
- h die Höhe des durch die Querschnittsverengung verursachten Staues, d. h. die Höhendifferenz des Ober- und Unterwasserspiegels etwas stromaufwärts resp. stromabwärts von den Pfeilern, nämlich am Anfang der Stromschnelle vor resp. jenseits der Wellen und Wirbel hinter den Pfeilern,

so kann nach Analogie der für unvollkommene Ueberfälle bei verhältnissmässig kleiner Höhendifferenz h geltenden Gleichung (9) in §. 138 gesetzt werden:

$$Q = \mu a_1 b_1 \sqrt{2g(h + k)} \text{ mit } k = \frac{1}{2g}\left[\frac{Q}{(a + h)b}\right]^2$$

vorausgesetzt dass der gewöhnlich nur kleine Aufstau mit keiner erheblichen Vergrösserung der ursprünglichen Wasserbreite b verbunden ist. Daraus ergiebt sich für die Stauhöhe:

$$\left(\frac{Q}{\mu a_1 b_1}\right)^2 - \left[\frac{Q}{(a + h)b}\right]^2 = \left[\left(\frac{ab}{\mu a_1 b_1}\right)^2 - \left(\frac{a}{a + h}\right)^2\right] u^2 = 2gh$$

$$h = \left[\left(\frac{ab}{\mu a_1 b_1}\right)^2 - \left(\frac{a}{a+h}\right)^2\right]\frac{u^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots (1,$$

worin gewöhnlich $a_1 = a$ gesetzt und auf der rechten Seite wenigstens behufs einer ersten Annäherung h neben a vernachlässigt werden kann. Was den Coefficienten μ betrifft, so ist nach Eytelwein, Navier und Gauthey anzunehmen:

$\mu = 0{,}85$ bei Pfeilern mit rechteckigem Horizontaldurchschnitt, also ebener und vom Wasserstrom rechtwinkelig getroffener Vorderfläche,
$\mu = 0{,}9 - 0{,}95$ bei Pfeilern, deren Vordertheil unter einem grösseren oder kleineren Winkel ebenflächig zugeschärft ist,
$\mu = 0{,}95$ bei halbkreisförmig abgerundetem Vordertheil,
$\mu = 0{,}95 - 0{,}98$ bei spitzbogenförmig abgerundetem und zugleich zugeschärftem Vordertheil der Pfeiler.

Bei der Schwierigkeit der diesen Angaben zu Grunde liegenden Messungen von h (erschwert besonders durch die im Vergleich mit h selbst oft nicht unbeträchtlichen Unregelmässigkeiten der freien Wasseroberfläche) kann ihnen eine grosse Sicherheit nicht zugeschrieben werden. Auch wird, da die Contraction nicht nur von der Gestalt, sondern auch von der Breite der Pfeiler abhängt, und der Aufstau nicht nur durch die vergrösserte Geschwindigkeit im verengten Querschnitt, sondern auch durch die Reibung des Wassers an den Pfeilern bedingt wird, der Coefficient μ ohne Zweifel zugleich von der Zahl, von der Länge und Breite und von der Oberflächenbeschaffenheit der Pfeiler abhängig sein, so dass die obigen Werthe von μ nur als für mittlere in diesen Beziehungen übliche Verhältnisse passend betrachtet werden können.

IV. Bewegung freier Wasserstrahlen.

§. 141. Steighöhe springender Strahlen. Erfahrungsresultate.

Die ältesten Versuche über die Höhe, bis zu welcher ein aus einer Mündung in die freie Luft vertical aufwärts ausfliessender Wasserstrahl unter übrigens gegebenen Umständen aufsteigt, wurden zu Anfang des vorigen Jahrhunderts von Mariotte angestellt bei Druckhöhen bis 35 par. Fuss mit kreisförmigen Mündungen in der dünnen Wand von 3, 4 und 6 Linien Weite. Spätere Versuche von Bossut, Weisbach (1841) und von Baumgarten waren kaum ebenso umfassend wie jene ältesten, so dass sie höchstens zur Controle der Mariotte'schen Versuche, und

aber zur näheren Feststellung des dadurch noch sehr unbestimmt gelassenen Gesetzes dienen konnten, nach welchem die Steighöhe von der Ausflussgeschwindigkeitshöhe sowie von der Form und Weite der Mündungen abhängt. Ausgedehntere Versuche darüber sind erst 1856 und 1859 von Weisbach bei Druckhöhen bis zu 21 Mtr. mit verschiedenen Mündungen und Mundstücken von 4 bis 25 Millim. Mündungsweite angestellt worden*. Ist H die Ueberdruckhöhe des ausfliessenden Wassers, gemessen an einer Stelle dicht vor der Mündung resp. dem Mundstück und vermindert um die kleine Höhe der Mündungsebene über dieser Stelle, also

$$H = (1 + \zeta) h,$$

unter h die Ausflussgeschwindigkeitshöhe und unter ζ den Widerstandscoefficienten der Mündung resp. des Mundstücks verstanden, ist ferner s die von der Mündungsebene aus gerechnete Steighöhe des vertical aufsteigenden Strahls, so hatte Mariotte aus seinen Versuchen für Kreismündungen in der dünnen Wand die Formel abgeleitet:

$$H = s\left(1 + \frac{s}{300}\right) \text{ für den par. Fuss als Längeneinheit,}$$

$$= s\,(1 + 0{,}01026\,s) \text{ für das Meter } \quad " \qquad "$$

insbesondere entsprechend den Mündungen von 6 Linien Weite; für die engeren Mündungen wurde die Widerstandshöhe $= H - s$ ihrer Weite ungefähr umgekehrt proportional gefunden. Bossut fand den Einfluss der Mündungsweite, also der Strahldicke, in demselben Sinne nicht ganz so bedeutend, constatirte aber einen Einfluss der Strahlrichtung insofern als eine kleine Abweichung derselben von der Lothrechten eine merkliche Vergrösserung der Steighöhe bewirkt. D'Aubuisson setzte auf Grund der Versuche von Mariotte und Bossut:

$$s = H(1 - 0{,}01\,H).$$

Nach Weisbach stimmen diese Formeln, deren bestimmte Zahlencoefficienten wesentlich an die Voraussetzung einer kreisförmigen Mündung von ungefähr 6 par. Linien = 13,5 Millim. Weite in dünner Wand gebunden sind, selbst ihrer allgemeinen Form nach nur für $H < 5$ Mtr. genügend mit den thatsächlichen Verhältnissen überein. Er legte der Vergleichung seiner Versuche die Formel

$$s = \frac{H}{\alpha + \beta H + \gamma H^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

zu Grunde, indem er die Coefficienten α, β, γ für die verschiedenen

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1861, S. 113.

Weiten und Arten von Mündungen besonders bestimmte. Bei grossen Werthen von H verliert sie zwar auch ihre Anwendbarkeit; denn da es nicht denkbar ist, dass von einer gewissen Grenze an s abnehmen sollte, während H wächst, vielmehr höchstens s asymptotisch einer gewissen Grenze sich nähern wird, während H ohne Ende zunimmt, so kann Gl. (1) nur bis zu solchen Werthen von H zutreffend sein, die kleiner als diejenigen $= H_2$ sind, für welche

$$\frac{H}{\alpha + \beta H + \gamma H^2} = max. \text{ ist, nämlich:}$$

$$\alpha + \beta H + \gamma H^2 - H(\beta + 2\gamma H) = 0; \quad H = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} = H_2 \quad . \quad 2.$$

Bis zu $H = H_1$, unter H_1 den oberen Grenzwerth von H bei seinen betreffenden Versuchen verstanden, fand übrigens Weisbach die Gl. (1) bei entsprechender Bestimmung von α, β, γ stets in guter Uebereinstimmung mit den Versuchen; ob sie auch noch mehr oder weniger darüber hinaus mit Zuverlässigkeit zu Grunde gelegt werden kann, wird davon abhängen, ob H_1 mehr oder weniger $< H_2$ war.

Von allgemeinen Resultaten der Weisbach'schen Versuche sind folgende bemerkenswerth:

1) Bis zu $H = 2$ Mtr. ist ohne merklichen Fehler:

$$s = h = \frac{H}{1 + \zeta}.$$

2) Unter übrigens gleichen Umständen ist $\frac{s}{H}$ um so grösser, je grösser das Verhältniss des Inhaltes zum Umfange der Mündung ist, insbesondere also grösser bei kreisförmigen, als bei quadratischen und anders gestalteten Mündungen.

3) Bei innen abgerundeten kurzen cylindrischen und conischen Ansatzröhren, bei denen keine oder nur eine sehr schwache Contraction des austretenden Strahls stattfindet, ist $\frac{s}{H}$ grösser, als bei Mündungen in dünnen Wand, vermuthlich weil der im letzteren Falle mit periodisch abwechselnden Anschwellungen und Zusammenziehungen empor steigende Strahl dadurch mehr Veranlassung zu Widerständen bietet.

Bei den folgenden Angaben über die aus den einzelnen Versuchsreihen abgeleiteten Werthe der Coefficienten α, β, γ von Gl. (1) bedeutet d den Durchmesser einer kreisförmigen Mündung in Millimetern, während H_1 und H_2 (in Metern ausgedrückt) die oben angeführten Bedeutungen haben.

a. Mündungen in der dünnen Wand.

α. Kreisförmige Mündungen.

d	α	β	γ	H_1	H_2
4,0	1	0,02631	0	2,6	∞
7,1	1	0,01035	0,001185	12,6	29,0
10,0	1	0,01158	0,000582	21,8	41,5
14,1	1	0,00778	0,000604	17,9	40,7
25,5	1	0,00094	0,000228	13,7	66,2

Hiernach ergeben sich für diese Durchmesser d und für verschiedene Werthe von H beispielsweise die folgenden Verhältnisse $\frac{s}{H}$:

H	$d = 4$	$d = 7,1$	$d = 10$	$d = 14,1$	$d = 25,5$
1	0,974	0,988	0,988	0,992	0,999
2	0,950	0,976	0,976	0,982	0,997
3	0,927	0,960	0,962	0,972	0,995
4	0,905	0,943	0,947	0,961	0,993
5	—	0,925	0,933	0,949	0,990
6	—	0,905	0,917	0,936	0,986
7	—	0,885	0,901	0,923	0,982
8	—	0,863	0,885	0,908	0,978
9	—	0,841	0,869	0,894	0,974
10	—	0,818	0,853	0,879	0,969
11	—	0,796	0,835	0,863	0,963
12	—	0,772	0,818	0,847	0,958
13	—	0,749	0,801	0,831	0,951
14	—	0,726	0,784	0,815	0,945
15	—	0,703	0,766	0,798	0,939
16	—	0,681	0,750	0,782	0,932
17	—	—	0,733	0,765	—
18	—	—	0,716	0,749	—
19	—	—	0,699	0,732	—
20	—	—	0,683	0,716	—

β. **Eine quadratische Mündung** von 7,8 Millim. Seitenlänge, also ungefähr gleichem Inhalt mit der kreisförmigen Mündung von 10 Millim. Durchm., ($H_1 = 21,1$ Mtr.) gab:

$$\alpha = 1; \quad \beta = 0,02024; \quad \gamma = 0,000940; \quad (H_2 = 32,6 \text{ Mtr.}),$$

also bei gleichem H ein bedeutend kleineres s, als die kreisförmige Mündung von gleicher Grösse.

b. Conische und conoidische Mundstücke.

α. **Kurzes conoidisches Mundstück mit allmähligem Uebergang i.. die ebene Gefässwand nach innen und cylindrischem Verlauf nach au... zu der 10 Millim. weiten Mündung.** ($H_1 = 17{,}8$ Mtr.)

$\alpha = 1{,}0272$; $\beta = 0{,}00048$; $\gamma = 0{,}000956$; ($H_2 = 32{,}8$ Mtr.

H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$
1	0,972	6	0,940	11	0,871	16	0,781
2	0,969	7	0,929	12	0,855	17	0,762
3	0,964	8	0,916	13	0,837	18	0,744
4	0,958	9	0,901	14	0,819	19	0,725
5	0,950	10	0,887	15	0,801	20	0,705

β. **Kurzes conisches Mundstück mit innerer Abrundung von 1.. Millim. Mündungsweite, 20 Millim. Weite am inneren Ende, 40 Milli.. Länge.** ($H_1 = 20{,}5$ Mtr.)

$\alpha = 1{,}0162$; $\beta = 0{,}00711$; $\gamma = 0{,}000406$; ($H_2 = 50{,}0$ Mtr.

H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$
1	0,977	7	0,921	13	0,850	19	0,770
2	0,969	8	0,910	14	0,838	20	0,757
3	0,961	9	0,898	15	0,824	21	0,744
4	0,952	10	0,886	16	0,810	22	0,730
5	0,942	11	0,874	17	0,797	23	0,717
6	0,932	12	0,862	18	0,784	24	0,704

γ. **Längeres conisches Mundstück mit innerer Abrundung von 1.. Millim. Mündungsweite, 38 Millim. Weite am inneren Ende, 145 Mil.. Länge.** ($H_1 = 18{,}1$ Mtr.)

$\alpha = 1{,}0453$; $\beta = 0{,}00037$; $\gamma = 0{,}000859$; ($H_2 = 34{,}9$ Mtr

H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$
1	0,955	6	0,928	11	0,867	16	0,787
2	0,952	7	0,918	12	0,853	17	0,769
3	0,949	8	0,907	13	0,837	18	0,752
4	0,942	9	0,894	14	0,820	19	0,734
5	0,936	10	0,881	15	0,804	20	0,716

δ. **Längeres und weiteres conisches Mundstück mit innerer Abrundung von 14,1 Millim. Mündungsweite, 38 Millim. Weite am inneren Ende und 105 Millim. Länge, erhalten aus dem vorigen Mundstück durch Verkürzung um 40 Millim.** ($H_1 = 13,5$ Mtr.)

$\alpha = 1,0216$; $\beta = 0,00239$; $\gamma = 0,000327$; ($H_2 = 55,9$ Mtr.)

H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$
1	0,977	5	0,960	9	0,935	13	0,903
2	0,973	6	0,954	10	0,928	14	0,894
3	0,969	7	0,949	11	0,920	15	0,884
4	0,965	8	0,942	12	0,911	16	0,874

ε. **Conische Ansatzröhre mit innerer Abrundung von 16 Millim. Mündungsweite, 51 Millim. Weite am inneren Ende und 245 Millim. Länge.** (Versuche nur mit grösseren Druckhöhen von 5,3 Mtr. bis $H_1 =$ 17,7 Mtr.)

$\alpha = 1,060$; $\beta = -0,00529$; $\gamma = 0,000718$; ($H_2 = 38,4$ Mtr.)

H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$	H	$\frac{s}{H}$
5	0,950	9	0,934	13	0,898	17	0,849
6	0,949	10	0,927	14	0,887	18	0,835
7	0,945	11	0,918	15	0,876	19	0,820
8	0,940	12	0,909	16	0,863	20	0,806

c. Cylindrische Ansatzröhren.

α. Versuche mit einer Röhre von 10 Millim. Weite und 50 Millim. Länge ohne innere Abrundung ergaben für $H = 0,55$ bis 2,58 Mtr. mit sehr geringen Unterschieden $\frac{s}{H} = 0,683$ im Mittel. Anderen Versuchen infolge ergab sich der Ausfluss- oder Geschwindigkeitscoefficient für dieselbe Röhre: $\mu = \varphi = 0,825$, und ist also die Ausflussgeschwindigkeitshöhe

$$\frac{u^2}{2g} = h = \frac{H}{1 + \zeta} = \varphi^2 H = 0,681\ H$$

ist genau = der Steighöhe s, woraus geschlossen werden kann, dass der em aufsteigenden Strahl eigenthümliche (von der Mündung oder dem Mundstück unabhängige) Widerstand bei mässigen Steighöhen sehr gering, ass insbesondere auch der Druck des zurückfallenden Wassers, der von er Steighöhe kaum wesentlich abhängig sein kann, stets von untergeordl-

netem Einflusse ist; eine Folgerung, die freilich in Widerspruch zu sein scheint mit der Beobachtung Bossut's, dass eine kleine Neigung des Strahls gegen die Lothrechte eine merkliche Vergrösserung der Steighöhe zur Folge hat.

β. Dieselbe Röhre mit innerer Abrundung lieferte ein ähnliches Ergebniss. Bei $H = 0{,}38$ bis $2{,}58$ Mtr. war im Durchschnitt $\frac{s}{H} = 0{,}939$, während durch andere mit Wassermessung verbundene Versuche für dieselbe Ansatzröhre $\mu = \varphi = 0{,}97$ gefunden wurde entsprechend

$$\frac{u^2}{2g} = h = \frac{H}{1 + \zeta} = \varphi^2 H = 0{,}941\ H.$$

Versuche, welche Weisbach bei grösseren Druckhöhen mit cylindrischen Ansatzröhren anstellte, sind von geringerem Interesse, da dergleichen zu technischen Ausführungen von springenden Strahlen kaum Verwendung finden. —

In Betreff der Steighöhe hohler Strahlen, und zwar bei sehr bedeutenden Druckhöhen, wurden von M. Rühlmann einige Messungen an der grossen Fontaine zu Herrenhausen ausgeführt.* Die Mündung derselben ist eine Kreisringfläche mit conischer Wasserzuleitung, ihr äusserer Durchmesser = 268 Millim., der innere = 259 Millim., also die Breite = der Wanddicke des hohlen Strahls dicht oberhalb der Mündung = 4,5 Millim. Durch besondere Versuche wurde der Ausflusscoefficient $\mu =$ 0,9[illegible] gefunden; was aber das Verhältniss der Steighöhe s zur Druckhöhe H über der Mündung betrifft, so ergab sich:

$$\frac{s}{H} = 0{,}865 \text{ für } H = 33{,}6 \text{ und } \frac{s}{H} = 0{,}831 \text{ für } H = 36{,}1 \text{ Mtr.}$$

Dürfte man das Verhältniss des Inhalts zum Umfang der Mündung als vorzugsweise maassgebend für dieses Verhältniss betrachten, so wäre, wenn auch wegen der im Inneren des hohlen Strahls ohne Zweifel nur geringen Bewegung der Luft vom inneren Umfang der Ringfläche nur ein kleiner Theil mitgerechnet, das Verhältniss des Inhalts zum Umfang also nur wenig $< 4{,}5$, etwa $= 4$ Millim. veranschlagt wird, der vorliegende hohle Strahl in der fraglichen Hinsicht zu vergleichen mit einem vollen Strahl von höchstens etwa 16 Millim. Durchm. an der Mündung. Indem aber selbst bei $H = 36$ Mtr. das Verhältniss $\frac{s}{H}$ noch grösser gefunden wurde, als es nach Weisbach's Versuchen der conischen Ansatzröhre von

* Hydromechanik von Dr. M. Rühlmann, S. 430.

16 Millim. Mündungsweite bei $H = 20$ Mtr. entsprechen würde, so scheint daraus gefolgert werden zu müssen, dass ausser dem Widerstande zwischen Wasser und Luft an der Oberfläche des Strahls noch ein anderer wesentlich mitbestimmend einwirkt, der (vermuthlich von inneren relativen Bewegungen der Wassertheilchen gegen einander herrührend) bei einem vollen Strahl grösser ist, als bei einem hohlen.

§. 142. Versuch einer theoretischen Entwickelung.

Die Steighöhe eines springenden Wasserstrahls wird offenbar durch so mannigfache und complicirte Einflüsse bedingt, dass eine in befriedigendem Maasse zutreffende Analyse und mathematische Formulirung derselben kaum zu gewärtigen ist. Indessen könnte man wenigstens versuchen, das Gesetz, nach welchem diese Steighöhe s für den einfachsten Fall einer vollen kreisförmigen Mündung von ihrem Durchmesser und von der Höhe $h = \frac{u^2}{2g}$ abhängt, die der Ausflussgeschwindigkeit u (im kleinsten Querschnitte des event. contrahirten Strahls) entspricht, seiner allgemeinen Form nach durch eine theoretische Entwickelung richtiger darzustellen, als es durch die bisherigen lediglich empirischen Formeln, insbesondere durch die Weisbach'sche Gleichung (1) im vorigen §. erreicht wird. Denn abgesehen davon, dass die letztere nur eine Beziehung zwischen s und $H = (1 + \zeta) h$ zum Ausdruck bringt, thut sie auch dies in einer Weise, welche nur für ziemlich eng begrenzte Werthe von H mit genügender Annäherung zutreffend sein kann, für grössere Werthe von H ein geradezu widersinniges Resultat giebt, in der Grenze schliesslich $s = 0$ für $H = \infty$.

Aehnlich wie bei der Bewegung des Wassers in einer Röhre (§. 90) kann auch hier ein Widerstand an der Oberfläche und ein anderer im Inneren des Wasserstrahls unterschieden, entsprechend die specifische Widerstandshöhe B_1 (Widerstandshöhe pro Längeneinheit = Widerstandsarbeit pro Gewichtseinheit Wasser und pro 1 Mtr. Strahlhöhe) in zwei Theile [illegible] und I_1 zerlegt werden. Von demjenigen Theil $= I_1$, welcher der inneren Reibung entspricht, ist anzunehmen, dass er dasselbe Gesetz befolgt wie bei der Bewegung des Wassers in einer cylindrischen Röhre, so lange der continuirliche Zusammenhang des Strahls erhalten bleibt und die Wassertheilchen sehr schwach gekrümmte Bahnen verfolgen, wie es wenigstens

Im unteren Theile des Strahls bis zu einer gewissen Höhe der Fall ist. ist also für den Querschnitt in der Höhe x über der Mündung

y der Durchmesser,

z die mittlere Geschwindigkeit,

$z' = \varepsilon z$ die Umfangsgeschwindigkeit ($\varepsilon < 1$), so ist nach §. 90, Gl. (12):

$$I_1 = \frac{32 R (1 - \varepsilon)}{\gamma} \frac{z}{y^2} = b \frac{z}{y^2} \dots\dots\dots\dots 1.$$

unter γ das specif. Gewicht des Wassers und unter R die Constante der inneren Reibung verstanden.

Der Widerstand an der Oberfläche des Strahls ist hier von anderer Art wie derjenige, welcher durch die Rauhigkeit der Wand einer Leitungsröhre verursacht wird; er rührt daher, dass eine gewisse Luftmasse durch Adhäsion mit empor genommen, d. h. die oberflächliche Geschwindigkeit z' des Wasserstrahls ihr mitgetheilt wird. Gemäss den Vorstellungen vom Wesen des Gaszustandes (§. 51) wird nämlich die Strahloberfläche beständig von neuen Luftmolekülen getroffen, denen, indem sie reflectirt werden, neben ihrer nach allen Richtungen gleichmässig vertheilten mittleren Translationsgeschwindigkeit U zugleich in verticaler Richtung die Geschwindigkeit z' der reflectirenden Fläche mitgetheilt wird. Ist also m die Gesammtmasse der Luftmoleküle, welche in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit treffen, somit $m\pi y$ diese Masse pro 1 Sec. und pro 1 Mtr. Strahlhöhe, so ist $m\pi y z'$ die derselben vertical aufwärts pro Sec. ertheilte Bewegungsgrösse oder der entsprechende vertical abwärts gerichtete Widerstand und $m\pi y z'^2$ die Arbeit desselben pro Secunde. Diese Widerstandsarbeit pro 1 Mtr. Strahlhöhe und pro Gewichtseinheit Wasser oder der betreffende Theil der specif. Widerstandshöhe ist folglich:

$$E_1 = \frac{m\pi y z'^2}{\gamma \frac{\pi}{4} y^2 z} = \frac{4 m \varepsilon^2}{\gamma} \frac{z}{y} = a \frac{z}{y} \dots\dots\dots 2$$

Die Masse m lässt sich berechnen, und so ein Urtheil über das Grössenverhältniss von E_1 und I_1 gewinnen. Ist nämlich U' der Mittelwerth der zur reflectirenden Fläche normal gerichteten Geschwindigkeitscomponenten der Luftmoleküle, so ist mit Rücksicht darauf, dass durch die Reflexion diese Normalgeschwindigkeit in $-U'$ verwandelt wird, der entsprechende Druck pro Flächeneinheit (die Pressung der Luft):

$$p = m \,.\, 2 U'$$

= der Aenderung der Bewegungsgrösse im Sinne der Normale pro Flächen- und Zeiteinheit. Was aber U' betrifft, so denke man sich um irgend ein

Punkt A der reflectirenden Fläche als Mittelpunkt mit dem unendlich kleinen Halbmesser r eine der Luft zugekehrte Halbkugel beschrieben und aus derselben durch zwei Kreiskegelflächen, deren Seiten mit der Flächennormale die Winkel φ und $\varphi + d\varphi$ bilden, eine unendlich kleine Zone herausgeschnitten. Das Verhältniss der letzteren zur Halbkugelfläche:

$$\frac{2\pi r \sin\varphi \,.\, r\, d\varphi}{2\pi r^2} = \sin\varphi\, d\varphi$$

ist dann die verhältnissmässige Zahl der Luftmoleküle, die unter dem Neigungswinkel φ gegen die Normale die Fläche treffen, und da für dieselben die mittlere Normalgeschwindigkeit $= U\cos\varphi$ ist, ergiebt sich:

$$U' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} U\cos\varphi \,.\, \sin\varphi\, d\varphi = U\int_0^1 \sin\varphi \,.\, d\sin\varphi = \frac{U}{2}.$$

Somit ist mit Rücksicht auf den Ausdruck von U nach Gl. (6) in §. 51:

$$m = \frac{p}{2U'} = \frac{p}{U} = \frac{p}{\sqrt{3gRT}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

unter T die absolute Temperatur der Luft und unter R die Constante der Zustandsgleichung $pv = RT$ verstanden, also

$$a = \frac{4m\varepsilon^2}{\gamma} = \frac{4p\varepsilon^2}{\gamma\sqrt{3gRT}}, \text{ insbesondere } = 0{,}0832\,\varepsilon^2$$

für $p = 10333$, $\gamma = 1000$, $g = 9{,}81$, $R = 29{,}4$ und $T = 285$. Nach §. 90, Gl. (4) ist aber andererseits der Coefficient b des Ausdrucks von I_1 für eine mittlere Wassertemperatur von etwa 12° C.

$$b = 0{,}000004$$

$$\text{und somit } \frac{E_1}{I_1} = \frac{a}{b}\, y = 20800\,\varepsilon^2 y \qquad \ldots\ldots (4)$$

für mittlere Verhältnisse. Hiernach lässt sich annehmen, dass in der Regel $E_1 > I_1$ sein wird, sofern nämlich der Durchmesser y nicht sehr klein ist.

Aus Gl. (1) und (2) folgt nun die Widerstandshöhe für das Element dx der Strahlhöhe:

$$dB = B_1\, dx = (E_1 + I_1)\, dx = \left(a\,\frac{z}{y} + b\,\frac{z}{y^2}\right) dx$$

und sofern dieselbe zusammen mit dx selbst der Abnahme $= -d\,\frac{z^2}{2g}$ der mittleren Geschwindigkeitshöhe gleich ist, ergiebt sich:

$$-\frac{z\,dz}{g} = \left(1 + a\,\frac{z}{y} + b\,\frac{z}{y^2}\right) dx,$$

also wegen $y^2 z = d^2 u$, unter d hier den Durchmesser nicht der

Mündung, sondern des kleinsten Querschnitts des contrahirten Strahls verstanden, auf den sich auch die mittlere Ausflussgeschwindigkeit u bezieht,

$$s = \frac{1}{g}\int_0^u \frac{z\,dz}{1 + Az^{\frac{3}{2}} + Bz^2} \text{ mit } A = \frac{a}{d\sqrt{u}},\ B = \frac{b}{d^2 u} \ldots (5).$$

Streng genommen sollte hier die Integration nicht von 0, sondern von einem kleinen endlichen Werth u_1 als unterer Grenze an ausgeführt werden, wenn u_1 die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher am Gipfel des Strahls die Wassertheilchen in den Scheitelpunkten ihrer aufwärts convexen Bahnen seitlich abfliessen, oder es sollte von obigem Integral (5) noch das zwischen 0 und u_1 genommene abgezogen werden, welches wegen Kleinheit von z zwischen diesen Grenzen

$$= \frac{1}{g}\int_0^{u_1} z\,dz = \frac{u_1^2}{2g}$$

gesetzt werden kann. Dabei ist u_1 bestimmt durch das Gleichgewicht der aufwärts gerichteten Centrifugalkraft und der abwärts gerichteten Schwerkraft, also

$$\frac{u_1^2}{\varrho} = g; \quad \frac{u_1^2}{2g} = \frac{\varrho}{2},$$

unter ϱ den Krümmungsradius im Scheitelpunkte der Bahnen verstanden. Bei geneigten Strahlen braucht zu dieser Horizontalgeschwindigkeit u_1 am Gipfel nichts von der verticalen Anfangsgeschwindigkeit verwendet zu werden, und wird darin zum Theil der Grund liegen, dass solche Strahlen bei geringer Neigung etwas höher steigen, als ganz verticale. Hier mag indessen auch für letzteren Fall der in Rede stehende Umstand ausser Acht bleiben, da er ohne Zweifel weit geringfügiger ist, als andere demnächst noch zu besprechende Einflüsse, die sich im oberen Theil des Strahls geltend machen.

Aus Gl. (5) ergiebt sich, wenn das dem Obigen zufolge meist untergeordnete Glied mit B einstweilen ausser Acht gelassen und auch u von so mässiger Grösse vorausgesetzt wird, dass $Au^{\frac{3}{2}}$ ein der Einheit nicht nahe kommender ächter Bruch ist:

$$s = \frac{1}{g}\int_0^u \frac{z\,dz}{1 + Az^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{g}\int_0^u \left(1 - Az^{\frac{3}{2}} + A^2 z^3 - \ldots\right) z\,dz$$

$$= \frac{1}{g}\left(\frac{u^2}{2} - \frac{2}{7} A u^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{5} A^2 u^5 - ..\right)$$

$$= \frac{u^2}{2g}\left(1 - \frac{4}{7}\frac{a}{d} u + \frac{2}{5}\frac{a^2}{d^2} u^2 - ..\right)$$

oder näherungsweise:

$$s = \frac{u^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{4}{7}\frac{a}{d} u} = \frac{h}{1 + \frac{\alpha}{d}\sqrt{h}}, \text{ mit } \alpha = \frac{4}{7} a\sqrt{2g} \;.\;. (6).$$

Wenn man dagegen bei sehr kleiner Mündungsweite d in Gl. (5) nur das Glied mit B berücksichtigte, hätte man

$$s = \frac{1}{g}\int_0^u \frac{z dz}{1 + Bz^2} = \frac{ln(1 + Bu^2)}{2gB}$$

$$= \frac{Bu^2 - \frac{1}{2} B^2 u^4 + \frac{1}{3} B^3 u^6 - ..}{2gB}$$

$$= \frac{u^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{b}{d^2} u + \frac{1}{3}\frac{b^2}{d^4} u^2 - ..\right)$$

$$\text{nahe} = \frac{u^2}{2g} \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{b}{d^2} u} = \frac{h}{1 + \frac{\beta}{d^2}\sqrt{h}} \text{ mit } \beta = \frac{1}{2} b\sqrt{2g} \;.\;. (7).$$

Bei der gleichen Form der Ausdrücke (6) und (7) bezüglich auf h kann dann schliesslich gesetzt werden:

$$s = \frac{h}{1 + 2m\sqrt{h}} \text{ mit } 2m = \frac{\alpha}{d} + \frac{\beta}{d^2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (8).$$

Die durch diese Gleichung ausgedrückte Beziehung zwischen s und d scheint nun zwar den Versuchen ziemlich gut zu entsprechen, und auch was die Beziehung zwischen s und h betrifft, ist es an und für sich nicht unangemessen, dass ihr zufolge s und h gleichzeitig ohne Ende wachsen, so jedoch, dass das Verhältniss $\frac{s}{h}$ sich der Grenze Null nähert und so s schliesslich von einerlei Grössenordnung nicht mit h, sondern mit $\sqrt{h}$ wird. Indessen lassen doch die Weisbach'schen Versuche erkennen, dass $\frac{s}{h}$ mit wachsendem h schneller abnimmt, als es nach Gl. (8) der Fall wäre. Der Grund liegt vermuthlich darin, dass bei der Herleitung dieser Gleichung ein andauernd continuirlicher Zusammenhang des Wasserstrahls und eine einfach gesetzmässige Bewegung aller Wassertheilchen in sehr schwach ge-

krümmten Bahnen vorausgesetzt wurde. Je höher aber das Wasser empor steigt, desto mehr wird thatsächlich von aussen nach innen fortschreitend der continuirliche Zusammenhang gestört, indem nach vorhergegangener Kräuselung der ursprünglich glatten Oberfläche mehr und mehr Tropfen vorübergehend oder dauernd sich ablösen, durch Mischung mit Luft der Strahl sich trübt und immer mehr Wassertheilchen in verschlungenen und stark gekrümmten Bahnen zu bewegen und sich gegenseitig zu stossen anfangen. Der dadurch bedingte Widerstand, mit Rücksicht auf welchen Gl. (8) einer Correction um so mehr bedarf, je grösser h und s sind, lässt sich zwar nicht rationell näher analysiren, so dass man sich auf eine Annahme beschränken muss, die ihre Rechtfertigung nur nachträglich durch genügende Uebereinstimmung der resultirenden Formel mit den Ergebnissen der Versuche finden kann; wenn man aber, unter z die mittlere Geschwindigkeit und unter $Z = \frac{z^2}{2g}$ die entsprechende Geschwindigkeitshöhe in der Höhe x über der Mündung verstanden, die fragliche Widerstandshöhe dB für ein Strahlelement $= \zeta Z dx$ setzt, so erscheint es am einfachsten, den Widerstandscoefficienten ζ zunächst versuchsweise proportional x, etwa $= 2cx$ zu setzen, da die ihn bedingenden Einflüsse mit x wachsen. Wäre dann dieser Widerstand der einzig vorhandene, so müsste die Abnahme der mittleren Geschwindigkeitshöhe für das Strahlelement dx:

$$-dZ = dx + dB = (1 + 2cxZ)\,dx$$

sein, woraus die lineare Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dZ}{dx} + 2cxZ + 1 = 0$$

hervorgeht, deren Integral, unter e die Basis der natürlichen Logarithmen und unter C eine von den Integrationsgrenzen abhängige Constante verstanden,

$$Z = e^{-\int 2cx\,dx}\left(C - \int e^{\int 2cx\,dx}\,dx\right)$$

$$= e^{-cx^2}\left(C - \int e^{cx^2}\,dx\right)$$

$$\text{oder } Ze^{cx^2} + \int e^{cx^2}\,dx = C$$

ist. Daraus folgt mit Rücksicht darauf, dass $x = 0$, $Z = h$ zusammengehörige Werthe sind, indem 0 als untere Grenze des Integrals genommen wird:

$$Ze^{cx^2} + \int_0^x e^{cx^2}\,dx = h$$

und endlich, sofern $Z = 0$ für $x = s$ ist:

$$h = \int_0^s e^{cx^2} dx = f(s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (9).$$

Hiernach ist die in Rede stehende Widerstandshöhe für den ganzen Strahl:

$$h - s = f(s) - s$$

und wenn damit die früher bestimmte (Gl. 8):

$$h - s = 2ms\sqrt{h}$$

combinirt wird, ergiebt sich im Ganzen:

$$h - s = 2ms\sqrt{h} + f(s) - s; \quad h = 2ms\sqrt{h} + f(s) \ldots\ (10).$$

Daraus folgt für die anfängliche Geschwindigkeitshöhe h, welche der Steighöhe s entspricht:

$$\sqrt{h} = ms + \sqrt{(ms)^2 + f(s)} \quad \ldots\ldots\ldots\ (11).$$

Die Function $f(s)$ kann mit Hülfe algebraischer oder der üblichen, durch tabellarische Ausrechnung bekannten transcendenten Functionen nicht als ein geschlossener Ausdruck dargestellt werden. Durch Reihenentwickelung erhält man aber

$$f(s) = \int_0^s e^{cx^2} dx = \int_0^s \left(1 + cx^2 + \frac{c^2x^4}{2} + \frac{c^3x^6}{6} + \ldots\right) dx$$

$$= s\left(1 + \frac{cs^2}{3} + \frac{c^2s^4}{10} + \frac{c^3s^6}{42} + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{s} f(s) = 1 + i + \frac{9}{10} i^2 + \frac{9}{14} i^3 + \ldots \text{ mit } i = \frac{cs^2}{3},$$

wofür gesetzt werden kann:

$$\frac{1}{s} f(s) = e^{i + \lambda i^2 + \mu i^3 + \ldots} = 1 + (i + \lambda i^2 + \mu i^3 + \ldots) +$$

$$+ \frac{1}{2}(i^2 + 2\lambda i^3 + \ldots) + \frac{1}{6}(i^3 + \ldots) + \ldots$$

$$\text{mit } \lambda + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}; \quad \lambda = \frac{2}{5}$$

$$\mu + \lambda + \frac{1}{6} = \frac{9}{14}; \quad \mu = \frac{9}{14} - \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{8}{105} \quad \text{etc.}$$

Beschränkt man sich für solche Werthe von s, wie sie praktisch vorkommen können, auf die beiden ersten Glieder der Reihenentwickelung des Exponenten von e, setzt also

$$f(s) = s \cdot e^{i + \lambda i^2} = s \cdot 10^{i \lg e (1 + \lambda i)} =$$
$$= s \cdot 10^{ns^2(1 + ps^2)} = s \cdot num \cdot lg\,[ns^2(1 + ps^2)] .$$

unter n und p erfahrungsmässig zu bestimmende Coefficienten verstanden, so ist nach Gl. (10) und (11):

$$\frac{h}{s} = 2m\sqrt{h} + num \cdot lg\,[ns^2(1 + ps^2)] \ldots\ldots\ldots (12$$

$$\sqrt{h} = ms + \sqrt{(ms)^2 + s \cdot num \cdot lg\,[ns^2(1 + ps^2)]} \ldots (13.$$

Die Coefficienten n und p werden ohne Zweifel vom kleinsten Durchmesser d des Strahles abhängig und zwar insbesondere n vermuthlich, wie m, um so grösser sein, je kleiner d ist; namentlich aber lässt sich bei der Uebertragung dieser Gleichungen auch auf nicht kreisförmige Mündungen (wobei unter d der mittlere Durchmesser = dem 4 fachen Quotient des Inhalts durch den Umfang zu verstehen ist) eine wesentliche Abhängigkeit der Coefficienten n und p von der Mündungsform erwarten, indem die Zertheilung des Strahls, die den dadurch gemessenen Widerstand bedingt, besonders bei eckigen und gerippten Querschnittsformen früher, als bei runden, in gleichem Grade sich ausbilden wird.

Für nicht sehr grosse Werthe von h hat Gl. (12) einen ähnlichen Charakter wie die von Weisbach bewährt gefundene empirische Formel (1) des vorigen §.; dadurch aber, dass das dortige Glied mit H^2 im Nenner, welches die Zulässigkeit jener Formel auf die Voraussetzung $H < H_1$ nach Gl. (2) daselbst beschränkte, hier (bei Entwickelung des $num\ lg$ in eine Reihe) durch Glieder mit Potenzen von s ersetzt ist, wird die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass Gl. (12) resp. (13) bei angemessener Bestimmung der Coefficienten auch weit über die Versuchsgrenzen hinaus hinlänglich zutreffend sein kann. —

Zur Prüfung von Gl. (12) mögen beispielsweise die Weisbach'schen Versuche bei grösseren Steighöhen mit dem kurzen conischen Mundstück von 10 Millim. Mündungsweite (siehe vor. §. unter b, β) benutzt werden, deren Ergebnisse in der folgenden Tabelle aufgeführt sind. Darin bedeutet Δ die Differenz des beobachteten und des nach Weisbach's betreffender Formel

$$\frac{H}{s} = 1{,}0162 + 0{,}007107\,H + 0{,}000406\,H^2$$

berechneten Werthes von $\frac{H}{s}$.

Nr.	s	H	$\frac{H}{s}$ beob.	$\frac{H}{s}$ ber.	$\varDelta$
1	4,330	4,543	1,0492	1,0569	0,0077
2	5,704	6,138	1,0761	1,0751	— 0,0010
3	8,030	8,895	1,1077	1,1115	0,0038
4	10,795	12,793	1,1851	1,1736	— 0,0115
5	12,451	15,509	1,2456	1,2241	— 0,0215
6	15,653	20,519	1,3109	1,3330	0,0221

Zur Bestimmung der Geschwindigkeitshöhen $h = \frac{H}{1+\zeta}$ kann in Ermangelung specieller Angaben über den Widerstandscoefficienten ζ des fraglichen Mundstücks derselbe $= 0{,}0162$ gesetzt, nämlich angenommen werden, dass, je kleiner H ist, desto mehr sich $\frac{h}{s}$ der Grenze 1, also $\frac{H}{s}$ der Grenze $\frac{H}{h}$ nähert, dass also der obigen Weisbach'schen Formel zufolge $\frac{H}{h} = 1{,}0162$ ist. Hiernach sind die Werthe von h und $\frac{h}{s}$ für die 6 Versuchsnummern in der weiter unten folgenden Tabelle berechnet. Um dann zu Näherungswerthen der Coefficienten m, n, p von Gl. (12) zu gelangen, kann man die 6 Gruppen zusammengehöriger Werthe von s und h als Abscissen und Ordinaten auftragen, eine stetige Curve verzeichnen, die sich den entsprechenden 6 Punkten mit möglichster Ausgleichung der augenscheinlichen Unregelmässigkeiten resp. Beobachtungsfehler anschliesst, und derselben dann drei Gruppen zusammengehöriger Werthe von s und h am Anfange, in der Mitte und am Ende des verzeichneten Curvenstücks entnehmen, welche durch Einsetzung in Gl. (12) die erforderlichen 3 Gleichungen zur Berechnung von m, n, p liefern. Denselben Dienst, wie dieses graphische Ausgleichungs- und Interpolationsverfahren, leistet indessen auch Weisbach's empirische Formel, aus welcher man findet:

$$\begin{array}{llll} \text{für} & s_1 = 5 & s_2 = 10 & s_3 = 15 \\ & H_1 = 5{,}327 & H_2 = 11{,}544 & H_3 = 19{,}637 \\ \text{also} & h_1 = 5{,}242 & h_2 = 11{,}360 & h_3 = 19{,}324 \\ & \frac{h_1}{s_1} = 1{,}0484 & \frac{h_2}{s_2} = 1{,}1360 & \frac{h_3}{s_3} = 1{,}2883. \end{array}$$

Damit ergiebt sich nach Gl. (12), wenn

$$lg\left(\frac{h_1}{s_1} - 2m\sqrt{h_1}\right) = L_1,\quad lg\left(\frac{h_2}{s_2} - 2m\sqrt{h_2}\right) = L_2,$$

$$lg\left(\frac{h_3}{s_3} - 2m\sqrt{h_3}\right) = L_3$$

gesetzt wird, $m = 0.0053$ als Wurzel der Gleichung

$$15 L_1 - 6 L_2 + L_3 = 0,$$

$$p = 0.01 \frac{L_2 - 4 L_1}{16 L_1 - L_2} = 0.000046; \quad n = \frac{0.01 L_2}{1 - 100 p} = [illegible]$$

Folgende Tabelle enthält die mit diesen Zahlenwerthen von m, n, p [illegible] Gl. (12) berechneten und ihre Unterschiede Δ von den beobachteten Verhältnissen $\frac{h}{s}$.

Nr.	s	h	$\frac{h}{s}$ beob.	$\frac{h}{s}$ ber.	Δ
1	4.330	4.471	1.0325	1.0404	0.0079
2	5.704	6.040	1.0589	1.0575	— 0.0014
3	8.030	8.753	1.0901	1.0948	0.0047
4	10.795	12.589	1.1662	1.1555	— 0.0107
5	12.451	15.262	1.2257	1.2015	— 0.0242
6	15.653	20.192	1.2900	1.3133	0.0233

Die Fehler Δ sind im Allgemeinen etwas grösser, als nach Weisbach's empirischer Formel, doch nur in solchem Grade, dass durch passende Correction der hier benutzten Näherungswerthe von m, n, p eine wenigstens ebenso kleine Summe der Fehlerquadrate erwartet werden kann. Natürlich aber wird Gl. (12) mit den solcher Weise bestimmten Coefficienten vermuthlich auch für solche Steighöhen s im Gegensatz zur Weisbach'schen Formel, noch hinlänglich zutreffend bleiben, welche die Versuchswerthe s erheblich übertreffen.

V. Wellenbewegung des Wassers.

§ 143. Erklärungen und Bezeichnungen.

Die Wellenbewegung des Wassers ist im Gegensatze zu der bisher betrachteten strömenden Bewegung dadurch charakterisirt, dass die materiellen Punkte geschlossene Bahnen in wiederholter Folge durchlaufen. Jede dieser wiederholten und zwar, wie wenigstens bei der theoretischen Entwickelung vorausgesetzt wird oder als Folge der Abstraction von Widerständen sich ergiebt, ganz gleichen Bewegungen desselben materiellen Punktes heisst eine **Schwingung** desselben; die Zeit, welche sie erfordert, in der also die ringförmige Bahn ringsum oder die begrenzte Bahn hin [illegible]

her durchlaufen wird, heisst die Schwingungsdauer und sei mit 2τ bezeichnet.

Unter der Voraussetzung, dass die freie Wasseroberfläche eine horizontale Ebene W bildete, bevor durch eine Störung des Gleichgewichtes die Schwingungen erregt wurden, geben sich diese durch stetig gekrümmte Erhebungen und Senkungen der Oberfläche zu erkennen, welche sowohl in demselben Augenblicke neben einander, als auch an derselben Stelle nach einander mit stetigen Uebergängen abwechselungsweise sich folgen. Den Erhebungen entsprechen Wellenberge, den Senkungen Wellenthäler, unter welchen Bezeichnungen hier die ganzen vertical unter den gehobenen resp. gesenkten Theilen der freien Oberfläche gelegenen Wassermassen verstanden werden sollen. Ein Wellenberg zusammen mit einem angrenzenden Wellenthal heisst eine Welle.

Die lange Dauer der in einer sehr ausgedehnten und tiefen (von der äusseren Reibung an festen Wänden also wenig beeinflussten) Wassermasse erregten Wellenbewegung, nachdem die erregenden Kräfte aufgehört haben zu wirken, z. B. die Dauer von 24 Stunden und darüber der auf offenem Meere durch einen Sturm erregten Wellen nach dem Aufhören desselben, lässt auf eine sehr geringe innere Reibung schliessen, wie sie nur möglich ist, wenn die ursprünglich in Berührung befindlichen Wasserelemente beständig in Berührung bleiben. Die stetig gekrümmte veränderliche Fläche, in welche dann der Ort aller materiellen Punkte, die ursprünglich in einer horizontalen Ebene lagen, bei der Wellenbewegung übergeht, heisst eine Wellenfläche, insbesondere die freie Oberfläche, welche auch stets von denselben Wasserelementen gebildet wird, die Wellenoberfläche.

Die folgenden mathematischen Entwickelungen beschränken sich auf cylindrische Wellen, welche dadurch charakterisirt sind, dass je zwei materielle Punkte, die ursprünglich in einer zu einer gewissen Verticalebene V senkrechten Geraden G lagen, beständig in einer solchen Geraden bleiben und dabei congruente ebene Bahnen durchlaufen, die mit der Verticalebene V parallel sind; die Wellenflächen sind zu dieser Ebene V senkrechte Cylinderflächen. Je drei aufeinander folgende der parallelen Geraden, in denen die Wellenoberfläche von der Horizontalebene W geschnitten wird, bestimmen durch ihre Abstände die Länge eines Wellenberges $= \lambda_1$, eines Wellenthales $= \lambda_2$, sowie die ganze Wellenlänge: $\lambda_1 + \lambda_2 = 2\lambda$. Die grösste Erhebung $= \varrho_1$ der Welle über W heisst die Höhe des Wellenberges, die grösste Senkung $= \varrho_2$ unter W die Tiefe des Wellenthales, ihre Summe $= 2\varrho$ die ganze Wellenhöhe. — Die dauernde Ausbildung cylindrischer Wellen setzt eine im Sinne der Geraden

G unbegrenzte Ausdehnung des Wassers oder eine Begrenzung desselben durch ebene, mit den Querschnittsebenen V parallele Wände voraus; die Entwickelungen für solche Wellen reduciren sich auf eine Untersuchung in der Ebene, nämlich in einer Querschnittsebene V, in welcher die x-Axe horizontal, die y-Axe vertical angenommen wird; sie schneidet die Wellenflächen in Wellenlinien, die Wellenoberfläche in der oberen Wellenlinie.

Es sind zweierlei Arten von Wellen zu unterscheiden: fortschreitende und stehende Wellen. Erstere sind das unmittelbare Resultat einer örtlichen Störung des Gleichgewichtes, indem die dadurch an der betreffenden Stelle verursachte Wellenbewegung, ihrerseits wieder eine Gleichgewichtsstörung in der nächsten Umgebung bedingend, nach und nach zu immer entfernteren Theilen der Wassermasse fortgepflanzt wird; die Fortpflanzungsrichtung ist die Richtung, in welcher die Wellenlänge gemessen wird, nach den obigen Bezeichnungen für cylindrische Wellen die Richtung der x-Axe. Die beständige Berührung der ursprünglich sich berührenden Wasserelemente bedingt eine gleiche Schwingungsdauer aller materiellen Punkte einer Welle und während dieser Dauer die Fortpflanzung der Bewegung auf eine der Wellenlänge gleiche Strecke; die Fortpflanzungsgeschwindigkeit fortschreitender Wellen ist deshalb

$$w = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Stehende Wellen resultiren unter Umständen aus der Interferenz von zwei Wellenzügen, d. h. stetigen Folgen einzelner fortschreitender Wellen, die nach entgegengesetzten Richtungen fortgepflanzt werden, bei cylindrischen Wellenzügen insbesondere durch Interferenz des normal gegen eine verticale ebene Wand hin fortschreitenden mit dem von ihr reflectirten Wellenzuge.

Bei einer fortschreitenden cylindrischen Welle bewegen sich (abgesehen von einer mit der Fortpflanzung verbundenen Veränderung der Welle) alle materiellen Punkte einer Wellenlinie in gleichen Bahnen mit gleichen Geschwindigkeiten an entsprechenden Stellen derselben; die Phase aber ist für alle diese stetig aufeinander folgenden Punkte stetig verschieden, d. h. sie befinden sich gleichzeitig an verschieden gelegenen Stellen ihrer Bahnen. Bei einer stehenden cylindrischen Welle sind umgekehrt die Bahnen und an entsprechenden Stellen derselben die Geschwindigkeiten der materiellen Punkte einer Wellenlinie stetig verschieden; dagegen ist die Phase in demselben Augenblick für die dem Wellenberge angehörenden und ebenso für die dem Wellenthale angehörenden Punkte die gleiche.

für die einen und anderen nur insofern verschieden, als diese zwei Gruppen von materiellen Punkten sich gleichzeitig an entgegengesetzt gelegenen Stellen ihrer Bahnen bezüglich auf die Ebene W befinden. Wie die Bahnen und Phasen für die verschiedenen einer fortschreitenden oder stehenden Welle angehörenden materiellen Punkte nach verticaler Richtung variabel sind, ist von den Umständen, insbesondere von Gestalt und Lage der die Wassermasse begrenzenden festen Wände und von der Wassertiefe abhängig.

§. 144. Wellen von sehr kleiner Höhe.

Trotz der Beschränkung auf cylindrische Wellen und der Abstraction von Widerständen ist die streng systematische Ableitung der Gesetze der Wellenbewegung aus den allgemeinen Gleichungen der Hydraulik mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Die Entwicklung ist deshalb gewöhnlich weiter vereinfacht worden durch die Voraussetzung 1) einer constanten Wassertiefe $= h$, 2) einer im Vergleich mit der Wellenlänge und der Wassertiefe sehr kleinen Wellenhöhe und 3) so kleiner Geschwindigkeiten der materiellen Punkte, dass die entsprechenden Geschwindigkeitshöhen sehr klein selbst im Vergleich mit der Wellenhöhe sind.

Bei Zugrundelegung der im vorigen §. näher bezeichneten Coordinatenaxen der x und y, von denen die letztere nach unten positiv gesetzt und zu denen noch eine auf beiden senkrechte z-Axe hinzugefügt gedacht werde, sind die betreffenden Componenten der beschleunigenden Schwerkraft als einzig hier wirksamer Massenkraft:

$$X = 0,\quad Y = g,\quad Z = 0;$$

es existirt also eine Kräftefunction (§. 70), nämlich

$$U = gy,$$

deren Differentialquotienten nach x, y, z resp. $= X, Y, Z$ sind. Sofern ausserdem die Bewegung vom Zustande der Ruhe ausgeht, besteht auch nach der betreffenden Bemerkung in §. 70 (S. 390) eine Geschwindigkeitsfunction φ, d. h. eine Function der Coordinaten und der Zeit t, deren Differentialquotienten nach x, y, z den Geschwindigkeitscomponenten nach den betreffenden Axen gleich sind, welche Function aber hier nur x, y, t enthalten kann, da die Geschwindigkeitscomponenten im Sinne der z-Axe für die vorausgesetzten cylindrischen Wellen $= 0$ sind; nach Gl. (6, a) in §. 70 entspricht sie deshalb der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.$$

Werden nun die Geschwindigkeitscomponenten im Sinne der x-Axe und der y-Axe beziehungsweise mit u und v bezeichnet, so ist nach Gl. (5 in §. 70 wegen $\mu = Const.$

$$gy - \frac{1}{\mu}\int dp = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2}{2},$$

wobei die Integration in $\int dp$ sich nur auf die Coordinaten bezieht; wird sie aber insbesondere auf die freie Oberfläche bezogen, an welcher in irgend einem Augenblicke die Pressung p überall gleich (= dem Atmosphärendruck) ist, so wird $\int dp = 0$, und wenn zudem der Anfangspunkt der Coordinaten in der Ebene W, d. h. in der ursprünglichen horizontalen Wasseroberfläche angenommen wird, so dass y mit der Wellenhöhe von einerlei Grössenordnung ist, so kann $\frac{u^2 + v^2}{2}$ nach der obigen Voraussetzung unter 3) gegen gy vernachlässigt werden. Hiernach geht für die Wellenoberfläche die in Rede stehende Gleichung über in:

$$gy - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2$$

sie ist nach Einsetzung des $y = 0$ entsprechenden Ausdruckes von $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ als die angenäherte Gleichung der Wellenoberfläche zu betrachten, d. h. es ist, wenn diese Gleichung allgemein auch mit

$$f(x, y, t) = 0$$

bezeichnet wird,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \text{ für } y = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g,$$

und es muss also nach §. 70, Gl. (7) die Function φ für alle Punkte der Wellenoberfläche, da für dieselbe $\frac{\partial f}{\partial x}$ (proportional dem Cosinus des Richtungswinkels der Normale gegen die x-Axe) gemäss der Voraussetzung unter 2) zu vernachlässigen und wegen der vorausgesetzten cylindrischen Wellenform auch $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ ist, der partiellen Differentialgleichung entsprechen:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - g\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Eine andere Grenzbedingung zur näheren Bestimmung der übrigens auf durch die allgemeine Continuitätsgleichung (1) bedingten Function φ er-

giebt sich daraus, dass nach der Voraussetzung unter 1) das Wasser unten durch eine horizontale feste Wand begrenzt sein soll, wonach gemäss §. 70, Gl. (8)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ für } y = h \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

sein muss. Setzt man nun

$$\varphi = XY,$$

unter X eine Function nur von x und t, unter Y eine Function nur von y und t verstanden, wodurch die Grenzbedingungen (3) und (4) übergehen in:

$$\frac{\partial^2(XY)}{\partial t^2} - gX\frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \text{ für } y = 0 \ldots\ldots (3,a)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \text{ für } y = h \ldots\ldots (4,a),$$

so ist nach Gl. (1):

$$Y\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

und wird dieser Gleichung genügt durch:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -a^2 X; \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = a^2 Y \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

unter a eine von x und y unabhängige Grösse verstanden. Das Integral der zweiten dieser Gleichungen (5) ist:

$$Y = A_1 e^{-ay} + B_1 e^{ay}$$

(e die Basis der natürlichen Logarithmen) oder mit

$$A_1 = Ae^{ah}; \quad B_1 = Ae^{-ah}$$

$$Y = A\left[e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

worin A, ebenso wie a, von x und y unabhängig ist. Indem nach dieser Gleichung

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = Aa\left[-e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)}\right]$$

ist, entspricht sie der Bedingung (4,a).

Um auch der Bedingung (3,a) möglichst einfach Genüge zu leisten, werde die noch speciellere Annahme gemacht, dass a und X auch von t unabhängig sind, dass also a eine Constante, X eine blosse Function von x ist, woraus nach (5)

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -a^2 X; \quad X = B\sin(ax + b) \ldots\ldots\ldots (7)$$

folgt, unter B und b Constante verstanden. Durch diese Annahme geht die Bedingung (3,a) über in:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = g \frac{\partial Y}{\partial y} \quad \text{für } y = 0$$

und mit Rücksicht auf Gl. (6) in

$$\frac{d^2 A}{dt^2} \left[e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)} \right] = g A a \left[- e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)} \right]$$

für $y = 0$, also

$$\frac{d^2 A}{dt^2} = - g A a \frac{e^{ah} - e^{-ah}}{e^{ah} + e^{-ah}} = - \frac{\pi^2}{\tau^2} A \dots\dots\dots$$

$$\text{mit } \tau = \pi \sqrt{\frac{1}{ga} \frac{e^{ah} + e^{-ah}}{e^{ah} - e^{-ah}}} \dots\dots\dots$$

das Integral von Gl. (8) ist:

$$A = Const. \sin\left(\frac{\pi}{\tau} t + Const.\right) = \sin\left(\frac{t - \vartheta}{\tau} \pi\right) \dots . \quad 10$$

unter ϑ eine Constante verstanden, und wenn der constante Factor in d. Factor B von X einbegriffen wird. Schliesslich ist dann $\varphi = XY$ m. Rücksicht auf Gl. (6), (7) und (10):

$$\varphi = B \sin\left(\frac{t - \vartheta}{\tau} \pi\right) \sin(ax + b) \left[e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)} \right] \quad . \quad 11$$

Dieser Ausdruck von φ enthält die Lösung des Problems auf Gr. der gemachten Annahmen, d. h. er lehrt eine mögliche Bewegungsart : Wassers unter dem Einfluss der Schwere nach einer Störung des Gleich. wichtes kennen. Indem die ihm entsprechenden Geschwindigkeitscomponenten

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ und } v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

den Factor $\sin\left(\frac{t - \vartheta}{\tau} \pi\right)$ haben, ist die Bewegung eine periodische der Dauer 2τ; und indem das Verhältniss $u : v$ von der Zeit unabhängig ist, bei der Kleinheit der Bahnen aber die Geschwindigkeitscomponenten u, v im Punkte (x, y) auch als diejenigen eines materiellen Punktes betrachtet werden können, der zu irgend einer Zeit im Punkte (x, y) sich fand, so folgt, dass jeder materielle Punkt in gerader Linie schwingt. Richtung und Geschwindigkeit dieser Bewegung variiren in demselben Augenblicke von Punkt zu Punkt in der Flüssigkeit, doch haben sie an:

gleichzeitig für alle materiellen Punkte dasselbe Verhältniss $= sin\left(\frac{t-\vartheta}{\tau}\pi\right)$ zu den diesen Punkten zukommenden Maximalwerthen, und zwar die Verticalgeschwindigkeiten v zugleich in Beziehung auf das Vorzeichen überall da, wo $sin(ax+b)$ dasselbe Vorzeichen hat. Verticalebenen K, die in den Abständen

$$\lambda = \frac{\pi}{a} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (12)$$

von einander entfernt zur x-Axe senkrecht sind, theilen also die Wassermasse in solche Theile, dass für alle Punkte je eines Theils die Phase in demselben Augenblicke gleich ist; die geradlinigen Bahnen der materiellen Punkte sind für jene Verticalebenen K horizontal und werden mit der Entfernung von ihnen mehr und mehr geneigt, schliesslich vertical in Ebenen, die mit jenen in gleichen Abständen parallel sind. Diese Umstände charakterisiren die Bewegung als eine stehende Wellenbewegung, und zwar ist τ die halbe Schwingungsdauer, λ die Länge eines Wellenbergs oder Wellenthals, also die halbe Wellenlänge; die mit K bezeichneten unveränderlichen Verticalebenen trennen die Wellenberge und Thäler, indem sie die Wellenoberfläche in den sogenannten Knotenlinien schneiden.

Die Gleichung der Wellenoberfläche oder der oberen Wellenlinie ergiebt sich aus Gl. (2) durch Einführung des Ausdruckes von $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, welcher $y=0$ entspricht:

$$y = \frac{B\pi}{g\tau} cos\left(\frac{t-\vartheta}{\tau}\pi\right) sin(ax+b)\left(e^{ah}+e^{-ah}\right) \dots (13).$$

Diese Linie theilt in ihren unveränderlichen Durchschnittspunkten mit der x-Axe (Knotenpunkten) dieselbe in gleiche Strecken $=\lambda$; in den Mitten dieser Strecken wird y periodisch am grössten und kleinsten $=\varrho$ und $-\varrho$, und zwar ist ϱ, d. h. die halbe Wellenhöhe

$$\varrho = \frac{B\pi}{g\tau}\left(e^{ah}+e^{-ah}\right) \dots\dots\dots\dots (14).$$

Während nach Gl. (9) und (12) zwischen τ, λ und h eine bestimmte Beziehung stattfindet, enthält die Beziehung zwischen ϱ, λ und h, die sich aus Gl. (9), (12) und (14) ergiebt, eine unbestimmte Constante B. Sofern aber von diesen Grössen nur h gegeben ist, bleibt nicht nur ϱ, sondern auch λ unbestimmt.

Diese letztere Unbestimmtheit rührt zum Theil davon her, dass eine seitliche Begrenzung des Wassers, deren Berücksichtigung durch die Voraussetzung cylindrischer Wellen nur im Sinne der z-Axe entbehrlich gemacht

ist, auch im Sinne der x-Axe nicht in Betracht gezogen, dass also in diesem Sinne das Wasser stillschweigend als unbegrenzt angenommen wurde. Wird es aber etwa durch zwei zur x-Axe senkrechte feste Ebenen begrenzt angenommen, deren Gleichungen

$$x = 0 \text{ und } x = l$$

seien, so muss nach §. 70. Gl. (8) für sie beständig $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, also

$$\cos(ax + b) = 0 \text{ für } x = 0 \text{ und } x = l,$$

d. h. $\cos b = 0$ und $\cos(al + b) = 0$ sein, von welchen Bedingungen die zweite mit Rücksicht auf die erste übergeht in: $\sin(al) = 0$. Unter m und n ganze Zahlen verstanden, ergiebt sich also:

$$b = (2m + 1)\frac{\pi}{2}; \quad a = \frac{n\pi}{l}$$

und nach Gl. (12): $\lambda = \frac{l}{n}$. Die festen verticalen Wände entsprechen den Mitten eines Wellenbergs oder Wellenthals, d. h. die äussersten Knotenlinien sind um $\frac{\lambda}{2} = \frac{l}{2n}$ von ihnen entfernt.

Die Constanten a und b sind also auf zwei andere zurückgeführt, welche ganze Zahlen, als solche freilich nach wie vor unbestimmt sind. Die vollständige Bestimmung aller Constanten könnte nur bei ausserdem gegebenem Anfangszustande versucht werden, wozu aber die durch Gl. (11) dargestellte particuläre Lösung im Allgemeinen nicht ausreichen würde, da die Function φ vielmehr einer Summe ähnlich gebildeter Ausdrücke gleich gesetzt werden müsste, deren Constante B, a, b, ϑ verschiedene Werthe haben können.

Wichtiger, als diese Verallgemeinerung und zugleich vollständige Bestimmung der Lösung zur Anpassung an einen beliebig gegebenen Anfangszustand, ist die übrigens auf demselben Princip beruhende Verwendung von Gl. (11) zu einer solchen anderen particulären Lösung, welche die Bewegungsgesetze **fortschreitender Wellen** bei Voraussetzung unbegrenzter Ausdehnung des Wassers im Sinne der x-Axe kennen lehrt. Setzt man nämlich in Gl. (11) zuerst $b = 0$, $\vartheta = 0$, dann $b = \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, so folgt:

$$1)\quad \varphi = B \sin\left(\frac{t}{\tau}\pi\right) \sin(ax) \left[e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)}\right]$$

$$2)\quad \varphi = B \cos\left(\frac{t}{\tau}\pi\right) \cos(ax) \left[e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)}\right]$$

und da auch die Summe dieser Ausdrücke eine Lösung sein muss, mit $a = \frac{\pi}{\lambda}$:

$$\varphi = B \cos\left[\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\pi\right]\left[e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)}\right] \quad \ldots\ldots (15).$$

Hiernach sind φ, $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ periodische Functionen von $\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$. Derselbe Bewegungszustand, welcher zur Zeit t im Punkte (x, y) stattfindet, findet zur Zeit $t + dt$ im Punkte $(x + dx, y)$ statt, wenn in beiden Fällen $\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)$ denselben Werth hat, d. h. wenn $\frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{\tau}$ ist. Indem übrigens nach wie vor 2τ die Periode ist, in welcher dieselbe Phase an derselben Stelle wiederkehrt, sowie 2λ die Strecke, um welche zwei Punkte im Sinne der x-Axe von einander entfernt sind, welche gleichzeitig dieselbe Phase haben, so charakterisirt die Lösung (15) eine **fortschreitende Wellenbewegung** mit der **Schwingungsdauer** 2τ, der **Wellenlänge** $2\lambda = \frac{2\pi}{a}$ und der **Fortpflanzungsgeschwindigkeit** $w = \frac{\lambda}{\tau}$ im Sinne der x-Axe. Letztere ergiebt sich nach Gl. (9):

$$w = \sqrt{\frac{g}{a}\,\frac{e^{ah} - e^{-ah}}{e^{ah} + e^{-ah}}} \quad \text{mit } a = \frac{\pi}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots (16).$$

Ist insbesondere $\frac{h}{\lambda}$ **sehr gross**, also auch $ah = \pi\frac{h}{\lambda}$, so kann e^{-ah} gegen e^{ah} vernachlässigt und somit

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{g}};\quad w = \sqrt{\frac{g\lambda}{\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

gesetzt werden. Ist aber umgekehrt $\frac{h}{\lambda}$ **sehr klein**, so dass

$$e^{ah} = 1 + ah;\quad e^{-ah} = 1 - ah$$

gesetzt werden kann, so wird

$$\tau = \frac{\lambda}{\sqrt{gh}};\quad w = \sqrt{gh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18).$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, im Allgemeinen von der Wassertiefe und der Wellenlänge abhängig, ist näherungsweise der Quadratwurzel einer dieser beiden Grössen proportional, wenn dieselbe im Vergleich mit der anderen sehr klein ist (immer unbeschadet des Umstandes, dass die Wellenhöhe der Voraussetzung zufolge sehr klein im Vergleich mit beiden ist).

Die Gleichung der oberen Wellenlinie ergiebt sich aus Gl. 12 durch Substitution des $y = 0$ entsprechenden Werthes von $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, also mit der Bedeutung von ϱ nach Gl. (14):

$$y + \varrho \sin\left[\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\pi\right] = 0.$$

Das ist die Gleichung einer Sinus-Linie, die mit der Geschwindigkeit $w = \frac{\lambda}{\tau}$ im Sinne der x-Axe fortgleitet; ϱ ist auch hier die halbe Wellenhöhe = der Höhe eines Wellenbergs oder der Tiefe eines Wellenthals.

Zur Bestimmung der Bahn, welche irgend ein materieller Punkt bei dieser Wellenbewegung beschreibt, seien x, y seine Coordinaten zur Zeit $t = 0$, und $x + \xi$, $y + \eta$ die Coordinaten zur Zeit t. Dann sind seine Geschwindigkeitscomponenten mit Rücksicht auf Gl. (15) und mit $a = \frac{\pi}{\lambda}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{B\pi}{\lambda}\left[e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)}\right] \sin\left[\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\pi\right] \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{B\pi}{\lambda}\left[e^{a(h-y)} - e^{-a(h-y)}\right] \cos\left[\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\pi\right] \end{aligned}\right| \ldots 19.$$

Daraus folgt durch Integration mit $\frac{\lambda}{\tau} = w$ und mit Rücksicht darauf, dass $t = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$ zusammengehörige Werthe sind:

$$\xi = -\frac{B}{w}\left[e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)}\right]\left\{\cos\left[\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\pi\right] - \cos\left(\frac{x}{\lambda}\pi\right)\right\}$$

$$\eta = -\frac{B}{w}\left[e^{a(h-y)} - e^{-a(h-y)}\right]\left\{\sin\left[\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\pi\right] + \sin\left(\frac{x}{\lambda}\pi\right)\right\}$$

und ergiebt sich daraus durch Elimination von t mit

$$\alpha = \frac{B}{w}\left[e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)}\right]; \quad \beta = \frac{B}{w}\left[e^{a(h-y)} - e^{-a(h-y)}\right]$$

$$\left[\frac{\xi}{\alpha} - \cos\left(\frac{x}{\lambda}\pi\right)\right]^2 + \left[\frac{\eta}{\beta} + \sin\left(\frac{x}{\lambda}\pi\right)\right]^2 = 1$$

als Gleichung der Bahn des materiellen Punktes bezüglich auf zwei Coordinatenaxen der ξ, η parallel den Axen der x, y, deren Anfangspunkt aber der Ort des betreffenden Punktes zur Zeit $t = 0$ ist. Die Bahn ist eine Ellipse mit der horizontalen Halbaxe α und der verticalen Halbaxe β; letztere sind verschieden für verschiedene Tiefen y unter der Oberfläche. Indem nach Gl. (14) die halbe Wellenhöhe

$$\varrho = \frac{B\pi}{g\lambda}\frac{\lambda}{\tau}\left(e^{ah} + e^{-ah}\right) = \frac{Baw}{g}\left(e^{ah} + e^{-ah}\right)$$

ist, so folgt $$\frac{\alpha}{\varrho} = \frac{g}{a}\frac{1}{w^2}\frac{e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)}}{e^{ah} + e^{-ah}} \ldots$$

und somit nach Gl. (16) auch

$$\frac{\alpha}{\varrho} = \frac{e^{a(h-y)} + e^{-a(h-y)}}{e^{ah} - e^{-ah}}; \quad \frac{\beta}{\varrho} = \frac{e^{a(h-y)} - e^{-a(h-y)}}{e^{ah} - e^{-ah}} \quad \ldots (20).$$

An der Oberfläche ($y = 0$) ist $\beta' = \varrho$, am Boden ($y = h$) ist $\beta = 0$; überall ist α wenigstens $= \beta$.

Ist insbesondere $\frac{h}{\lambda}$ sehr gross, also auch $ah = \pi \frac{h}{\lambda}$ sehr gross, so kann gesetzt werden:

$$\alpha = \beta = \varrho\, e^{-\pi \frac{y}{\lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21);$$

die Bahnen sind Kreise, deren Radien nach der Tiefe hin von ϱ bis Null abnehmen.

Ist $\frac{h}{\lambda}$ sehr klein, so wird:

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{h}\varrho; \quad \beta = \frac{h-y}{h}\varrho \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22);$$

die horizontalen Halbaxen der elliptischen Bahnen sind überall gleich und viel $> \varrho$, die verticalen Halbaxen nehmen nach oben hin proportional der Höhe über dem Boden bis ϱ zu.

§. 145. Wellen von grösserer Höhe.

Die Untersuchung der Wellenbewegung ist im vorigen §. unter so einschränkenden Voraussetzungen angestellt worden, dass es zweifelhaft ist, ob überhaupt oder mit welchem Grade der Annäherung die dabei gewonnenen Resultate auch als noch für Wellen von grösserer Höhe gültig betrachtet werden dürfen. Besonders kann die Voraussetzung einer im Vergleich nicht nur mit der Wellenlänge, sondern auch mit der Wassertiefe sehr kleinen Wellenhöhe allzusehr den thatsächlichen Umständen widersprechen, und in allen Fällen erscheint durch jene Voraussetzung die Continuitätsbedingung von so untergeordneter Bedeutung, dass die Verhältnisse dabei sich möglicher Weise ganz anders gestalten, als bei Wellen von grösserer Höhe.

Eine diese Mängel vermeidende und den technischen Anforderungen entsprechende, wenn auch nicht in jeder Hinsicht befriedigende Theorie der Wellenbewegung, und zwar bei Voraussetzung fortschreitender cylindrischer Wellen, hat Hagen* aufgestellt (zum Theil in nahem Anschluss an eine von Gerstner 1802 veröffentlichte Abhandlung); sie liegt den Entwicklungen der folgenden zwei Paragraphen im Wesentlichen zu Grunde. Der allgemeine Gang dieser Entwicklungen besteht darin, dass die rein geometrische Bedingung des continuirlichen Zusammenhanges bei unveränderlichem specifischem Volumen des Wassers zuerst für sich in Betracht gezogen wird, indem dadurch schon gewisse Einzelheiten der Erscheinung sich ergeben, deren Kenntniss die nachfolgende Untersuchung vereinfacht; diese hat sich nämlich dann nur noch auf die Prüfung zu erstrecken, ob und unter welchen Bedingungen die allgemeinen dynamischen Gesetze eine solche Bewegung gestatten, auf welche die geometrische Betrachtung in Verbindung mit gewissen a priori gemachten Annahmen führte. Durch dieses indirecte Verfahren und durch diese Zerlegung der hydrodynamischen in die allgemeinen dynamischen Gesetze und in die geometrische Continuitätsbedingung vermied Hagen die Schwierigkeiten, die sich einer directen und mehr systematischen Behandlung nach Analogie der Entwickelung des vorigen §., jedoch ohne die einschränkenden Voraussetzungen derselben, entgegenstellen.

Als Anschauungsmittel vergleicht Hagen die Wellenbewegung des Wassers mit der Erscheinung eines vom Winde bewegten Getreidefeldes, welches infolge des Hin- und Herschwankens der Halme den Anblick von Wellen gewährt, deren senkrecht gegen die Windrichtung sich erstreckende Kämme in der Richtung des Windes fortschreiten. Analoger Weise wird die in Wellenbewegung befindliche Wassermasse als ein System von Wasserfäden betrachtet, welche die im ruhigen Wasser vertical über einander liegenden Wassertheilchen beständig enthalten; diese Fäden, in continuirlicher Berührung unter sich, neigen und krümmen sich im Allgemeinen abwechselungsweise nach der einen und anderen Seite, indem sie zugleich länger oder kürzer und entsprechend dünner oder dicker werden. Trifft der obere Endpunkt eines solchen Fadens auf den Scheitel eines darüber hingehenden Wellenberges, so hat er bei verticaler Stellung seine grösste Länge und kleinste Dicke. Im Verlaufe des Fortschreitens der Welle neigt und krümmt er sich dann mehr und mehr im Sinne dieser fortschrei-

* „Ueber Wellen auf Gewässern von gleichmässiger Tiefe." Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1861; etwas weniger vollständig in Hagen's Handbuch der Wasserbaukunst, III. Theil Seeufer- und Hafenbau, 1. Band, §. 1 bis §. 4.

tenden Bewegung, wird dabei kürzer und dicker und erreicht seine grösste Neigung ungefähr dann, wenn sein oberer Endpunkt durch die horizontale Oberfläche des ruhigen Wassers oder durch die Grenze zwischen Wellenberg und Wellenthal hindurch geht. Von diesem Augenblicke an nimmt die Neigung wieder ab, während Länge und Dicke fortfahren kleiner resp. grösser zu werden bis, wenn der Faden auf den Scheitel des Wellenthales trifft, er wieder gerade gestreckt ist und dabei seine kleinste Länge und grösste Dicke erreicht hat; weiterhin neigt er sich nach der anderen Seite, indem er wieder länger und dünner wird u. s. f. Ob dabei der Fuss des Wasserfadens selbst mit hin und her geht, oder ob er feststeht, wie bei dem Getreidehalme, ist, wie sich zeigen wird, von der Wassertiefe abhängig.

Um die Continuitätsbedingung auszudrücken, denkt sich Hagen die Wassermasse im Ruhezustande durch horizontale Ebenen in Schichten von unendlich kleiner Dicke abgetheilt, und betrachtet die Veränderungen dieser stets dieselben materiellen Punkte enthaltenden Schichten bei der regelmässig ausgebildeten Wellenbewegung; sie bestehen in einer wellenförmig-cylindrischen Krümmung ihrer Grenzflächen und in einer periodischen Aenderung der ursprünglich gleichförmigen Dicke jeder solchen Schicht, wobei dieselbe wegen des continuirlichen Zusammenhanges der verschiedenen Schichten natürlich unter den Scheiteln der Wellenberge am grössten, der Wellenthäler am kleinsten sein muss. Stellt man sich zwei materielle Punkte A, A' vor, die beziehungsweise in der oberen und unteren Fläche einer solchen Schicht ursprünglich vertical übereinander lagen, und denkt sich eine durch AA' im Sinne der Fortpflanzungsgeschwindigkeit w gelegte Verticalebene V in diesem Sinne mit der Geschwindigkeit w fortbewegt, während die materiellen Punkte A, A' ihre Bahnen durchlaufen, so sind die Spuren L, L' dieser Punkte auf der Ebene V zwei Wellenlinien, die den wellenförmigen Flächenstreifen begrenzen, in welchem die betrachtete Schicht von der Verticalebene V geschnitten wird. Indem nun der continuirliche Zusammenhang in der Schicht selbst (in Verbindung mit der Unveränderlichkeit des specifischen Wasservolumens) offenbar verlangt, dass die geraden Verbindungslinien $A\ A'$ je zweier materieller Punkte wie A, A' gleichzeitig gleiche Elemente des wellenförmigen Flächenstreifens durchlaufen, so folgt, dass die Schichtdicke in irgend einem Punkte umgekehrt proportional sein muss der relativen Geschwindigkeit des mit diesem Punkte zusammenfallenden materiellen Punktes gegen die mit der Geschwindigkeit w im Sinne von w bewegte Ebene V, oder, was dasselbe sagt, dass die vertical gemessene Schichtdicke überall umgekehrt proportional sein muss der relativen Horizontalgeschwindig-

keit des betreffenden materiellen Punktes gegen die bewegte Ebene V. In der Mitte eines Wellenberges, wo die Schichtdicken am grössten sind, müssen die fraglichen relativen Geschwindigkeiten am kleinsten, in der Mitte eines Wellenthals am grössten sein; die Bewegungsrichtungen der materiellen Punkte stimmen dort mit der Fortpflanzungsrichtung überein, während sie hier entgegengesetzt sind. —

Wo in den folgenden Paragraphen kurzweg von Wasserfäden und Wasserschichten die Rede ist, sind diese Bezeichnungen in dem durch die vorhergehenden Bemerkungen bestimmten Sinne zu verstehen.

§. 146. Wellen bei unendlich grosser Wassertiefe.

Es werde angenommen, dass die Verbindungslinien der gleichzeitigen Oerter aller ursprünglich in einer lothrechten Geraden gelegenen materiellen Punkte mit gewissen festen Punkten M dieser Geraden beständig einander parallel bleiben.

Um zu prüfen, ob und unter welchen Umständen diese Annahme mit der Continuitätsbedingung verträglich ist, seien $B\,A$ und $B'\,A'$ (Fig. 56) die in der Zeit t gleichzeitig durchlaufenen Wege von zwei materiellen Punkten, die ursprünglich in der Lothrechten BB' unendlich nahe beisammen lagen, M und M' zwei Punkte der letzteren von solchen Lagen, dass der Annahme zufolge die Winkel BMA und $B'\,M'\,A'$ stets einander gleich, augenblicklich $= \varphi$ sind. Sind ferner y und $y + dy$ die Tiefen der Punkte M und M' unter einer gewissen Horizontalebene, so ist der Radiusvector $MA = r$ eine Function von y und φ, während y unabhängig variabel, dagegen φ eine Function von t ist; der Radiusvector $M'A'$, demselben φ entsprechend, ist also $= r + \dfrac{\partial r}{\partial y}\,dy$. Es seien ferner CA und $C'A'$ entsprechende Bögen der im vorigen §. mit L und L' bezeichneten Wellenlinien, nämlich die Spuren, welche die betrachteten zwei materiellen Punkte auf der mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit w der Wellen in deren Sinne bewegten Verticalebene V in der Zeit t hinterlassen, so dass $BC = B'C' = MO = wt$ ist. In Beziehung auf OM als

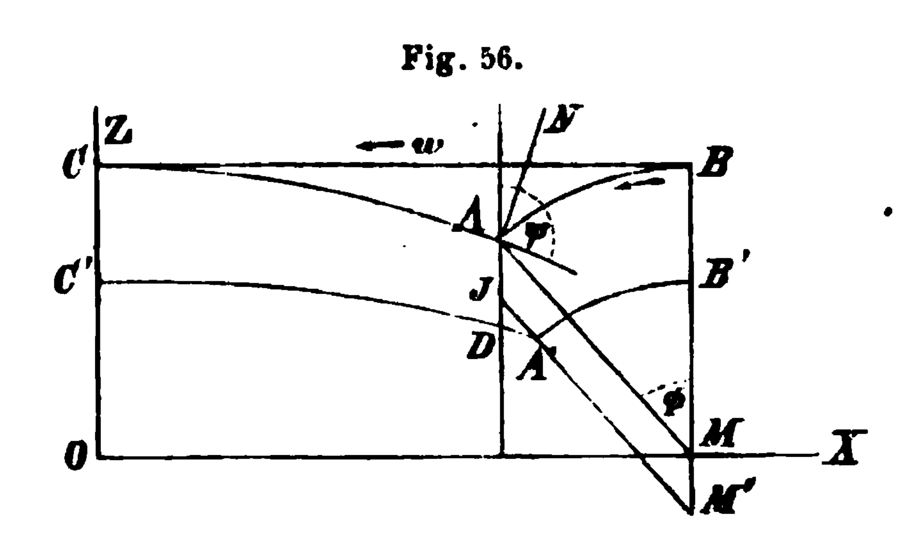


Fig. 56.

x-Axe und OC als z-Axe sind dann die Coordinaten des Punktes A der Wellenlinie CA:

$$x = wt - r\sin\varphi;\quad z = r\cos\varphi \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

In diesem Punkte ist die vertical gemessene Dicke des zwischen den Wellenlinien CA und $C'A'$ enthaltenen Flächenstreifens nach der Figur:

$$AD = AI + ID = dy + ID.$$

Ist aber ψ der Winkel, unter welchem die Tangente der Wellenlinie CA im Punkte A gegen die z-Axe geneigt ist, verstanden als der Winkel, um welchen OZ im Sinne ZOX gedreht werden muss, um jener Tangente parallel zu werden, so ist mit Rücksicht auf das unendlich kleine Dreieck IDA', dessen Winkel bei I und D resp. $= \varphi$ und ψ sind,

$$ID = IA'\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin\psi} = -\frac{\partial r}{\partial y}dy\,(\sin\varphi\,\mathrm{cotg}\,\psi + \cos\varphi);$$

$$AD = dy - \frac{\partial r}{\partial y}dy\left(\sin\varphi\frac{dz}{dx} + \cos\varphi\right) \quad\ldots\ldots\ldots (2).$$

Die relative Horizontalgeschwindigkeit des materiellen Punktes in A gegen die bewegte Ebene V ist $= \frac{dx}{dt}$, und wenn das Product aus derselben und der Dimension AD, welches der Continuitätsbedingung gemäss in allen Punkten der Wellenlinie CA gleich gross, also unabhängig von φ sein muss, mit P bezeichnet wird, so ist also

$$\frac{P}{dy} = \left(1 - \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial y}\right)\frac{dx}{dt} - \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial y}\frac{dz}{dt}$$

und findet man durch Substitution der den Gleichungen (1) entsprechenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= w - r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} - \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\\ \frac{dz}{dt} &= -r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\end{aligned}\right|\quad\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{P}{dy} = w + r\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\varphi}{dt} - \left(w\frac{\partial r}{\partial y} + r\frac{d\varphi}{dt}\right)\cos\varphi$$
$$- \frac{\partial r}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von φ, wenn

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi} = 0;\quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{w}{r}\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{w}{r}\frac{dr}{dy} \quad\ldots\ldots\ldots (5)$$

gesetzt wird. Daraus folgt, dass die materiellen Punkte sich in

kreisförmigen Bahnen mit constanten Winkelgeschwindigkeiten bewegen können, und indem dann letztere gemäss der zu Grunde liegenden Annahme auch für alle Punkte gleich sind, nämlich $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{\tau}$, unter 2τ die gemeinschaftliche Schwingungsdauer verstanden, so folgt

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\pi}{w\tau}\,dy = -\frac{\pi}{\lambda}\,dy$$

mit $\lambda = w\tau =$ der halben Wellenlänge, also, wenn $r = \varrho$ für $y = 0$ ist:

$$r = \varrho\, e^{-\pi\frac{y}{\lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (21) in §. 144, wenn nur die horizontale Ebene, in welcher die Mittelpunkte der von den oberflächlichen materiellen Punkten durchlaufenen Kreisbahnen liegen, statt der ursprünglichen horizontalen Wasseroberfläche (mit der sie nur bei verschwindend kleiner Wellenhöhe zusammenfällt) hier als die Ebene angenommen wird, von der aus die Tiefe y gerechnet wird; ϱ ist dann auch hier die halbe Wellenhöhe. Die Radien der kreisförmigen Bahnen nehmen nach Gl. (6) mit der Tiefe ab, sind aber erst in unendlicher Tiefe = Null, wie es am Boden der Fall sein müsste.

Durch die Gleichungen (1), worin auch

$$wt = \frac{\lambda}{\tau}\,t = \frac{\lambda}{\pi}\,\varphi$$

gesetzt werden kann, ist irgend eine Wellenlinie als eine gestreckte Cycloide charakterisirt, d. h. als die Curve, welche irgend ein Punkt des Kreises zum Radius r beschreibt, wenn dieser Kreis mit einem andern zum Radius $\frac{\lambda}{\pi}$ concentrisch verbunden und letzterer auf einer Geraden abgewälzt wird. Wäre $\varrho = \frac{\lambda}{\pi}$, so wäre die obere Wellenlinie eine gewöhnliche Cycloide, entsprechend scharfkantigen Scheiteln der Wellenberge: die Mittelpunkte der von den obersten Wassertheilchen durchlaufenen Bahnen lägen dann um $\frac{\varrho}{2}$ über der ursprünglichen horizontalen Wasseroberfläche. In der That ist aber bei Wellen auf dem Meere selbst nach dem heftigsten Sturme $\frac{\varrho}{\lambda}$ immer viel $< \frac{1}{\pi}$, nach Beobachtungen von Stanley höchstens $= {}^1/_{12}$, nach Scoresby nur $= {}^1/_{20}$.

Es bleibt noch übrig zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen diese Bewegungen, zu denen die geometrische Betrachtung geführt hat, den dynamischen Gesetzen entsprechen. Ihnen zufolge muss aber für

jedes unendlich kleine Wassertheilchen, wenn es in einer Kreisbahn mit constanter Geschwindigkeit sich bewegen soll, die resultirende beschleunigende Kraft auf die blosse Centripetalkraft sich reduciren, oder sie muss mit der Centrifugalkraft im Gleichgewicht sein, die für ein Wassertheilchen bei A (Fig. 56) die Richtung MA und die Grösse $r\omega^2$ hat, wenn zur Abkürzung die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{\tau} = \frac{\pi w}{\lambda} = \omega \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

gesetzt wird. Die beschleunigende Kraft ist aber die Resultante der lothrechten Schwerkraft $= g$ und des auf die Masseneinheit des Wassertheilchens bezogenen Drucks $= N$, den es an seiner Oberfläche von der angrenzenden Wassermasse (an der freien Oberfläche zum Theil von der Luft) erfährt, und welcher normal zu der betreffenden Wellenfläche gerichtet ist (bei A, Fig. 56, im Sinne AN normal zur Wellenlinie CA), wenn, wie vorläufig angenommen werde, die Pressung nur von einer zur anderen Wellenfläche variabel, in allen Punkten derselben Wellenfläche aber gleich ist. Das Gleichgewicht der Kräfte N, g und der Centrifugalkraft $r\omega^2$ im Punkte A (Fig. 56) wird dann ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} N \sin\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) &= -N \cos\psi = r\omega^2 \sin\varphi \\ N \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) &= N \sin\psi = g - r\omega^2 \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (8).$$

Daraus folgt:

$$-tg\psi = \frac{g - r\omega^2 \cos\varphi}{r\omega^2 \sin\varphi}.$$

Nach Gl. (3) ist aber auch mit Rücksicht auf Gl. (5) und (7):

$$-tg\psi = -\frac{dx}{dz} = \frac{w - r\omega \cos\varphi}{r\omega \sin\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und ergiebt sich aus der Vergleichung beider Ausdrücke:

$$g = w\omega = \frac{\pi}{\lambda} w^2; \quad w = \sqrt{\frac{g\lambda}{\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (17) in §. 144.

Schliesslich ist nur noch die Annahme gleichförmiger Pressung irgend einer Wellenfläche zu prüfen. Wird zu dem Ende mit ds ein Längenelement der Wellenlinie CA (Fig. 56), mit dn ihre bei A normal gemessene Entfernung von der unendlich nahe benachbarten Wellenlinie $C'A'$ bezeichnet, und das bisher betrachtete Wassertheilchen als ein gerades

prismatisches Wasserelement vorausgesetzt, dessen Querschnitt in der Ebene der Figur $= ds\,dn$ und dessen dazu senkrechte Länge $= 1$, dessen Masse also $= \mu\,ds\,dn$ ist, so ist

$$\frac{N.\mu\,ds\,dn}{ds} = \mu N dn$$

der Unterschied der specifischen Pressungen in entsprechenden Punkten der Wellenflächen CA und $C'A'$; und da in einer Wellenfläche, nämlich in der von der Atmosphäre gleichförmig gedrückten Wellenoberfläche die in Rede stehende Annahme zutrifft, so bedarf ihre allgemeine Bestätigung nur des Nachweises, dass Ndn oder mit Rücksicht auf Fig. 56, worin AD die vertical gemessene Entfernung der Wellenlinien CA und $C'A'$ bezeichnet, dass

$$N.AD\cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) = N\sin\psi.AD$$

auf Grund der bisherigen Resultate eine von dem besonderen Punkte A der Wellenlinie CA, d. h. vom Winkel φ unabhängige Grösse ist. In der That ist aber nach Gl. (2) mit Rücksicht auf Gl. (5), (7) und (9):

$$\frac{AD}{dy} = 1 + \frac{r\omega}{w}\left(\sin\varphi\,\frac{-r\omega\sin\varphi}{w - r\omega\cos\varphi} + \cos\varphi\right)$$

$$= \frac{w - r\omega.\cos\varphi + \dfrac{r\omega}{w}(w\cos\varphi - r\omega)}{w - r\omega\cos\varphi} = \frac{w^2 - (r\omega)^2}{w(w - r\omega\cos\varphi)}$$

und somit nach Gl. (8) und (10):

$$N\sin\psi.AD = \frac{\omega}{w}\,[w^2 - (r\omega)^2]\,dy$$

unabhängig von φ.

Das wichtigste der gewonnenen Resultate ist die Beziehung (10) zwischen der Wellenlänge (2λ) und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit w. Sie lehrt zwar insofern nichts Neues, als sie mit Gl. (17) in §. 144 übereinstimmt; doch ist es wichtig, ihre Gültigkeit als unabhängig von dem Verhältnisse $\frac{\varrho}{\lambda}$ der Wellenhöhe zur Wellenlänge erkannt zu haben. Nachträglich ergiebt sich auch die Voraussetzung unter 3) in §. 144 als nothwendige Folge des ersten Theils der Voraussetzung unter 2) daselbst, dass ϱ sehr klein im Vergleich mit λ sei; denn das Verhältniss der Geschwindigkeitshöhe eines materiellen Punktes zur Wellenhöhe ist an der Wellenoberfläche, wo es am grössten ist, mit Rücksicht auf Gl. (7) und (10):

$$\frac{(\varrho\omega)^2}{2g.2\varrho} = \frac{\varrho}{4g}\left(\frac{\pi w}{\lambda}\right)^2 = \frac{\varrho}{4g}\,\frac{\pi^2}{\lambda}\,\frac{g}{\pi} = \frac{\pi}{4}\,\frac{\varrho}{\lambda}.$$

Beobachtungen auf dem Meere, die zur Prüfung von Gl. (10) dienen können, sind von W. Walker in der Bai von Plymouth, von Stanley und von Scoresby im atlantischen Ocean angestellt worden; sie lassen im Durchschnitt eine so gute Uebereinstimmung mit der Gleichung erkennen, wie die Unsicherheit der Messungen auf einem in der Fahrt begriffenen Schiffe erwarten lässt. Eine besonders gute Uebereinstimmung zeigte auch eine von Hagen angeführte Messung des Lootsen-Commandeurs Knoop auf dem Haffe in der Nähe von Swinemünde; sie ergab $\lambda = 3,92$ Mtr., $w = 3,485$ Mtr., entsprechend $g = 9,73$ Mtr. nach Gl. (10). Indem aber hier die Wassertiefe nur etwa 4,4 Mtr. betrug, ergiebt sich zugleich, dass die gefundenen Gesetze, soweit sie die Bewegung der oberen Wasserschichten betreffen, auch bei solchen Wassertiefen von mittlerer Grösse hinlänglich zutreffend sind, dass wenigstens auf die Beziehung zwischen w und λ die jedenfalls abweichende Bewegung in der Nähe des Grundes keinen merklichen Einfluss hat.

§. 147. Wellen bei kleiner und gleichförmiger Wassertiefe.

Um die Bewegung der Wassertheilchen in diesem Falle zunächst durch Beobachtung im Allgemeinen kennen zu lernen, benutzte Hagen nach Analogie der Weber'schen Wellenrinne einen parallelepipedischen Kasten mit horizontalem Boden und verticalen Seitenwänden, 12 Fuss lang, 4 Zoll breit und hoch; in den Mitten der längeren Seitenwände befanden sich durch Glasscheiben geschlossene Oeffnungen zur Beobachtung der Vorgänge im Inneren des in diesem Kasten befindlichen Wassers. Indem es Hagen darauf ankam, bei jedem Versuche nicht eine einzelne, sondern eine lange Reihe möglichst gleichmässiger Wellen zu erzeugen, an denen dieselben Erscheinungen wiederholt beobachtet und die erforderlichen Messungen vorgenommen werden könnten, war die Erregungsvorrichtung wesentlich von derjenigen verschieden, die Weber bei seinen bekannten Versuchen angewendet hatte; sie bestand aus einer den Querschnitt der Rinne beinahe ausfüllenden rechteckigen Scheibe, welche an dem einen Ende der Rinne durch eine Kurbel und Schubstangen so bewegt wurde, dass sie Schwingungen um ihre untere Kante ausführte, während diese zugleich über dem Boden der Rinne hin und her oscillirte. Die Weiten der Schwingungen um die untere Kante sowie der geradlinigen Schwingungen dieser Kante selbst konnten zwischen weiten Grenzen geändert werden,

desgleichen die Zahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit. Zur mittelbaren Beobachtung der Bewegungen der Wassertheilchen erwies sich am brauchbarsten ein Glimmerblättchen von 1 Zoll Breite und Höhe, drehbar gemacht um einen feinen Draht, der durch das in der Mitte gespaltene Blättchen hindurchgezogen und in den Oesen eines aus eben solchem Draht gebildeten, an zwei Fäden aufgehängten Rahmens horizontal und leicht drehbar gelagert war; das Blättchen war unten etwas beschwert, so dass es im ruhigen Wasser sich eben vertical stellte, wog aber so sammt Axe und Rahmen nur 0,34 Gramm und gab sehr geringe Bewegungen im Wasser sicher an.

Das wichtigste Resultat dieser Versuche bestand in der Wahrnehmung, dass das Glimmerblättchen sich nur hin und her bewegte, ohne sich abwechselnd vorwärts und rückwärts überzuneigen, und zwar geschah dieses nicht nur dann, wenn die die Wellen erregende Scheibe in lothrechter Stellung hin und her bewegt wurde, sondern auch im anderen Grenzfalle, wenn der untere Rand an derselben Stelle blieb und die Scheibe folglich nur nach vorn und hinten sich überneigte. Die im letzteren Falle dem Wasser mitgetheilte Bewegung konnte also bei so geringer Wassertiefe sich nicht weit fortsetzen und war im Abstande von 4 Fuss schon vollständig in die einfach parallele Verschiebung der verticalen Wasserfäden übergegangen. Es zeigte sich auch, dass die leichten und feinen Staubmassen, die am Boden der Rinne sich nach und nach ansammelten, mit jeder Welle ebenso weit hin und her geschoben wurden wie das Glimmerblättchen selbst.

Die Wellenbewegung kann man sich somit im vorliegenden Falle darin bestehend denken, dass die verticalen Wasserfäden, indem sie beständig gerade, vertical und gleichförmig dick bleiben, in horizontaler Richtung sich hin und her bewegen, in einem Wellenberge sich zusammenschieben und dabei entsprechend dünner und länger werden, in einem Wellenthale dagegen sich auseinander bewegen und dabei entsprechend dicker und kürzer werden. Alle materiellen Punkte, die ursprünglich in einer verticalen Geraden lagen, bewegen sich in geschlossenen Bahnen so, dass ihre gleichzeitigen Oerter in denselben stets in einer verticalen Geraden liegen; die horizontalen Durchmesser dieser Bahnen sind gleich, die verticalen nehmen mit der Entfernung vom Boden zu und sind an diesem selbst = Null. Wären diese Bahnen Ellipsen, wie bei der Untersuchung in §. 1[illegible] sich ergeben hatte, wäre α die für alle gleiche horizontale, β die für [illegible] einzelnen Bahnen verschiedene verticale Halbaxe, und wäre für eine solche Bahn (Fig. 56) M der Mittelpunkt, B der obere Scheitelpunkt, BA der [illegible]

ihm aus gerechnet in der Zeit t durchlaufene Bogen, so wären in Beziehung auf rechtwinkelige Coordinatenaxen der ξ und η mit dem Anfangspunkte M (die ξ-Axe horizontal und positiv im Sinne von w, die η-Axe positiv im Sinne MB) die Coordinaten des Punktes A:

$$\xi = \alpha \sin\varphi; \quad \eta = \beta \cos\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

unter φ den Drehungswinkel BMA_1 der Geraden MA_1 in der Zeit t verstanden, wenn A_1 der Punkt ist, in welchem die Lothrechte durch A einen um M mit dem Radius α beschriebenen Kreis auf derselben Seite der ξ-Axe schneidet, auf welcher der Punkt A liegt. Dabei wäre α constant, β eine Function von y, wenn mit y hier die Höhe des Punktes M über dem horizontalen Boden bezeichnet wird. Um aber die Möglichkeit einer Correctur jener in §. 144 unter allzu beschränkten Voraussetzungen gefundenen Resultate offen zu lassen, soll übrigens unter Beibehaltung der erklärten Buchstabenbedeutungen und der Gleichungen (1) nur β als Function zugleich von y und von φ angenommen und nun geprüft werden, ob und wie dann diese Gleichungen mit der Continuitätsbedingung und mit den dynamischen Gesetzen in Einklang gebracht werden können.

Mit Bezugnahme auf die Figur 56 im vorigen §., in der jedoch die x-Axe um die Strecke y abwärts verschoben gedacht werde, so dass sie in den Boden fällt, sind die Coordinaten des Punktes A der Wellenlinie CA gemäss den Gleichungen (1):

$$x = wt - \alpha \sin\varphi; \quad z = y + \beta \cos\varphi \;\ldots\ldots\ldots (2).$$

Daraus ergiebt sich die relative Horizontalgeschwindigkeit $= \frac{dx}{dt}$ des in A befindlichen materiellen Punktes gegen die im Sinne von w mit der Geschwindigkeit w bewegte Verticalebene V. Indem aber die gleichen Winkeln φ entsprechenden Punkte A und A' von zwei unendlich nahe benachbarten Wellenlinien CA, $C'A'$ jetzt in einer Verticalen liegen, ist die vertical gemessene Breite des von ihnen begrenzten Flächenstreifens $= \frac{\partial z}{\partial y} dy$ wobei jetzt, einem positiven $dy = MM'$ entsprechend, M' oberhalb M, $B'A'C'$ oberhalb BAC in Fig. 56 liegend zu denken ist), und folgt dann aus der in §. 145 formulirten Continuitätsbedingung, dass

$$\frac{dx}{dt}\frac{\partial z}{\partial y} = \left(w - \alpha \cos\varphi \frac{d\varphi}{dt}\right)\left(1 + \frac{\partial \beta}{\partial y} \cos\varphi\right)$$

einen von φ unabhängigen Werth haben, also $= w$ sein muss, entsprechend $\cos\varphi = 0$. Daraus ergiebt sich

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{a\cos\varphi}\left(w - \frac{w}{1+\frac{\partial\beta}{\partial y}\cos\varphi}\right) = \frac{w}{a}\,\frac{\frac{\partial\beta}{\partial y}}{1+\frac{\partial\beta}{\partial y}\cos\varphi}$$

und daraus weiter, weil der Annahme zufolge φ, also auch $\frac{d\varphi}{dt}$ unabhängig von y ist, $\frac{\partial\beta}{\partial y}$ = einer Function $f(\varphi)$ nur von φ, also mit Rücksicht darauf, dass für $y = 0$ auch $\beta = 0$ sein muss, $\beta = yf(\varphi)$. Mit der kürzeren Bezeichnung f für $f(\varphi)$ ist somit

$$\eta = yf\cos\varphi;\quad z = y(1 + f\cos\varphi) \quad\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{w}{a}\,\frac{f}{1+f\cos\varphi} \quad\ldots\ldots\ldots (4)$$

Bemerkenswerth ist, dass (unabhängig von der Function f) die von der ξ-Axe und der betreffenden Wellenlinie begrenzten, abwechselungsweise über und unter der ξ-Axe gelegenen Flächenräume gleich gross sind. Nach obigen Gleichungen ist nämlich ein Elementarstreifen einer solchen Fläche:

$$\eta\,dx = yf\cos\varphi\,(w\,dt - a\cos\varphi\,d\varphi)$$

$$= yf\cos\varphi\left(\frac{1+f\cos\varphi}{f} - \cos\varphi\right)a\,d\varphi = ya\cos\varphi\,d\varphi$$

$$\eta\,dx = y\,d\xi \quad\ldots\ldots\ldots (5)$$

Die ganze Fläche zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten der Wellenlinie mit der ξ-Axe ist also $= 2ay$, entsprechend einer Aenderung von ξ um $2a$. Daraus ist zu schliessen, dass jede Wellenfläche dieselben materiellen Punkte enthält, die ursprünglich in der Horizontalebene der betreffenden Punkte M lagen, und dass insbesondere für die materiellen Punkte an der Oberfläche $y = h$ = der mittleren oder ursprünglichen Wassertiefe ist.

Die noch unbestimmt gebliebene Function f ist jedenfalls so beschaffen, dass

$$f(\varphi) = f(-\varphi) \quad\ldots\ldots\ldots (6)$$

ist, entsprechend einer symmetrischen Gestalt der Bahn in Beziehung zu die η-Axe. Ausserdem sind ihre Constanten bedingt durch die Verhältnisse der Wellenlänge $= 2\lambda$ zur Constanten a und der Wellenhöhe = 2 zur Wassertiefe h. Nach Gl. (1), (3) und (5) ist nämlich

$$dx = \frac{y\,d\xi}{\eta} = \frac{ya\cos\varphi}{yf\cos\varphi}\,d\varphi = \frac{a}{f}\,d\varphi,$$

also mit Rücksicht auf Gl. (6):

$$\lambda = \frac{1}{2}\int_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} dx = \frac{\alpha}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{f(\varphi)} = \alpha\int_{0}^{\pi}\frac{d\varphi}{f(\varphi)} \quad \ldots\ldots\ldots (7).$$

Die Wellenhöhe ist aber die Differenz der Werthe von η, welche $y = h$, $\varphi = 0$ und $y = h$, $\varphi = \pi$ entsprechen, somit nach Gl. (3):

$$\varrho = h\frac{f(0) + f(\pi)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Zur näheren Bestimmung der Function $f(\varphi)$ müssen die dynamischen Verhältnisse berücksichtigt werden. Dazu werde ein Wasserelement betrachtet, welches von zwei der xz-Ebene parallelen Ebenen, deren Entfernung $= 1$ ist, und von zwei zur x-Axe senkrechten Ebenen, deren veränderliche Entfernung $= dx$ ist, begrenzt wird. Ist m seine Masse, dm die Masse eines der Elemente zweiter Ordnung, in die es durch eine Schaar von Horizontalebenen zerlegt werden kann, so ist seine lebendige Kraft:

$$L = \frac{1}{2}\int dm\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[m\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \int dm\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right].$$

Ist aber $\eta_1 = hf\cos\varphi$ der Werth von η für $y = h$, so ergiebt sich mit

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{y}{h}\frac{d\eta_1}{dt} \text{ und } dm = \frac{m}{h}dy$$

$$\int dm\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \frac{m}{h^3}\left(\frac{d\eta_1}{dt}\right)^2\int_0^h y^2 dy = \frac{m}{3}\left(\frac{d\eta_1}{dt}\right)^2$$

$$L = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{d\eta_1}{dt}\right)^2\right]$$

$$= \frac{m}{2}\left[\alpha^2\cos^2\varphi + \frac{h^2}{3}(f'\cos\varphi - f\sin\varphi)^2\right]\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

mit $f' = \frac{df}{d\varphi}$, oder mit Rücksicht auf Gl. (4):

$$L = \frac{mw^2}{2}\frac{f^2\cos^2\varphi + \frac{1}{3}\frac{h^2}{\alpha^2}(ff'\cos\varphi - f^2\sin\varphi)^2}{(1 + f\cos\varphi)^2} \quad \ldots . (9).$$

Die Aenderung dL dieser lebendigen Kraft bei der Bewegung des Wasserelementes um $d\xi$ im Sinne der ξ-Axe, entsprechend der Aenderung $d\varphi$ des Winkels φ, muss der gleichzeitigen Arbeit der auf das Wasserelement wirkenden Kräfte gleich sein. Wenn dabei von der inneren und

äusseren Reibung abgesehen oder dieselbe durch den (wie bei den Hagenschen Versuchen) beständig wirkenden Antrieb als immer gerade aufgewogen vorausgesetzt, und wenn ferner berücksichtigt wird, dass die Arbeit des Atmosphärendrucks auf die Oberfläche des Wasserelements von constantem Volumen = Null ist, so sind jene Kräfte nur die Schwere und die Pressungen des angrenzenden Wassers auf die vordere und hintere Fläche, nämlich auf die beiden zur ξ-Axe senkrechten Seitenflächen des Wasserelementes, welche Pressungen dabei ohne Rücksicht auf den Atmosphärendruck zu berechnen sind. Insoweit übrigens diese beiden Pressungen einander gleich $= P$ sind, ist die algebraische Summe ihrer Arbeiten und der Arbeit der Schwerkraft mg des Wasserelementes = Null. Werden nämlich η und z in der Folge auf die freie Oberfläche bezogen, entsprechend $y = h$, so dass nun

$$\eta = hf\cos\varphi;\quad z = h(1 + f\cos\varphi)\ \ldots\ldots\ldots (10)$$

ist, und sind bei der betrachteten elementaren Bewegung des Wasserelementes δdx und δz die Aenderungen seiner Dicke und Höhe, so ist wegen

$$P = \frac{\gamma z^2}{2} \text{ und } mg = \gamma z dx$$

die fragliche Summe von Arbeiten:

$$-P\delta dx - mg\frac{\delta z}{2} = -\frac{\gamma z}{2}(z\delta dx + dx\delta z) = -\frac{\gamma z}{2}\delta(z dx) = 0.$$

weil $z dx = \frac{mg}{\gamma}$ constant ist. Hiernach ist, wenn X (positiv im Sinne der x-Axe) den Unterschied der Pressungen auf die beiden Flächen des Wasserelementes bedeutet,

$$dL = -Xd\xi:\quad L + \int Xd\xi = Const.\ \ldots\ldots (11)$$

Darin ist mit Rücksicht darauf, dass $dz = d(h + \eta) = d\eta$,

$$X = \gamma z(-dz) = -\frac{\gamma}{g}z dx . g\frac{d\eta}{dx} = -mg\frac{d\eta}{dx},$$

also wegen $d\xi = \frac{\eta}{h}dx$ nach Gl. (5):

$$\int Xd\xi = -\frac{mg}{h}\int \eta d\eta = -\frac{mg}{h}\frac{\eta^2}{2} = -\frac{m}{2}ghf^2\cos^2\varphi.$$

Die Substitution dieses Ausdruckes und des Ausdruckes (9) von L in (11) ergiebt nach Division mit $\frac{mw^2}{2}$, unter C eine Constante verstanden

$$\frac{f^2 \cos^2\varphi + \frac{1}{3}\frac{h^2}{\alpha^2}(ff'\cos\varphi - f^2\sin\varphi)^2}{(1+f\cos\varphi)^2} - \frac{gh}{w^2} f^2 \cos^2\varphi = C \,. \quad (12).$$

Nach §. 144, Gl. (18) und (22), wäre

$$w = \sqrt{gh} \quad \text{und} \quad \eta = \varrho\cos\varphi, \quad \text{also} \quad f = \frac{\varrho}{h}, \; f' = 0,$$

und ginge dadurch die Bedingung (12) über in:

$$\frac{\cos^2\varphi + \frac{1}{3}\frac{\varrho^2}{\alpha^2}\sin^2\varphi}{\left(1 + \frac{\varrho}{h}\cos\varphi\right)^2} - \cos^2\varphi = Const.$$

Man erkennt daraus, dass die Gültigkeit jener Lösung wesentlich an die Voraussetzung verschwindend kleiner Werthe von $\frac{\varrho}{h}$ und $\frac{\varrho}{\alpha}$ (nach §. 144, Gl. 22 von einerlei Grössenordnung mit $\frac{h}{\lambda}$) gebunden ist.

Bei den Versuchen von Hagen war aber $\frac{\varrho}{h}$ zuweilen fast $= \frac{1}{4}$ und $\frac{\varrho}{\alpha}$ gar nahe $= 1$. Unter solchen Umständen kann man versuchen, durch die den Gleichungen (6) und (8) entsprechende allgemeinere Annahme:

$$f = \frac{\varrho}{h}(1 + p\cos\varphi + q\cos^3\varphi + r\cos^5\varphi + s\cos^7\varphi + \ldots) \quad \ldots (13)$$

bei passender Bestimmung der Coefficienten p, q, r, s ... eine wenigstens besser zutreffende Lösung zu erhalten. Wenn man diesen Ausdruck von f und

$$f' = -\frac{\varrho}{h}(p + 3q\cos^2\varphi + 5r\cos^4\varphi + 7s\cos^6\varphi + \ldots)\sin\varphi$$

in Gl. (12) substituirt, zur Abkürzung

$$n = \frac{\varrho}{h}, \quad a = 3\frac{\alpha^2}{\varrho^2}, \quad b = \frac{gh}{w^2}, \quad a' = a - 1 - ab$$

setzt, die Gleichung mit $\frac{a}{n^2}$ multiplicirt und ihre linke Seite in eine nach Potenzen von $\cos\varphi$ fortschreitende Reihe entwickelt, so erhält man als erste Annäherung wenn nämlich in den Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\cos\varphi$ kleine Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden unter der Voraussetzung, dass n, p, q, r, s ... mit einander vergleichbare kleine Brüche erster Ordnung sind, während a und b mit der Einheit vergleichbare Zahlen sein können):

$$1 + 2(3p - n)\cos\varphi + a'\cos^2\varphi + 2[5q - (2-a')p - (a-1)n]\cos^3\varphi$$
$$+ 2[7r - (4-a')q]\cos^5\varphi + 2[9s - (6-a')r]\cos^7\varphi + \ldots = Const.$$

Diese Gleichung wird unabhängig von φ erfüllt, wenn

$$Const. = 1\,; \quad a' = 0$$

$$3p = n\,; \quad p = \frac{1}{3}\,n = \frac{1}{3}\,\frac{\varrho}{h}$$

$$5q = 2p + (a-1)\,n = an - p\,; \quad q = \frac{1}{5}\left(3\,\frac{\alpha^2}{\varrho^2} - \frac{1}{3}\right)\frac{\varrho}{h}$$

$$7r = 4q\,; \quad r = \frac{4}{7}\,q$$

$$9s = 6r\,; \quad s = \frac{6}{9}\,r = \frac{4\,.\,6}{7\,.\,9}\,q \text{ etc.}$$

gesetzt wird.* Das bemerkenswertheste Resultat ist die Gleichung:

$$a' = a - 1 - ab = 0\,; \quad b = \frac{gh}{w^2} = 1 - \frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{3}\,\frac{\varrho^2}{\alpha^2}$$

$$w = \sqrt{\frac{gh}{1 - \frac{1}{3}\,\frac{\varrho^2}{\alpha^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14.$$

Mit demselben Grade von Annäherung ist die halbe Wellenlänge nach Gl. 7

$$\lambda = h\,\frac{\alpha}{\varrho}\int_0^\pi d\varphi\,(1 - p\cos\varphi - q\cos^3\varphi - \ldots) = \pi h\,\frac{\alpha}{\varrho}^{**} \quad \ldots (15$$

Durch die letzte Gleichung wird die erste der Beziehungen (22) ... §. 144, welche dort für sehr kleine (streng genommen verschwinden)

---

* Indem hiernach die Coefficienten q, r, s ... mit p vergleichbare Grösse haben, insbesondere mit $\alpha > \varrho$

$$q > \frac{8}{15}\,\frac{\varrho}{h}, \text{ d. i. } > \frac{8}{5}\,p$$

ist, war es nicht gerechtfertigt, dass **Hagen** von vorn herein

$$f = \frac{\varrho}{h}\,(1 + p\cos\varphi)$$

setzte und die Glieder mit $\cos^2\varphi$ und den höheren Potenzen von $\cos\varphi$ in der zu erfüllenden identischen Gleichung vernachlässigte.

** Wenn **Hagen** statt dessen

$$\lambda = h\,\frac{\alpha}{\varrho}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 + p\cos\varphi} = \frac{\pi h}{\sqrt{1 - p^2}}\,\frac{\alpha}{\varrho}$$

setzte, so ist die vermeintlich grössere Genauigkeit dieser Beziehung illusorisch mit Rücksicht auf die unbeachtet gebliebenen Glieder der Function f und der dynamischen Bedingungsgleichung.

kleine) Werthe von $\frac{h}{\lambda}$, also von $\frac{\varrho}{\alpha}$, und bei Voraussetzung eines gleichfalls sehr kleinen (verschwindend kleinen) Werthes von $\frac{\varrho}{h}$ gefunden wurde, als angenähert gültig auch für solche Werthe von $\frac{\varrho}{\alpha}$ bestätigt, die mit der Einheit vergleichbar sind, und für, wenn auch kleine, doch nicht sehr kleine (verschwindend kleine) Werthe von $\frac{\varrho}{h}$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit w ist dann aber nach Gl. (14) wesentlich grösser als nach §. 144, Gl. (18), und es wird der Widerspruch sogar noch erheblicher, wenn aus der allgemeinen Gleichung (16) von w in §. 144 bei Voraussetzung eines weniger kleinen Werthes von $ah = \pi \frac{h}{\lambda}$ mit

$$e^{ah} = 1 + ah + \frac{1}{2} a^2h^2; \quad e^{-ah} = 1 - ah + \frac{1}{2} a^2h^2$$

$$w = \sqrt{\frac{g}{a} \frac{2ah}{2 + a^2h^2}} = \sqrt{\frac{gh}{1 + \frac{1}{2} a^2h^2}} = \sqrt{\frac{gh}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2}}$$

gefolgert wird, während nach den obigen Gleichungen (14) und (15)

$$w = \sqrt{\frac{gh}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

wäre. Unter diesen Umständen war die Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von besonderem Interesse; folgende Zusammenstellung enthält die von Hagen gefundenen Werthe von w (in Zollen pro Sec.) als Mittelzahlen von je 10 (einzeln freilich sehr unsicheren) Messungen bei verschiedenen Wassertiefen h (in Zollen) nebst den entsprechenden Werthen von $\sqrt{gh}$ und $\sqrt{\frac{3}{2} gh}$; letztere würden Gl. (14) mit Rücksicht darauf entsprechen, dass ϱ immer fast $= \alpha$ und nur für $h < 1$ Zoll merklich $< \alpha$ beobachtet wurde. Die Grösse α betrug $^1/_4$ bis $^1/_2$ Zoll.

h	$\sqrt{gh}$	w	$\sqrt{\frac{3}{2} gh}$	$\frac{1}{w}\sqrt{\frac{3}{2} gh}$
1	19,3	19,3	23,7	1,23
1,5	23,7	24,9	29,0	1,17
2	27,4	27,8	33,5	1,21
2,5	30,6	33,2	37,5	1,13
3	33,6	37,7	41,1	1,09

Wie man sieht, ist für $h > 1$ Zoll immer $w > \sqrt{gh}$, wenn auch $< \sqrt{\frac{3}{2} gh}$; indem aber die Abweichung von Gl. (14), wie die Zahlen der letzten Columne nachweisen, mit abnehmender Wassertiefe zunimmt, also mit wachsendem Einflusse der bei der obigen Entwickelung nicht speciell in Rechnung gebrachten Reibung, kann es richtig sein, wenn Hagen diesem Umstande die Abweichung zuschreibt.

In noch höherem Grade musste die Reibung sich geltend machen, wenn der Erregungsapparat ausser Gang gesetzt wurde; die horizontalen Schwingungen dauerten dann zwar noch einige Minuten fort und nahmen vorübergehend sogar eine grössere Ausdehnung an, wogegen die Wellenhöhe sofort viel kleiner und bald unmessbar klein wurde.

Aehnliche Geschwindigkeitsmessungen sind in sehr grosser Zahl von Scott Russel in einer Wellenrinne von 20 Fuss Länge, 1 Fuss Breite und Höhe angestellt worden, von denen Hagen zwar anerkennt, dass sie in gewisser Hinsicht mit grösserer Schärfe ausgeführt wurden, als sein eigener Apparat zuliess, dabei aber findet, dass sie die Erscheinung in allzu verschiedenen Stadien der Entwickelung umfassten, als dass befriedigende Schlüsse aus den vielfach widerspruchsvollen Messungsresultaten gezogen werden könnten. Uebrigens fand auch Scott Russel mit wenigen Ausnahmen $w > \sqrt{gh}$, im Durchschnitt

$$w = \sqrt{g(h + \varrho)}.$$

§. 148. Wellen bei grösserer gleichförmiger Wassertiefe.

Indem sich gezeigt hat (siehe die Bemerkungen zu Ende von §. 146), dass bei endlicher und selbst bei nur mässiger Wassertiefe von wenigen Metern die Beziehung zwischen der Wellenlänge λ und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit w für die oberen Wasserschichten nicht merklich von derjenigen

$$w = \sqrt{\frac{g\lambda}{\pi}}$$

verschieden ist, die bei Voraussetzung einer unendlich grossen Wassertiefe gefunden wurde, nimmt Hagen an, dass bei beliebiger nicht sehr kleiner gleichförmiger Tiefe die ganze Wassermasse durch eine gewisse Uebergangsfläche so in zwei Theile getheilt werden könne, dass die Bewegungsgesetze des oberen Theils dieselben sind, welche nach §. 146 bei

unendlich grosser Tiefe, die des unteren Theils dieselben, welche nach §. 147 bei sehr kleiner Tiefe für die ganze Wassermasse gelten würden. In der Uebergangsfläche müsste dann freilich beiden Bewegungsarten dieselbe Bahn der Wassertheilchen entsprechen, also nach §. 146 eine Kreisbahn; weil aber das nach §. 147 nicht der Fall sein kann, so wird angenommen, dass hier für die materiellen Punkte des unteren Systems wenigstens der horizontale und verticale Bahndurchmesser einander gleich sind, und somit nach §. 147, Gl. (15) mit $\alpha = \varrho$ die Höhe h der Grenzfläche über dem Boden:

$$h = \frac{\lambda}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

gesetzt, unter 2λ die gemeinschaftliche Wellenlänge beider Systeme verstanden. Ist dann H die ganze Wassertiefe und 2ϱ die Wellenhöhe, so bestimmt Gl. (6) in §. 146 den Bahndurchmesser $2r$ für die in der Grenzfläche befindlichen materiellen Punkte:

$$\frac{r}{\varrho} = e^{-\pi\frac{H-h}{\lambda}} = e^{-\frac{H-h}{h}} = e^{1-\frac{H}{h}} \quad \ldots \ldots \ldots (2).$$

Bezüglich auf den Grad, in welchem die Wellen sich ausbilden, macht nun Hagen die weitere Annahme, es gestalte die Bewegung sich so, dass die innere Reibung zwischen den Wasserfäden einer ganzen Welle im Verhältniss zur lebendigen Kraft derselben ein Minimum ist; aus dieser Bedingung leitet er die Gleichung

$$\frac{2}{9}\left(\frac{\varrho}{h}\right)^2 = \frac{\frac{r}{\varrho}}{1-\left(\frac{r}{\varrho}\right)^3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

ab, und besitzt dann wegen

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{r}{H} : \frac{\varrho}{H} \text{ und } \frac{\varrho}{h} = \frac{\varrho}{H} : \frac{h}{H}$$

in (2) und (3) zwei Gleichungen zwischen den 3 Verhältnissen $\frac{h}{H}, \frac{\varrho}{H}, \frac{r}{H}$, aus welchen, wenn eines derselben bekannt ist, die beiden anderen, somit bei ferner gegebenem Werthe einer der 4 Grössen H, h, ϱ, r auch die anderen gefunden werden können.

Abgesehen von der zweifelhaften Berechtigung jener der Gl. (3) zu Grunde liegenden Annahme erscheint nun aber auch schon die Zerlegung der Wassermasse in zwei verschiedenen Bewegungsgesetzen folgende Theile als eine wenig befriedigende Lösung des Problems. Die ihr entsprechende

discontinuirliche Gestaltsänderung der Bahnen in der Grenzfläche wurde schon hervorgehoben. Ebenso wenig ist es denkbar, dass die Wasserfäden in ihren unteren Theilen ganz geradlinig bleibend nur hin und her gehen und erst oberhalb der Grenzfläche plötzlich eine periodische Krümmung und Neigung von endlicher Grösse annehmen. Dass endlich dem unteren Wellensystem eine im Verhältnisse $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit, wie dem oberen, nämlich nach Gl. (14) im vorigen §.

$$w = \sqrt{\frac{3}{2}gh} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g\lambda}{\pi}}$$

zugeschrieben werden müsste, wird von Hagen selbst als ein berechtigtes Bedenken zugestanden, wenn auch abgeschwächt durch die Hinweisung auf den Einfluss der Reibung und auf den Umstand, dass die Wellenbewegung sich erfahrungsmässig niemals ganz regelmässig gestaltet.

Mit Rücksicht auf diesen letzteren Umstand genügt allerdings eine nur angenäherte Lösung, aber es wird eine solche vorzuziehen sein, durch welche der einheitliche Charakter der ganzen Erscheinung gewahrt und jede offenbar unmögliche Unstetigkeit der Uebergänge im Inneren der Wassermasse vermieden wird. Das geschieht, wenn die Lösung des Problems für Wellen von sehr kleiner Höhe nach §. 144 als angenähert gültig auch für grössere Wellenhöhen betrachtet wird. in der That können die Entwickelungen der beiden vorhergehenden Paragraphen als Rechtfertigung ebenso gut dieser Annahme wie der Hagen'schen Vorstellung verwerthet werden, indem die Bewegungsgesetze bei sehr grosser Wassertiefe (§. 146) als gar nicht, bei sehr kleiner Wassertiefe (§. 147) wenigstens nicht als erheblich abhängig von der Wellenhöhe erkannt wurden. Auch ist es möglich, dass die Erscheinungen, wie sie Hagen für diesen letzteren Fall in seiner Wellenrinne beobachtete, durch die Interferenz der directen mit den von der verticalen Endwand der Wellenrinne reflectirten Wellen beeinflusst wurden, dass insbesondere bei unbegrenzter Ausdehnung des Wassers nach der Fortpflanzungsrichtung auch schon bei kleiner Wassertiefe eine von unten nach oben zunehmende Grösse der Horizontalbewegung, entsprechend einer periodischen Neigung und Krümmung der Wasserfäden, beobachtet worden wäre. Die zu Ende von §. 146 angeführte Beobachtung der zusammengehörigen Werthe $\lambda = 3{,}92$, $w = 3{,}485$, $h = 4{,}4$ Mtr., aus welcher, indem ihr $g = 9{,}78$ nach Gl. (10) jenes §. entspricht, die Anwendbarkeit dieser Gleichung und der ihr entsprechenden Annahme gleichförmiger Kreisbewegungen der materiellen Punkte auch für mässige Wassertiefen gefolgert wurde, kann eben-

gut als Bestätigung der allgemeineren Gl. (16), §. 144, gelten, aus welcher $g = 9{,}75$ folgen würde.

Schliesslich ist zu bemerken, dass die Continuitätsgleichung (1) in §. 144:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

welcher der Ausdruck (15) von φ daselbst genau entspricht, von der Voraussetzung einer sehr kleinen Wellenhöhe unabhängig ist, dass also auch die elliptischen Bahnen der materiellen Punkte, welche aus den betreffenden Ausdrücken ihrer Geschwindigkeitscomponenten

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\xi}{dt} \text{ und } v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{d\eta}{dt}$$

daselbst gefolgert wurden, der Continuitätsbedingung ohne Einschränkung entsprechend sind. Nur die dynamische Bedingungsgleichung und die daraus gezogenen Folgerungen (wozu Gl. (14) für die halbe Wellenhöhe ϱ, Gl. (16) für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit w, sowie die speciellen Ausdrücke (20) der Halbaxen α, β der elliptischen Bahnen gehören) wurden durch die Voraussetzung sehr kleiner Wellenhöhen vereinfacht und in ihrer allgemeinen Gültigkeit beschränkt, was aber deshalb weniger bedenklich ist, weil diese dynamische Gleichung bei der Abstraction von Bewegungswiderständen ohnehin nur auf angenäherte Gültigkeit Anspruch machen kann.

Nach §. 144, Gl. (9) und (16) ist mit

$$n = ah = \frac{\pi h}{\lambda} \text{ und } f(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

die halbe Schwingungsdauer:

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{g}\frac{1}{f(n)}} = \pi\sqrt{\frac{h}{g}\frac{1}{nf(n)}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen:

$$w = \sqrt{\frac{g\lambda}{\pi}f(n)} = \sqrt{gh\frac{f(n)}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

Folgende Tabelle zusammengehöriger Werthe von n, $f(n)$, $nf(n)$ und $\frac{f(n)}{n}$ erleichtert den Gebrauch dieser Formeln; $f(n)$ ist zugleich das betreffende Verhältniss $= \frac{\beta}{\alpha}$ des verticalen und des horizontalen Bahndurchmessers an der Oberfläche.

n	$f(n)$	$nf(n)$	$\frac{f(n)}{n}$	n	$f(n)$	$nf(n)$	$\frac{f(n)}{n}$	n	$f(n)$	$nf(n)$	$\frac{f(n)}{n}$
4	0,999	3,997	0,250	1,5	0,905	1,358	0,603	0,6	0,537	0,3222	0,895
3	0,995	2,985	0,332	1,4	0,885	1,240	0,632	0,5	0,462	0,2311	0,924
2,8	0,993	2,779	0,354	1,3	0,862	1,120	0,663	0,4	0,380	0,1520	0,950
2,6	0,989	2,572	0,380	1,2	0,834	1,000	0,695	0,3	0,291	0,0874	0,971
2,4	0,984	2,361	0,410	1,1	0,800	0,881	0,728	0,25	0,245	0,0612	0,980
2,2	0,976	2,147	0,444	1	0,762	0,762	0,762	0,2	0,197	0,0395	0,987
2	0,964	1,928	0,482	0,9	0,716	0,645	0,796	0,15	0,149	0,0223	0,992
1,8	0,947	1,704	0,526	0,8	0,664	0,531	0,830	0,1	0,100	0,0100	0,997
1,6	0,922	1,475	0,576	0,7	0,604	0,423	0,863	0,0	0,000	0,0000	1,000

§. 149. Wellen bei ungleichförmiger Wassertiefe.

Der feste Boden, welcher die in Wellenbewegung begriffene Wassermasse von unten begrenzt und welcher bei endlicher Tiefe bisher als eine horizontale Ebene vorausgesetzt wurde, sei im Allgemeinen irgend eine Cylinderfläche, deren Erzeugende denjenigen der gleichfalls cylindrischen Wellenflächen parallel ist. Es ist dann anzunehmen, dass den Wellen, wie sie auch übrigens an verschiedenen Stellen je nach der variablen Wassertiefe h verschieden sich ausbilden mögen, doch überall dieselbe Periode, d. h. derselbe Werth von τ zukommt. Indem dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit w proportional $\lambda = w\tau$ variabel ist, bleibt es nur fraglich, wie die Länge und die Höhe der Wellen mit der Wassertiefe sich ändert; es sind λ und ρ für irgend einen Werth von h zu bestimmen, wenn etwa $\lambda = \lambda_0$ und $\rho = \rho_0$ für $h = h_0$ gegeben sind.

Was λ betrifft, so folgt aus der näherungsweise auch hier ohne Zweifel gültig bleibenden Gl. (5) im vorigen §. und aus der Bedingung $\tau =$ Const., dass sich $nf(n)$ proportional h ändert; wie aus der Tafel der zusammengehörigen Werthe von n und $nf(n)$ ersichtlich ist, ändert sich aber $n = \frac{\pi h}{\lambda}$ in gleichem Sinn, jedoch in geringerem Grade wie $nf(n)$, folglich $\frac{h}{\lambda}$ in gleichem Sinn und geringerem Grade wie h, mithin auch λ in gleichem Sinn und geringerem Grade wie h. Zu

$$nf(n) = \frac{h}{h_0} n_0 f(n_0) = \frac{\pi h}{\lambda_0} f(n_0) \quad \ldots\ldots\ldots$$

findet man n aus der Tafel und damit

$$\lambda = \frac{\pi h}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Die Bestimmung von ϱ erfordert eine weitere Bedingung, die bei Abstraction von Bewegungswiderständen naturgemäss darin besteht, dass die lebendige Kraft aller Wellen gleich ist. Um für diese einen Ausdruck zu gewinnen, kann man bemerken, dass nach §. 144, Gl. (19) mit $a = \frac{\pi}{\lambda}$ die Geschwindigkeitscomponenten u und v eines materiellen Punktes im Sinne der x-Axe und der y-Axe folgende Ausdrücke haben, wenn hier die y-Axe positiv nach oben gesetzt, nämlich mit y die Höhe des horizontalen Bahndurchmessers des materiellen Punktes über dem Boden bezeichnet wird,

$$u = Ba\left(e^{ay} + e^{-ay}\right) \sin\left[\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\pi\right]$$

$$v = Ba\left(e^{ay} - e^{-ay}\right) \cos\left[\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\pi\right].$$

Dabei hatte die horizontale x-Axe eine feste Lage und war positiv im Sinne von w. Wird sie aber in der Verticalebene liegend angenommen, auf welcher, während diese im Sinne von w mit der Geschwindigkeit w sich bewegt, der materielle Punkt eine Wellenlinie als Spur verzeichnet, und wird sie entgegen dem Sinne von w positiv gesetzt (Fig. 56 in §. 146), so ist bei entsprechender Lage des Anfangspunktes $wt - x$ statt x zu setzen, also mit $\lambda = w\tau$

$$\left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda}\right)\pi = \left(\frac{wt}{\lambda} - \frac{wt - x}{\lambda}\right)\pi = \frac{\pi}{\lambda}\, x = a\,x$$

$$\left.\begin{aligned} u &= -Ba\left(e^{ay} + e^{-ay}\right) \sin(ax) \\ v &= Ba\left(e^{ay} - e^{-ay}\right) \cos(ax) \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Hiermit ergiebt sich, wenn μ die specif. Masse des Wassers bedeutet, die lebendige Kraft einer ganzen Welle:

$$L = \mu \int_0^h dy \int_0^{2\lambda} dx\, \frac{u^2 + v^2}{2}$$

$$= \mu B^2 a^2 \int_0^h dy \int_0^{\lambda} dx \left[\left(e^{ay} + e^{-ay}\right)^2 \sin^2(ax) + \left(e^{ay} - e^{-ay}\right)^2 \cos^2(ax)\right]$$

oder wegen $\int\limits_0^\lambda \sin^2(ax)\, dx = \int\limits_0^\lambda \cos^2(ax)\, dx = \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{a}$

$$L = \frac{\mu\pi B^2 a}{2}\int\limits_0^h \left[\left(e^{ay} + e^{-ay}\right)^2 + \left(e^{ay} - e^{-ay}\right)^2\right] dy$$

$$= \frac{\mu\pi B^2}{2}\int\limits_0^h \left(e^{2ay} + e^{-2ay}\right) d(2ay) = \frac{\mu\pi B^2}{2}\left(e^{2ah} - e^{-2ah}\right)$$

oder endlich, da nach §. 144, Gl. (14)

$$B^2 = \frac{g^2\varrho^2}{\pi^2}\,\frac{\tau^2}{\left(e^{ah} + e^{-ah}\right)^2}$$

ist, also nach §. 144, Gl. (9)

$$B^2 = \frac{g\varrho^2}{a}\,\frac{1}{\left(e^{ah} + e^{-ah}\right)\left(e^{ah} - e^{-ah}\right)} = \frac{g\varrho^2}{a}\,\frac{1}{e^{2ah} - e^{-2ah}} \;\ldots\ldots$$

$$L = \frac{\mu\pi}{2}\frac{g\varrho^2}{a} = \frac{\gamma\pi}{2}\frac{\lambda\varrho^2}{\pi} = \frac{1}{2}\gamma\lambda\varrho^2 \;\ldots\ldots\ldots \text{5.}$$

unter $\gamma = \mu g$ das specifische Gewicht des Wassers verstanden. Hiernach ändert sich die Wellenhöhe umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Wellenlänge, und man findet, wenn letztere dem Obigen zufolge für irgend eine Wassertiefe h ermittelt ist,

$$\varrho = \varrho_0 \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es laufe z. B. ein aus dem Meere kommender Wellenzug, dem bei $h_0 = 8$ Mtr. Wassertiefe: $\lambda_0 = 5$ Mtr., $\varrho_0 = 0{,}333$ Mtr. entspricht, auf einen Strand, so dass die Wellen bei immer kleinerer Wassertiefe sich ausbilden müssen. Hier ist $n_0 = 1{,}6\,\pi = 5{,}026$ so gross, dass $f(n_0) = 1$ gesetzt werden kann, und man findet dann nach Gl. (1), (2) und (6) mit Hülfe der Tabelle im vorigen §.

für h =	4	2	1	Mtr. Tiefe
$nf(n)$ =	2,513	1,257	0,628	
n =	2,544	1,414	0,885	
λ =	4,940	4,444	3,550	Mtr.
ϱ =	0,335	0,353	0,395	„

Dass mit abnehmender Wassertiefe die Wellenlänge abnimmt und die Wellenhöhe zunimmt, wird durch die Erfahrung bestätigt. Wenn die I

h bis zu einer gewissen Grenze abnimmt, beginnt die **Brandung**, d. h. die Ueberstürzung der Wellenscheitel. Sofern sich annehmen lässt, dass dies dann der Fall sein muss, wenn die Geschwindigkeit eines materiellen Punktes an der Oberfläche im oberen Scheitelpunkte seiner Bahn, d. h. wenn das Maximum von u = der Fortpflanzungsgeschwindigkeit w geworden ist, ergiebt sich aus Gl. (3) und (4) und dem Ausdrucke von w nach Gl. (6) im vorigen §. die folgende Bedingung für den Beginn der Brandung:

$$Ba\left(e^{ah}+e^{-ah}\right)=\varrho a\sqrt{\frac{g}{a}\,\frac{e^{ah}+e^{-ah}}{e^{ah}-e^{-ah}}}$$

$$=\varrho\sqrt{\frac{g}{h}\,\frac{n}{f(n)}}=\sqrt{gh\frac{f(n)}{n}};\quad \varrho=\frac{f(n)}{n}\,h\;..\;(7),$$

also mit Rücksicht auf Gl. (6) und (2):

$$\varrho_0\sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda}}=\varrho_0\sqrt{\frac{n}{\pi h}\,\lambda_0}=\frac{f(n)}{n}\,h$$

oder endlich mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$\frac{\varrho_0}{f(n)}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi}}=\left(\frac{h}{n}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{\lambda_0}{\pi}\,\frac{f(n)}{f(n_0)}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$f(n)=\sqrt[5]{\left(\frac{\pi\varrho_0}{\lambda_0}\right)^2[f(n_0)]^3};\quad h=\frac{\lambda_0}{\pi}\,\frac{nf(n)}{f(n_0)}\;\ldots\ldots\;(8).$$

Zu dem durch die erstere dieser Gleichungen bestimmten Werthe von $f(n)$ findet man n oder $nf(n)$ mit Hülfe der Tabelle im vorigen §., und dann nach der zweiten Gleichung die Wassertiefe h, bei welcher die Brandung eintritt, nach Gl. (7) die entsprechende halbe Wellenhöhe ϱ. Für das obige Beispiel, wobei $f(n_0) = 1$ gesetzt werden konnte, ergiebt sich

$$h = 0{,}508 \text{ Mtr.},\ \varrho = 0{,}455 \text{ Mtr.}$$

Messungen zur Controle dieser letzteren Beziehungen (7) und (8) liegen nicht vor. Sollten sie nicht hinlänglich sich bestätigt finden, so wäre es dadurch erklärlich, dass die Reibung in um so höherem Grade die Bewegung beeinflusst und dass überhaupt die hier nach §. 144 zu Grunde gelegten Bewegungsgesetze um so mehr einer Correction bedürftig sein mögen, je kleiner h und je grösser ϱ ist (§. 147). Wenn insbesondere die auf den Strand laufenden Wellen durch einen starken Wind getrieben werden, der eine Anhäufung von Wasser auf dem Strande, eine Erhebung der mittleren Wasseroberfläche daselbst verursacht, so ist mit der oscillirenden Wellen-

bewegung selbst im Beharrungszustande eine strömende Bewegung verbunden, die oben landwärts, unten als Rückströmung seewärts gerichtet ist; die Brandung kann dann schon bei erheblich grösserer Wassertiefe beginnen.*

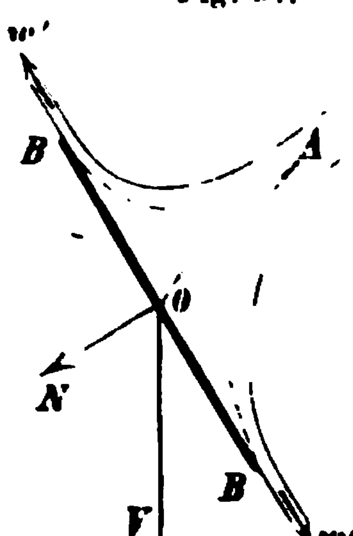
VI. Druck zwischen Flüssigkeiten und festen Körpern bei ihrer relativen Bewegung.

a. Druck des Wassers auf relativ bewegte feste Körper.

§. 150. Druck eines freien Wasserstrahls auf eine feste Fläche.

Es werde zunächst eine ebene Fläche vorausgesetzt: *BB*, Fig. 57, sei ihr Schnitt mit einer verticalen Normalebene *NOV*, φ der Winkel ihrer Normale *ON* mit der Verticalen *OV*. Wenn diese Fläche (jenseits *ON*) von einem freien Wasserstrahl getroffen wird, so sammelt sich eine gewisse Wassermasse vor ihr an, von welcher anzunehmen ist, dass sie nach Eintritt des hier vorausgesetzten Beharrungszustandes an der regelrecht strömenden Bewegung nicht Theil nimmt; die Begrenzung ihres Durchschnitts mit der durch die Mittellinie des Strahls gehenden verticalen Ebene (die aber nicht mit der zur festen Fläche senkrechten verticalen Ebene *NOV* zusammenzufallen oder parallel zu sein braucht) ist in Fig. 57 durch die gestrichelten Curve *AB* angedeutet. An der Spitze *A* dieser Wassermasse breitet sich der Strahl zu einer Schicht aus, die mit abnehmender Dicke längs der Oberfläche jener relativ ruhenden (wenigstens nicht in strömender, nur in wirbelnder Mischungsbewegung begriffenen) Wassermasse gegen den Rand der festen Fläche hin fliesst. An dieser Stelle *A*, wo der Strahl eben noch unzertheilt ist, sei *F* sein Querschnitt, *u* seine absolute Geschwindigkeit, α der Winkel, den die Richtung von *u* mit der Richtung *ON* bildet, β

Fig. 57.



* Die Erscheinungen der Brandung werden von Hagen in §. 5 seines „Seeufer- und Hafenbaues, Berlin 1863“ näher besprochen. Bei seinen bezüglichen Rechnungen für „Wellen auf ansteigendem Grunde“ geht übrigens Hagen von anderen Gesichtspunkten aus im Anschlusse an seine im vorigen § besprochenen Anschauungen von einer Theilung der ganzen Wassermasse in eine obere und eine untere, verschiedenen Bewegungsgesetzen folgende Schicht.

feste Fläche habe eine gleichförmige Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit v unter dem Neigungswinkel β gegen die Richtung ON. Ist dann φ der Winkel zwischen den Richtungen von u und v, so ist bei A die relative Geschwindigkeit des Wassers gegen die Fläche:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\varphi}.$$

Im Sinne der Mittellinie oder normal zum Querschnitte F des Strahls ist sie

$$= u - v\cos\varphi,$$

und somit die pro Sec. zur Druckwirkung gelangende Wassermasse:

$$M = \mu F\,(u - v\cos\varphi) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1),$$

wenn μ die specif. Masse des Wassers bedeutet $= \frac{\gamma}{g}$, unter γ das specif. Gewicht desselben verstanden.

Gegen den Flächenrand hin ändert sich die relative Geschwindigkeit des Wassers unter dem Einfluss der Schwere und der inneren Reibung, und es kann ihre Grösse $= w'$ an verschiedenen Stellen dieses Randes oder des entsprechenden cylindrischen Randdurchschnittes F' verschieden sein; ihre Richtung ist aber ringsum parallel der ebenen Fläche, wenn, wie hier zunächst vorausgesetzt werden soll, die Fläche erheblich grösser als der Querschnitt des Strahls und dieser gegen eine mittlere Stelle O derselben hin gerichtet ist. Unter diesen Umständen und mit Rücksicht auf den vorausgesetzten Beharrungszustand ist die Aenderung, welche die im Sinne ON genommene relative Bewegungsgrösse der von der festen Fläche BB und den Schnitten F, F' in irgend einem Augenblicke begrenzten Wassermasse, deren Gewicht $= G$ sei, im nächstfolgenden Zeitelement dt erfährt, $=$ dem Entgegengesetzten der im Sinne ON genommenen relativen Bewegungsgrösse des im Zeitelement dt durch den Querschnitt F strömenden Wasserelementes Mdt, und indem jene Aenderung dem Antrieb der in demselben Sinne ON genommenen äusseren Kräfte gleich sein muss, welche auf jene Wassermasse wirken, ergiebt sich die Gleichung:

$$-Mdt\,(u\cos\alpha - v\cos\beta) = (G\cos\psi - R)dt,$$

unter R den Druck verstanden, den die feste Fläche auf das Wasser im Sinne NO, also das Wasser auf die Fläche im Sinne ON ausübt. Letzterer ist also:

$$R = G\cos\psi + M\,(u\cos\alpha - v\cos\beta) \;\ldots\ldots\ldots\; (2).$$

Je kleiner die Dimension AO, Fig. 57, und insbesondere ihre Verticalprojection im Vergleich mit der Geschwindigkeitshöhe ist, welche der relativen

Normalgeschwindigkeit des Wassers gegen die Fläche entspricht, mit desto geringerem (meistens unerheblichem) Fehler kann das erste Glied des Ausdrucks von R vernachlässigt, also

$$R = M(u\cos\alpha - v\cos\beta)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3$$

gesetzt, und können in dieser Gleichung und in Gl. (1) die Grössen F, u, α, φ statt auf die Stelle A auch auf die Stelle O bezogen werden, woselbst der Strahl bei fortgesetzt freier parabolischer Bewegung die Fläche treffen würde. Mit analoger Annäherung gilt Gl. (3) schliesslich auch bei ungleichförmiger Translationsbewegung der Fläche, sofern nur ihre Beschleunigung absolut genommen nicht wesentlich grösser als die Beschleunigung g der Schwere ist, sowie endlich bei beliebiger Bewegung, wenn zugleich das Product aus ihrer momentanen Winkelgeschwindigkeit und der relativen Geschwindigkeit w des Wassers eine mit g vergleichbare Grösse hat und unter v die Geschwindigkeit des Punktes O der Fläche verstanden wird.

Für eine ruhende ebene Fläche ergiebt sich:

$$M = \mu F u;\quad R = Mu\cos\alpha = \mu F u^2 \cos\alpha\ \ldots\ldots\ 4$$

Der hier zunächst betrachtete Fall einer verhältnissmässig grossen und an einer mittleren Stelle vom Strahl getroffenen ebenen Fläche ist dadurch ausgezeichnet und einfach, dass der Normaldruck R sich unabhängig von der relativen Geschwindigkeit w' des Wassers am Flächenrande ergiebt und dass er, da alle Flächenelemente normal, hier also parallel gedrückt werden, die Resultante dieser Elementardrucke ist, aus welcher somit der Druck P nach irgend einer anderen Richtung durch Multiplication mit dem Cosinus des Winkels der letzteren mit der Richtung ON gefunden wird. In beiden Beziehungen anders verhält es sich bei einer krummen Fläche, wenn sie auch einstweilen nach wie vor als hinlänglich gross vorausgesetzt wird, um dem Wasserstrahl, der sie an einer mittleren Stelle O trifft, ringsum am Rande eine tangential an ihr gerichtete relative Geschwindigkeit w' anzuweisen. Ist dann wieder F' der Durchschnitt des Wasserstroms mit dem geometrischen Ort der Flächennormalen am Rande, und bezeichnet dM die Wassermasse, welche pro Secunde durch ein Element von F' mit der relativen Geschwindigkeit w' hindurchfliesst, ϱ den spitzen oder stumpfen Winkel zwischen w' und der Richtung ON, nach welcher der Druck P des Wasserstrahls auf die Fläche gefunden werden soll, so ist die durch den Widerstand der festen Fläche im Beharrungszustande bewirkte elementare Aenderung der relativen Bewegungsgrösse des Wassers im Sinne ON, wenn übrigens die früheren Be-

zeichnungen (mit dem Unterschiede, dass ON jetzt eine beliebige Richtung ist) beibehalten werden und die Schwere des vor der Fläche aufgestauten Wassers ausser Acht gelassen wird:

$$dt\int dM\,w'\cos\varrho - M\,dt\,(u\cos\alpha - v\cos\beta) = -P\,dt,$$

also
$$P = M(u\cos\alpha - v\cos\beta) - \int dM\,w'\cos\varrho \quad \ldots\ldots (5).$$

Die Berechnung des in diesem Ausdrucke vorkommenden Integrals kann aber ohne mehr oder weniger zweifelhafte Annahmen im Allgemeinen nicht durchgeführt werden. Bezeichnet b die Dicke des Wasserstroms oder die Breite der oben mit F' bezeichneten Schnittfläche in irgend einem Punkte B des Flächenrandes, ds ein Bogenelement des letzteren, zieht man ferner von B aus die Gerade BS senkrecht zur Fläche F' nach aussen, BW' im Sinne von w', BN' parallel und gleichen Sinnes mit ON, und bezeichnet mit ω den Winkel SBW', mit ν den Winkel SBN' und mit S den Winkel der Ebenen SBW' und SBN', so ist

$$\cos\varrho = \cos W'BN' = \cos\omega\cos\nu + \sin\omega\sin\nu\cos S$$
$$dM = \mu b\,ds\,w'\cos\omega.$$

Dabei ist nur ν durch die Gestalt der Fläche und die angenommene Richtung ON bestimmt, und wenn auch w' ohne wesentlichen Fehler ringsum gleich und mit Rücksicht auf den Reibungswiderstand etwas kleiner als die relative Geschwindigkeit w gesetzt werden kann, mit welcher der Strahl bei andauernd freier Bewegung die Fläche im Punkte O treffen würde, so sind doch b, ω, S durch die einzige ohne Weiteres angebbare Bedingung:

$$M = \mu\int b\,w'\cos\omega\,ds = \mu w'\int b\cos\omega\,ds$$

nicht bestimmt. In Betreff der Veränderlichkeit von b ist nur so viel unzweifelhaft, dass diese Dimension um so grösser ist, unter je kleinerem Winkel die betreffende Geschwindigkeit w' gegen w geneigt ist, indem sich erwarten lässt, dass das Wasser vorwiegend an solchen Randstellen abfliesst, wo dazu die kleinste Richtungsänderung der relativen Geschwindigkeit ausreicht.

Sind aber die Umstände von solcher Art, dass ausser w' auch ϱ wegen geringer Veränderlichkeit längs dem Flächenrande durch einen Mittelwerth ersetzt werden kann, wie es insbesondere (mit $\varrho = \nu$) dann der Fall ist, wenn die Fläche das durch einen Parallelkreis begrenzte Stück einer Umdrehungsfläche mit der Axe ON und diese unter sehr kleinen Winkeln α, β gegen die Geschwindigkeitsrichtungen u, v geneigt ist, so folgt aus Gl. (5)

$$P = M(u\cos\alpha - v\cos\beta - w'\cos\varrho) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

während M stets durch Gl. (1) bestimmt ist und $w' = nw$ gesetzt werden kann, unter n einen erfahrungsmässig zu bestimmenden Coefficienten etwa < 1 verstanden. Für eine ruhende Fläche ($v = 0$, $w = u$) ergiebt sich

$$P = Mu(\cos\alpha - n\cos\varrho) = \mu F u^2 (\cos\alpha - n\cos\varrho) \; \ldots\ldots \; 7.$$

Zwischen dem Drucke P nach der Richtung ON und dem Drucke P_1 nach einer anderen Richtung ON_1 besteht hier im Allgemeinen nur dann eine ohne Weiteres angebbare einfache Beziehung, wenn die Fläche nicht grösser als nöthig ist, um von den Bahnen der Wassertheilchen am Rande berührt zu werden, wenn also die vor der Fläche relativ ruhende (wenigstens nicht strömende) Wassermasse sich ringsum bis zum Flächenrande erstreckt. Sofern nämlich in dieser Masse eine gleichförmige Pressung stattfindet, ist dann auch der specif. Normaldruck in der ganzen Fläche gleich gross, und verhalten sich P und P_1 wie die Projectionen der Fläche in zwei auf den Druckrichtungen ON und ON_1 senkrechten Ebenen, wobei sich etwa deckende Projectionen zweier Flächenstücke nicht mit zu rechnen sind. Wenn aber solche Deckungen nicht stattfinden, so gilt dieselbe Beziehung für den oben hervorgehobenen Fall einer im Sinne der Axe bewegten und vom Strahl getroffenen Umdrehungsfläche unabhängig von ihrer Grösse, weil sie dann wenigstens in gleichförmig gedrückte Zonen getheilt werden kann, deren Projectionen immer dieselben Verhältnisse zu einander haben.

Wenn die vom Strahl getroffene Fläche nicht gross genug ist, um eine solche Richtungsänderung der relativen Geschwindigkeit zu bewirken, dass das Wasser ringsum tangential die Fläche dieselbe verlässt, so wird der Druck entsprechend kleiner; seine theoretische Bestimmung scheitert aber selbst in den einfachsten Fällen an der Schwierigkeit, die sämmtlichen Umstände gehörig in Rechnung zu ziehen, welche die Bahnen der materiellen Punkte und somit die Richtungen der Geschwindigkeiten w' am Flächenrande bedingen. —

Schliesslich ist zu bemerken, dass der im Obigen betrachtete permanente Druck des Wasserstrahls auf die Fläche von dem Anfangsdruck desselben, d. h. von demjenigen wesentlich unterschieden werden muss, der in der ersten Zeit des Zusammentreffens in variabler Grösse stattfindet. Während nämlich, nachdem in dem Stauraum vor der Fläche ein Beharrungszustand eingetreten ist, der Druck P nur demjenigen Betrage entspricht, um welchen die im Sinne von P genommene relative Bewegungsgrösse des diesem Raum zufliessenden Wassers die ebenso verstandene Bewegungsgrösse des gleichzeitig (am Flächenrande) abfliessenden Wassers übertrifft, ist vorher noch die entsprechende Bewegungsgrösse

ganzen in jenem Stauraum befindlichen Wassermasse in der Abnahme begriffen. Sofern aber diese Wassermasse selbst anfangs zunimmt, lässt sich begreifen, dass jener Anfangsdruck zunächst bis zu einem Maximum wachsen und dann wieder bis zum permanenten Druck abnehmen wird.

§. 151. Versuche über den Druck freier Wasserstrahlen.

Versuche über den Druck freier Wasserstrahlen sind von D. Bernoulli, Bossut, Michelotti (Sohn), Langsdorf, Morosi, namentlich von Bidone (1835, 1836) und von Weisbach (1856, 1859) angestellt worden. Sie beziehen sich hauptsächlich auf den Fall einer unbewegten Umdrehungsfläche mit kreisförmigem Rande, die von einem Strahl mit kreisförmigem Querschnitt im Sinne der Axe getroffen wird. Bezeichnet dann k das Verhältniss des in diesem Sinne thatsächlich ausgeübten Drucks P zu seinem theoretischen Werth nach Gl. (7) im vorigen §. (mit $\alpha = 0$), so ist

$$P = kMu(1 - n\cos\varrho) = k\mu F u^2 (1 - n\cos\varrho).$$

Wird dabei in allen Fällen, auch wenn das im Folgenden mit m bezeichnete Durchmesserverhältniss von Fläche und Strahl einen kleineren Werth hat, unter ϱ der Winkel verstanden, den die Richtung von u oder P mit den auswärts gerichteten Tangenten der Meridianlinien am Flächenrande bildet, so können die Coefficienten k und n Functionen von ϱ, m und $h = \frac{u^2}{2g}$ sein. Der Coefficient n, der bei grösseren Werthen von m das Verhältniss bedeutet, in welchem die Geschwindigkeit bis zum Flächenrande abnimmt, hat bei kleineren Werthen von m eine zusammengesetzte Bedeutung, indem er dann zugleich durch den Umstand bedingt wird, dass der Ablenkungswinkel der Geschwindigkeitsrichtung bis zum Flächenrande thatsächlich $< \varrho$ ist; durch denselben Umstand kann auch der Coefficient k insbesondere dann beeinflusst werden, wenn mit $\cos\varrho = 0$ das Glied mit n aus der Gleichung verschwindet.

Die Versuche wurden im Allgemeinen so angestellt, dass die Platte, welche vom Wasserstrahl getroffen werden sollte, mit dem Arm eines um eine horizontale Axe drehbaren, durch Gegengewichte für eine bestimmte Gleichgewichtslage abbalancirten geraden oder Winkelhebels fest verbunden war, und dass dann durch entsprechende Belastung einer an denselben

oder an einen anderen Arm des Hebels gehängten Waagschale das Kraftmoment ermittelt wurde, welches auf den Hebel wirken musste, um ihn auch unter dem Einflusse des Wasserdrucks auf die Platte in jener Gleichgewichtslage zu erhalten; der Quotient aus diesem Kraftmomente durch den Hebelarm des Druckes P ergab die Grösse des letzteren. Meistens und insbesondere bei den Versuchen von Michelotti, Langsdorf, Morosi und Bidone wurde die von einem vertical abwärts gerichteten Hebelarm getragene Platte vom Wasserstrahl in horizontaler Richtung getroffen, wobei es dann aber kaum vermeidlich war, dass das Wasser nicht ganz gleichförmig ringsum an der Platte sich verbreitete, sondern vorwiegend unten abfloss, entsprechend einer nicht sicher bestimmbaren Vergrösserung des Hebelarms von P; vortheilhafter in dieser Hinsicht war die Disposition der Versuche von Bossut und von Weisbach, wobei der Strahl (bei Bossut von oben, bei Weisbach von unten) vertical gegen die von einem horizontalen Hebelarm getragene Platte gerichtet wurde.

Für den Fall einer ebenen Platte ($cos\,\varrho = 0$) ergab sich k nur wenig < 1, wenn $m > 4$ und die Entfernung der Platte von der Ausflussöffnung des Wasserstrahls wenigstens dem 5fachen Durchmesser des letzteren gleich war; wenn Langsdorf und Bidone sogar k etwas > 1 fanden, so ist es wohl dem eben erwähnten Umstande der Vergrösserung des Hebelarms von P zuzuschreiben, der bei der Bestimmung von P aus den Versuchen nicht gebührend berücksichtigt werden konnte. Durch Verkleinerung von m bis $m = 1$ nahm k nach Langsdorf bis 0,5 ab, d. h. es war dann

$$1 - n\,cos\,\varrho' \text{ nahe } = 0{,}5$$

wenn seiner ursprünglichen Bedeutung gemäss unter n hier das Geschwindigkeitsverhältniss des ab- und zufliessenden Wassers, unter ϱ' dagegen die effective Richtungsänderung des Wassers durch den Einfluss der Platte verstanden wird. Durch die Verkleinerung des Abstandes der Platte von der Mündung konnten Bossut und Langsdorf den Coefficienten k bis 0,5, Bidone nur bis 0,75 vermindern. An und für sich ist diese Verminderung ohne Zweifel dadurch zu erklären, dass bei zu kleiner Grösse jenes Abstandes ein cylindrischer Strahl nicht zu Stande kommen kann, dass vielmehr die Bahnen der Wassertheilchen vom Austritt aus der Mündung an nicht nur bis zum kleinsten Querschnitt, sondern auch darüber hinaus bis zur Fläche einwärts convex gekrümmt sind; in Folge dessen ist im kleinsten Querschnitte die Pressung nur am Umfange = dem Atmosphärendruck, die mittlere Pressung aber grösser und somit die Ausflussgeschwindigkeit entsprechend kleiner.

Wenn die ebene Platte ringsum mit einem rechtwinkelig hervorragenden, dem Strahle zugekehrten Rande versehen war, so sollte nach der Theorie ($\cos\rho = -1$)

$$P = kMu(1 + n) = k\mu F u^2 (1 + n)$$

sein, und es wurde $k(1 + n)$ von Morosi nahe $= 2$, von Bidone höchstens $= 1,7$ und zwar in solcher Weise abhängig von der Höhe des Randes gefunden, dass, wenn dieselbe wächst, der Coefficient nur anfangs auch wächst, alsbald aber wieder abnimmt, wenn die Randhöhe eine gewisse verhältnissmässig kleine Grösse überschreitet, die z. B. für $m = 3$ nur etwa $= 0,1$ des Plattendurchmessers gefunden wurde. Diese Thatsache ist dadurch erklärlich, dass, unter n das Verkleinerungsverhältniss der Geschwindigkeit und unter ρ' den effectiven Ablenkungswinkel verstanden, der fragliche Coefficient eigentlich die Bedeutung

$$k(1 - n\cos\rho')$$

hat, und dass mit wachsender Randhöhe n beständig abnimmt, während ρ' sich schnell der Grenze $\rho = 180^0$ nähert.

Bidone untersuchte auch den Anfangsdruck und fand das Maximum desselben bei der ebenen Platte bis doppelt so gross, bei der geränderten Platte dagegen in geringerem Verhältnisse grösser als den permanenten Druck. —

Bei den Versuchen von Weisbach* war die von dem vertical aufsteigenden Strahl von unten getroffene Platte an einem horizontalen Hebel befestigt, der um eine schneidige Axe am einen Ende sich drehen konnte, zwischen dieser und der Platte eine Waagschale trug und jenseits der Platte in einem vertical geschlitzten Ständer geführt wurde. Ein durch letzteren über dem Hebel hindurch gesteckter Stift verhinderte den Ausschlag nach oben. Indem nun das mit einem Windkessel in Verbindung stehende Ausflussgefäss während des Versuches keinen Zufluss durch die zur Füllung dienende Druckpumpe erhielt, nahm während des Ausflusses der Druck im Inneren, folglich die Ausflussgeschwindigkeit, die Ausflussmenge und der Druck gegen die Platte stetig ab, und es musste endlich, früher oder später je nach der grösseren oder kleineren Belastung der Waagschale, ein Zustand eintreten, bei welchem der gegen den vorbemerkten Stift bis dahin angedrückte Hebel sich abwärts bewegte; in diesem Augenblicke gab der betreffende Beobachter einem anderen, der unterdessen den sinkenden Stand des mit dem Ausflussgefässe verbundenen Manometers im Auge behalten hatte, ein Zeichen zum Ablesen desselben,

* „Civilingenieur", Bd. VII, Heft 5 und Bd. VIII, Heft 1.

wonach durch Verminderung der Belastung der Waagschale eine neue Ab-
lesung bei kleinerer Geschwindigkeit vorbereitet werden konnte u. s. f.
Mit Hülfe der bekannten Constanten (Flächeninhalt, Contractions- und Ge-
schwindigkeitscoefficient) der verwendeten Mundstücke und der bekannt[illegible]
Höhe der Platte über der Mündung (welche immer klein genug war, u[illegible]
ihr die Abnahme der Geschwindigkeitshöhe von der Mündung bis zu
Platte einfach gleich setzen zu dürfen), sowie mit Rücksicht auf den [illegible]
des Manometers, die Dimensionen des Hebels etc. konnten dann mit gro[illegible]
Genauigkeit Reihen zusammengehöriger Werthe von P, M, n ermitt[illegible]
werden.

Die verwendeten Mundstücke waren zwei Kreismündungen in d[illegible]
dünnen Wand von ungefähr 10 und 14 Millim. Weite und ein kurze[illegible]
noidisches Mundstück von 10 Millim. Durchmesser an der Mündung. D[illegible]
Platten waren zwei, beide von 100 Millim. Durchmesser, die eine [illegible]
die andere nach einem Rotationshyperboloid gestaltet, welches dem Str[illegible]
seine concave Fläche von 34 Millim. Tiefe zukehrte, entsprechend $\rho =$
134^0. Aus diesen Versuchen hat der Verf. folgende Werthe von k und [illegible]
abgeleitet* und zwar als Mittelwerthe aus je einer grösseren Zahl [illegible]
Einzelversuchen.

m	h	k	m	h	n
9 bis 12.5	2.30	0.925	12.5	8.63	0.674
	8.63	0.946	9	7.24	0.837
			10	1.91	0.851

Die Werthe von k sind aus den Versuchen mit der ebenen Platte [illegible]
folgert, und es ist ihnen entsprechend k angenommen worden, um au[illegible]
Versuchen mit der concaven Platte die Werthe von n abzuleiten. Wie [illegible]
sichtlich, nimmt k mit der Geschwindigkeitshöhe h des Strahls bei s[illegible]
Zusammentreffen mit der Platte zu, während n um so kleiner ist, je gr[illegible]
m und h sind. Zum Ausdruck dieser Beziehungen durch empirische Form[illegible]
sind die Versuche nicht ausreichend.

Dass selbst bei so grossen Werthen von m, bei welchen eine [illegible]
streckung des an der Platte relativ ruhenden Wasserconoids BAB (Fig. [illegible]
bis zum Plattenrande nicht anzunehmen ist, doch k merklich $<$ 1 gefund[illegible]
wird, deutet darauf hin, dass der effective Ablenkungswinkel ρ' bis zum
Rande stets etwas $< \rho$ bleibt, was u. A. dadurch erklärlich ist, dass [illegible]
längs der Platte radial nach aussen abfliessende Wasserschicht mit ihr

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. VII (1863), S. [illegible]

Ausbreitung an Dicke abnimmt, und dass somit besonders die Bahnen der am schnellsten fliessenden Wassertheilchen an der freien Oberfläche immer etwas gegen die Fläche convergiren müssen. Dass n abnimmt, wenn m wächst, ist ebenso wenig auffallend, da mit wachsender verhältnissmässiger Grösse der Fläche natürlich auch der Geschwindigkeitsverlust durch Reibung zunimmt.

§. 152. Druck eines begrenzten Wasserstroms auf einen festen Körper.

In einer cylindrischen Röhre vom Querschnitte F sei Wasser in permanenter strömender Bewegung mit der mittleren Geschwindigkeit u. An einer gewissen Stelle befinde sich in der Röhre ein fester Körper in unveränderlicher Lage; A sei der Querschnitt eines der Röhrenaxe parallelen Cylinders, welcher den Körper in einer geschlossenen Linie L berührt, so dass an dieser Stelle der Querschnitt der Röhre bis $F - A$, der des Wasserstroms weiterhin vielleicht noch mehr bis zum Betrage $\alpha(F - A)$ verkleinert wird. Die Linie L theilt die Oberfläche des Körpers in eine dem Wasserstrom zugewendete) Vorderfläche und in eine Hinterfläche; letztere sei von solcher Gestalt, dass der Wasserstrom sich hinter der Linie L von ihr trennt (was nur im Falle $\alpha < 1$ selbstverständlich geschehen muss), und dass er auch weiterhin nicht wieder mit ihr in Berührung kommt (was auch für $\alpha < 1$ geschehen könnte), dass vielmehr zwischen der ganzen Hinterfläche des Körpers und dem Wasserstrom sich eine Wassermasse befindet, von welcher angenommen werden kann, dass sie nur in unregelmässig wirbelnder Bewegung sich befindet und eine fast gleichförmige Pressung hat. Q_0 bezeichne einen Querschnitt der Röhre vor dem Körper, in welchem die durch den Einfluss des letzteren gekrümmten Bahnen der Wassertheilchen noch eben geradlinig und die Pressung nahe gleichförmig $= p_0$ ist; in dem Querschnitte Q hinter dem Körper seien die Bahnen wieder hinlänglich geradlinig geworden, um die Pressung als gleichförmig $= p$ voraussetzen zu dürfen; h (eventuell negativ oder $=$ Null) sei die Höhe des Schwerpunktes von Q_0 über dem Schwerpunkte von Q. In dem kleinsten Querschnitte $= \alpha(F - A)$, den der Wasserstrom zwischen Q_0 und Q annimmt, und in welchem die mittlere Geschwindigkeit $= u_1$ sei, sind die Bahnen der Wassertheilchen zwar parallel, mögen aber dabei um so mehr convex nach aussen gekrümmt sein, je grösser $\frac{A}{F}$ ist, entsprechend einer nach aussen zunehmenden Pressung in diesem Querschnitte.

Gemäss den Annahmen, auf denen nach §. 76 der erfahrungsmässig bewährte Ausdruck

$$B = \left(\frac{1}{\alpha} \frac{F}{F - A} - 1\right)^2 \frac{u^2}{2g}$$

der Widerstandshöhe beruht, die durch die plötzliche Querschnittsvergrösserung des Wasserstroms von $\alpha(F - A)$ bis F verursacht wird, soll indessen auch hier eine gleichförmige Pressung $= p_1$ im kleinsten Querschnitte vorausgesetzt werden, der dann auch die Pressung in dem oben genannten Wirbelraum hinter dem Körper gleich ist.

Wegen des vorausgesetzten Beharrungszustandes und wegen Gleichheit der Geschwindigkeiten in den Querschnitten Q_0 und Q erfährt nun die zwischen diesen augenblicklich enthaltene Wassermasse keine Aenderung ihrer Bewegungsgrösse im folgenden Zeitelement, und muss deshalb die algebraische Summe der auf diese Wassermasse wirkenden äusseren Kräfte nach jeder Richtung = Null sein. Insbesondere nach der Richtung der Röhrenaxe sind diese Kräfte unabhängig von dem Druck an der Röhrenwand und bestehen abgesehen von der Reibung nur 1) aus der Componente der Schwere, die im Sinne von $u = \gamma F h$ gesetzt werden kann, sofern das Volumen des Körpers ein nur kleiner Theil des Röhrenraums zwischen Q_0 und Q ist, 2) auch im Sinne von u aus dem Ueberschuss des Druckes des angrenzenden Wassers auf die hintere Fläche Q_0 über den Gegendruck auf die vordere Fläche Q, 3) aus dem Druck P des Körpers auf das Wasser entgegengesetzt dem Sinne von u. Letzterer, welcher dem Druck des Wasserstroms auf den Körper im Sinne der strömenden Bewegung gleich ist, ergiebt sich also:

$$P = \gamma F h + F(p_0 - p) = \gamma F\left(h + \frac{p_0 - p}{\gamma}\right)$$

oder nach §. 78, Gl. (4) und (5), da hier wegen Gleichheit der Geschwindigkeiten in den Querschnitten Q_0 und Q die wirksame Druckhöhe $h + \frac{p_0 - p}{\gamma}$ für die Rohrstrecke $Q_0 Q$ der Widerstandshöhe B gleich ist:

$$P = \gamma F B = \vartheta \gamma A H \text{ mit } \vartheta = \frac{F}{A}\left(\frac{1}{\alpha} \frac{F}{F - A} - 1\right)^2 \quad \ldots 1.$$

unter H die Geschwindigkeitshöhe $\frac{u^2}{2g}$ verstanden. Zur Berücksichtigung untergeordneter Bewegungswiderstände, insbesondere desjenigen, welcher schon bei der Bewegung von Q_0 bis zum kleinsten Querschnitte durch die innere Reibung verursacht wird, kann α etwas kleiner, als der betreffende Contractionscoefficient, in Uebereinstimmung mit Versuchen über die Widerstandscoefficienten in analogen Fällen, angenommen werden.

P ist der Ueberschuss des Druckes P_0 auf die Vorderfläche des Körpers im Sinne von u über den Druck P_1 auf die Hinterfläche im umgekehrten Sinne, und da der letztere $= Ap_1$ ist, so bleibt nur p_1 zu ermitteln, um auch P_0 und P_1 einzeln zu finden. Zu dem Ende hat man nach §. 78, Gl. (4) und (5), wenn h_1 die Höhe des Schwerpunktes des kleinsten Querschnittes $\alpha(F - A)$ über dem Schwerpunkte von Q bedeutet,

$$\frac{u^2 - u_1^2}{2g} = h_1 + \frac{p_1 - p}{\gamma} - B,$$

also mit der kürzeren Bezeichnung: $k = \frac{1}{\alpha}\frac{F}{F - A} - 1 \ldots\ldots\ldots (2)$

$$p_1 = p - \gamma h_1 + \gamma k^2 H - \gamma\left[\left(\frac{u_1}{u}\right)^2 - 1\right] H$$

oder wegen $\left(\frac{u_1}{u}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{\alpha}\frac{F}{F - A}\right)^2 - 1 = k(k + 2)$

$$p_1 = p - \gamma h_1 - 2k\gamma H.$$

Wenn also mit R der Druck bezeichnet wird, den das Wasser im Zustande der Ruhe nur in Folge der Pressung p im Querschnitte Q und der Schwere des Wassers nach der Axrichtung der Röhre auf den Körper ausüben würde, und welcher bei Abstraction von der betreffenden Componente der Schwere des vom Körper verdrängten Wassers in beiderlei Sinn gleich gross, nämlich

$$R = A(p - \gamma h_1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

gesetzt werden kann, so folgt

$$P_1 = R - 2k\gamma AH.$$

Hiernach ist schliesslich:

$$\left.\begin{array}{l} P_0 = R + \vartheta_0\gamma AH;\ P_1 = R - \vartheta_1\gamma AH;\ P = \vartheta\gamma AH \\ \vartheta_0 = \vartheta - \vartheta_1;\ \vartheta_1 = 2k;\ \vartheta = \frac{F}{A}k^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots (4).$$

Bei der obigen Berechnung der mittleren Pressung p_1 im kleinsten Querschnitte sollte zwar unter B lediglich diejenige Widerstandshöhe verstanden werden, die der Bewegung von hier bis zum Querschnitte Q entspricht; weil aber, wenn $P_1 = Ap_1$ gesetzt wird, dieses p_1 die Pressung an der Hinterfläche des Körpers bedeutet, die wegen Krümmung der Bahnen im kleinsten Querschnitte thatsächlich etwas kleiner, als dessen mittlere Pressung sein wird, so ist es auch in dieser Hinsicht angemessen, wenn α etwas kleiner, als der Contractionscoefficient, also k etwas grösser genommen wird in solchem Grade, dass k^2 dem resultirenden Widerstandscoefficienten für die Bewegung des Wassers von Q_0 bis Q gleich wird.

Es sei z. B. der Körper eine **kreisrunde ebene dünne Platte** (Radius $= a$) von solcher Lage in der kreisförmig cylindrischen Röhre (Radius $= r$), dass sie von deren Axe central und rechtwinkelig geschnitten wird und somit eine ringförmige Durchflussöffnung von gleichförmiger Breite $b = r - a$ dem Wasserstrom frei lässt. Zieht sich dann dieser nach dem Durchfluss noch weiter bis zur Breite βb zusammen bevor er sich hinter der Platte wieder ausbreitet bis zum vollen Rohrquerschnitt, so ist der Contractionscoefficient

$$\alpha = \frac{2\pi\left(r - \frac{\beta b}{2}\right)\beta b}{2\pi\left(r - \frac{b}{2}\right)b} = \frac{2r - \beta b}{2r - b}\beta.$$

Befände sich in der Röhre an Stelle der Platte eine ebene dünne Scheidewand, ringsum bis zur Röhrenwand reichend, aber in der Mitte mit einer kreisförmigen Oeffnung versehen, deren Radius $= b$ ist, so müsste die Bahn eines Wassertheilchens, welches von der Röhrenwand herkommend am Rande dieser Oeffnung streifend vorbei fliesst, ebenso viel seitlich abgelenkt werden wie die eines Wassertheilchens, welches von der Röhrenaxe herkommend den Rand der Platte streift, und wenn man deshalb im Falle der centralen Oeffnung in der ebenen Scheidewand den Radius des contrahirten Querschnitts $= \beta b$, den Contractionscoefficienten also $= \beta^2$ setzt, so könnte (zugleich behufs Berücksichtigung untergeordneter Widerstände) dieses β^2 demjenigen Werth von α gleich gesetzt werden, welcher nach den in §. 92 unter 1) besprochenen **Weisbach'schen** Versuchen $n = \left(\frac{b}{r}\right)^2$ entspricht. Auf diese Weise, die freilich nur ein Nothbehelf in Ermangelung unmittelbar zutreffender Erfahrungen ist, ergiebt sich z. B.

für $\frac{r}{a} =$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
also $\frac{F}{A} = \left(\frac{r}{a}\right)^2 =$	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9
$n = \left(\frac{b}{r}\right)^2 =$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{4}{9}$
$\beta^2 =$	0,625	0,637	0,652	0,669
$\alpha =$	0,824	0,852	0,873	0,892
$k =$	1,184	0,565	0,364	0,261
$\vartheta_0 =$	0,79	0,11	0,10	0,09
$\vartheta_1 =$	2,37	1,13	0,73	0,52
$\vartheta =$	3,16	1,24	0,83	0,61

Ohne Zweifel sind diese Zahlen um so unzuverlässiger und zwar die Werthe von ϑ um so mehr zu klein, je grösser $\frac{r}{a}$ ist, weil, je grösser dieses Verhältniss ist, desto unwahrscheinlicher die zu Grunde liegende Voraussetzung wird, dass die durch die Platte verursachte Geschwindigkeits- und Pressungsänderung sich gleichmässig bis zur Röhrenwand erstrecke; wenn dieser Einfluss sich nur bis zu einer Cylinderfläche mit dem Radius $r' < r$ erstreckte, so wären die Werthe von ϑ richtiger mit $\frac{r'}{a}$ statt $\frac{r}{a}$ zu berechnen gewesen und dann grösser gefunden worden. Immerhin lässt sich aber der Rechnung, falls ihre Voraussetzungen auch nur im Wesentlichen richtig sind, das bemerkenswerthe Resultat entnehmen, dass die Vergrösserung des mittleren Druckes an der Vorderfläche weniger beträgt, als die Verkleinerung desselben an der Hinterfläche.*

Wenn der Körper zwar nach wie vor einen kreisförmigen Querschnitt A und eine centrale Lage in der kreisförmig cylindrischen Röhre hat, dabei aber seine Vorderfläche gekrümmt ist der Art, dass den Bahnen der längs ihr hinfliessenden Wassertheilchen schon bis zur Grenzlinie zwischen Vorder- und Hinterfläche eine mehr oder weniger vollkommen axiale Richtung ertheilt wird, so ist die Contraction hinter dieser Grenzlinie entsprechend geringer, und wenn z. B. $1-\alpha$ auf $\frac{1}{3}$ des Werthes für die dünne Platte (für welche α jetzt mit α' bezeichnet sei) reducirt würde, also

$$\alpha = 1 - \frac{1-\alpha'}{3} = \frac{2+\alpha'}{3}$$

wäre, so ergäbe sich

für $\frac{r}{a} =$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$\alpha =$	0,941	0,951	0,958	0,964
$k =$	0,913	0,402	0,243	0,167
$\vartheta_0 =$	0,05	−0,16	−0,12	−0,08
$\vartheta_1 =$	1,83	0,80	0,49	0,33
$\vartheta =$	1,88	0,64	0,37	0,25.

In Betreff der mit $\frac{r}{a}$ wachsenden Unzuverlässigkeit dieser Zahlen gilt auch hier das oben Gesagte. Indessen ist doch zu schliessen, dass durch

* Wenn Bresse in seinem Cours de mécanique appliquée, II. partie 1860, p. 320 aus denselben allgemeinen Formeln eine entgegengesetzte Folgerung zieht, so beruht das auf einem Rechenfehler.

entsprechende Krümmung der Vorderfläche der Druck P des Wasserstroms auf den Körper erheblich vermindert werden kann (bis auf etwa die Hälfte des Werthes bei ebener Vorderfläche und dass besonders der specifische Druck an der Vorderfläche dadurch vermindert wird, so dass sein Mittelwerth selbst kleiner sein kann, als der hydrostatische d. h. der Druck im Ruhezustande. Das letztere Resultat ist zwar auffallend, aber doch nicht unerklärlich, wenn man bedenkt, dass der specifische Druck an einer stetig gekrümmten Fläche auch nur stetig längs derselben variabel sein kann und dass die Grenzlinie zwischen dem Theil der Körperoberfläche, wo der hydraulische Druck den hydrostatischen übertrifft, und demjenigen, wo das Umgekehrte stattfindet, sich auf der Vorderfläche des Körpers um so mehr von der Grenzlinie L zwischen ihr und der Hinterfläche entfernen wird, je früher durch entsprechende Krümmung der Vorderfläche die Bahnen der von der Axe herkommenden Wassertheilchen zu einer einwärts concaven Krümmung veranlasst werden bevor sie die Linie L erreicht haben. —

Wenn entgegen der Annahme, die den obigen Entwickelungen zu Grunde lag, der Wasserstrom bei seiner Wiederausbreitung vom kleinsten Querschnitte $\alpha(F-A)$ bis zum Rohrquerschnitte F mit der Oberfläche des Körpers in Berührung kommt, so können dadurch die Pressungen P_0, P_1 und $P = P_0 - P_1$ wesentlich andere werden. Das einfachste Beispiel dieses Falles gewährt ein cylindrischer Körper in solcher Lage, dass seine Axe mit der Rohraxe parallel ist, wenn seine Länge gross genug ist, um den Wasserstrom, nachdem er nahe dem vorderen Ende des Körpers bis zum Querschnitte $\alpha(F-A)$ sich contrahirt hat, auf einer gewissen Strecke zur vollen Ausfüllung des Querschnittes $F-A$ des cylindrischen Canals zwischen Körper und Rohrwand zu nöthigen. Uebrigens sei nach wie vor die Körperlänge nicht so gross, dass die Reibung an seiner Oberfläche sowie auch an der Röhrenwand zwischen den Querschnitten Q_0 und Q einen wesentlichen Einfluss gewinnen könnte, und es sei die hintere Endfläche des Körpers so gestaltet, dass mit der Wasserstrom bei seiner Ausbreitung vom Querschnitte $F-A$ bis zum Querschnitte F nicht in Berührung kommt. Unter diesen Umständen besteht hier die gesammte Widerstandshöhe B für die Bewegung des Wassers von Q_0 bis Q im Wesentlichen aus zwei Theilen B_1 und B_2, den plötzlichen Querschnittsänderungen von $F-A$ zu F und vorher von $\alpha(F-A)$ zu $F-A$ entsprechend, und zwar ist, wenn mit p_1, u_1 und H_1 die Pressung, Geschwindigkeit und Geschwindigkeitshöhe im Querschnitte $F-A$ bezeichnet werden,

$$B_1 = \left(\frac{F}{F-A} - 1\right)^2 H;\quad B_2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 H_1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \left(\frac{F}{F-A}\right)^2 H,$$

also
$$B = B_1 + B_2 = (k_1^2 + k_2^2)\, H$$

mit
$$k_1 = \frac{F}{F-A} - 1 = \frac{A}{F-A};\quad k_2 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\frac{F}{F-A} = \frac{(1-\alpha)F}{\alpha(F-A)}\ . \ (5).$$

Indem nun durch dieselbe Betrachtung wie oben sich $P = \gamma F B$ ergiebt, ist hier

$$P = \frac{F}{A}(k_1^2 + k_2^2)\,\gamma A H.$$

Die Pressung p_1 ist auch wie im vorigen Falle zu berechnen, indem nur k_1 für k gesetzt wird, nämlich $B_1 = k_1^2 H$ für $B = k^2 H$, während auch

$$\left(\frac{u_1}{u}\right)^2 - 1 = \left(\frac{F}{F-A}\right)^2 - 1 = k_1(k_1 + 2) \text{ statt } k(k+2)$$

ist. Somit folgt auch

$$P_1 = A p_1 = R - 2k_1 \gamma A H,$$

und wenn wieder gesetzt wird:

$$\left.\begin{array}{l} P_0 = R + \vartheta_0 \gamma A H;\quad P_1 = R - \vartheta_1 \gamma A H;\quad P = \vartheta \gamma A H, \\ \text{so ist } \vartheta_0 = \vartheta - \vartheta_1;\quad \vartheta_1 = 2k_1;\quad \vartheta = \frac{F}{A}(k_1^2 + k_2^2) \end{array}\right\} \ldots (6).$$

Aus den Ausdrücken (5) von k_1 und k_2 ergiebt sich

$$k_1 + k_2 = \frac{1}{\alpha}\frac{F}{F-A} - 1 = k,$$

und es sind also ϑ und ϑ_1 kleiner, als im vorigen Fall. Dabei ist ϑ_1, d. h. die Druckverminderung an der Hinterfläche unabhängig von α, somit auch von der Gestalt der vorderen Endfläche.

Ist insbesondere der Körper ein Kreiscylinder, dessen Axe mit derjenigen der gleichfalls kreisförmig cylindrischen Röhre zusammenfällt, und werden, jenachdem seine vordere Endfläche eben oder gewölbt ist, dieselben Werthe von α zu Grunde gelegt wie in den vorigen Beispielen bei gleicher Vorderfläche und für gleiche Werthe von $\frac{r}{a}$, so findet man:

	Ebene Vorderfläche.		Gewölbte Vorderfläche.	
$\frac{r}{a} =$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	2
$\frac{F}{A} =$	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{9}{4}$	4
$\alpha =$	0.824	0,852	0.941	0,951

	Ebene Vorderfläche.		Gewölbte Vorderfläche.	
$k_1 =$	0,8	0,333	0,8	0,333
$k_2 =$	0,384	0,232	0,113	0,069
$\vartheta_0 =$	0,17	−0,01	−0,13	−0,21
$\vartheta_1 =$	1,60	0,67	1,60	0,67
$\vartheta =$	1,77	0,66	1,47	0,46

Nicht nur der resultirende Druck P und die Druckverminderung $= R - P_1$ an der Hinterfläche sind in allen diesen Fällen kleiner geworden, sondern auch die Druckvermehrung $= P_0 - R$ an der Vorderfläche, ja, es ist dieselbe in eine Druckverminderung übergegangen, die aber [illegible]lich immer weniger beträgt als diejenige an der Hinterfläche. —

Die Untersuchungen dieses §. sollen hauptsächlich als Uebergang zu einem häufiger vorkommenden, aber weniger einfachen Falle dienen, [illegible]lich zur Veranschaulichung der Vorgänge und zur principiellen Beurtheilung des gegenseitigen Druckes bei der relativen Bewegung eines festen Körpers und einer Flüssigkeit, die so wenig in ihrer Bewegung beschränkt ist, dass sie als unbegrenzt betrachtet werden kann. Indessen haben sie auch ein selbständiges Interesse, wenn nur die zu Grunde liegenden Voraussetzungen dahin erweitert werden, dass die Flächeninhalte der Querschnitte Q_0 und Q des Wasserstroms im Allgemeinen verschieden, etwa $= F_0$ und F sind.

Wenn z. B. der Druck P eines Wasserstroms auf ein erhobenes tellerförmiges Ventil (Fig. 42, S. 505) ermittelt werden soll, so ist F als der Querschnitt des Ventilgehäuses, F_0 als die kreisförmige Oeffnung im Ventilsitz zu betrachten, indem das Wasser, nach dem Durchgang durch letztere alsbald sich wieder ausbreitend, kaum eine merkliche Contraction vorher erleiden kann; A ist die vom Ventilrande begrenzte Kreisfläche. Wenn hier übrigens die früheren Buchstabenbezeichnungen beibehalten werden (h ist dann eine negative Grösse) und angenommen wird, dass in dem äusseren und unteren ringförmigen Winkelraum des Ventilgehäuses, woselbst eine regelmässige Strömung des ihn erfüllenden Wassers nicht stattfinden kann, dieselbe Pressung $= p_0$ herrscht wie im Querschnitte F_0, so ist die Gleichung, welche ausdrückt, dass die Aenderung der in axialer Richtung genommenen Bewegungsgrösse des zwischen Q_0 und Q befindlichen Wassers in irgend einem Zeitelement dem entsprechenden Antrieb der äusseren Kräfte gleich ist,

$$\frac{\gamma}{g} Fu(u - u_0) = \gamma Fh + F(p_0 - p) - P$$

und folgt daraus

$$P = \gamma F\left[h + \frac{p_0 - p}{\gamma} + 2\left(\frac{u_0}{u} - 1\right)H\right].$$

Ist aber ζ der resultirende Widerstandscoefficient, d. h. ζH die gesammte Widerstandshöhe, so ist die wirksame Druckhöhe:

$$h + \frac{p_0 - p}{\gamma} = \zeta H + \frac{u^2 - u_0^2}{2g} = \zeta H - \left[\left(\frac{u_0}{u}\right)^2 - 1\right]H,$$

folglich $$P = \left[\zeta - \left(\frac{u_0}{u} - 1\right)^2\right]\gamma F H = \left[\zeta - \left(\frac{F}{F_0} - 1\right)^2\right]\gamma F H \;..\; (7).$$

Nach §. 92 unter 5) kann dabei gesetzt werden:

$$\zeta = \left(\frac{1}{\alpha}\frac{F}{F_0} - 1\right)^2 = \left(1{,}537\,\frac{F}{F_0} - 1\right)^2,$$

wenn die Hubhöhe des Ventils wenigstens = dem Radius von F_0, und wenn F_0 höchstens $= F - \varDelta$, indessen auch nicht viel $< F - \varDelta$ ist.

§. 153. Druck des unbegrenzten Wassers auf relativ bewegte feste Körper.

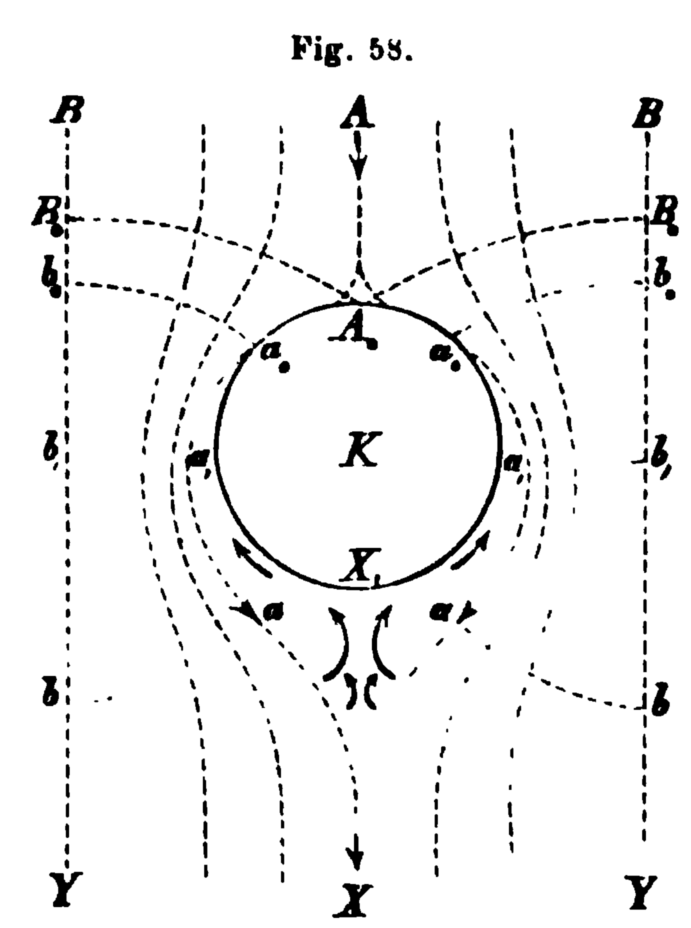
Ein fester Körper, der im Allgemeinen eine Translationsbewegung nit der Geschwindigkeit v habe, befinde sich in Wasser an einer solchen ʼtelle, dass die Entfernung der Körperoberfläche von den Begrenzungsächen des Wassers nach allen Seiten gross im Vergleich mit den Körperimensionen ist. Das Wasser habe an der betreffenden Stelle im Allgeemeinen eine eigene Bewegung mit der Geschwindigkeit u; die Resultante erselben und der entgegengesetzt genommenen Geschwindigkeit v ist dann e relative Geschwindigkeit des Wassers gegen den Körper und sei mit bezeichnet. Denkt man sich eine den Körper ringsum berührende ylinderfläche, deren erzeugende Gerade parallel w ist, so theilt die Behrungslinie L die (als durchaus convex nach aussen vorausgesetzte) Oberiche des Körpers in zwei Theile, von denen wieder der dem Sinne von entgegen gekehrte die Vorderfläche, der andere die Hinterfläche gennt werde.

Wenn man unter diesen Umständen allgemein den Druck berechnen llte, den das Wasser nach irgend einer Richtung auf den Körper aust, so würde dazu die Kenntniss des specifischen Drucks in jedem Punkt r Körperoberfläche erforderlich sein. Wenn man sich aber auch auf die ciellere Aufgabe beschränkt, den Druck P im Sinne von w zu ermitteln dem Ueberschuss des Druckes P_0 auf die Vorderfläche im Sinne von

w über den Druck P_1 auf die Hinterfläche im umgekehrten Sinne, so stellen sich der rationellen Lösung grosse Schwierigkeiten entgegen. Zwar wenn man von dem Gesichtspunkte ausgehend, dass es einerlei sein müsse, wie die relative Geschwindigkeit w aus den absoluten Geschwindigkeiten … beider Theile hervorgeht, den Körper in Ruhe und das Wasser mit der Geschwindigkeit w bewegt denkt, so würde es sich lediglich um einen Grenzfall der im vorigen §. behandelten Aufgabe handeln, entsprechend einem unbegrenzt wachsenden Verhältnisse des Röhrenquerschnitts F zum Querschnitte A des den Körper im Sinne der Axe (der Geschwindigkeit w) berührenden Cylinders bei Voraussetzung einer mittleren Lage des Körpers in der Röhre. Indessen ist schon im vorigen §. hervorgehoben worden, dass die jener Entwickelung zu Grunde liegende Anschauung ohne Zweifel um so fehlerhafter sein werde, je mehr das Verhältniss $\frac{F}{A}$ wächst, und es lässt sich sogar vermuthen, dass sie schon bei mässiger Grösse dieses Verhältnisses, etwa $\frac{F}{A} = 3$ bis 4 wenigstens ungenügend wird, so dass für den hier in Rede stehenden Grenzfall ein brauchbares Resultat nicht daraus gewonnen werden kann.

Eine mehr zutreffende Vorstellung des ganzen Vorganges dürfte die folgende Betrachtung gewähren mit Bezugnahme auf Fig. 58, worin K den als ruhend gedachten Körper, AX eine durch einen mittleren Punkt desselben in der Richtung der Strömungsgeschwindigkeit w des Wassers gezogene Gerade bedeutet, die Vorderfläche des Körpers in A_0, die Hinterfläche in X_1 treffend. Mit der Entfernung von der Geraden AX und vom Körper nimmt die durch denselben verursachte Störung der Wasserbewegung und die entsprechende Druckänderung allmählig ab, und es seien BY, BY die geraden Durchschnittslinien der durch AX gehenden Ebene der Figur mit einer Cylinderfläche, ausserhalb welcher jene Störung verschwindend klein ist. In der Figur sind einige der innerhalb dieses Cylinders in der Nähe des Körpers verlaufenden Bahnen der Wassertheilchen und einige der sie normal schneidenden Querschnitte des Wasserstroms angedeutet; die Krümmung sowohl der Bahnen wie der Querschnitte, und mit der Bahnlänge auch

Fig. 58.



Geschwindigkeit nimmt von innen nach aussen (von AX nach BY) ab. Die Bahnen sind zuerst, etwa bis zum Querschnitte $a_0 b_0$, nach innen convex gekrümmt, und nimmt die Pressung in den entsprechenden Querschnitten nach innen zu; dann werden etwa bis ab die Bahnen einwärts concav gekrümmt, eine nach innen abnehmende Pressung der Querschnitte zwischen $a_0 b_0$ und ab bedingend; endlich krümmen sich die Bahnen wieder convex nach innen, entsprechend einer in gleichem Sinne wachsenden Pressung in den zugehörigen Querschnitten. Die Grösse der letzteren nimmt anfangs etwa bis $A_0 B_0$ zu, dann bis $a_1 b_1$ ab, endlich wieder zu. Im grössten Querschnitte ist die mittlere Geschwindigkeit am kleinsten, die mittlere Pressung am grössten, und da hier zugleich wegen einwärts convexer Bahnkrümmung die Pressung nach innen zunimmt, so ist begreiflich, dass der grösste Druck an der Oberfläche des Körpers bei A_0 in der Mitte der Vorderfläche stattfinden muss. Von hier aus nimmt der hydraulische Ueberdruck (Ueberschuss des hydraulischen über den hydrostatischen Druck) an der Körperoberfläche stetig ab und wird = Null etwa bei a_0 an einer solchen Stelle, wo der Querschnitt $a_0 b_0$ dem ursprünglichen AB wieder nahe gleich geworden ist und die Bahnen sehr schwach gekrümmt sind, indem ihr Krümmungssinn ungefähr an dieser Stelle sich umkehrt. Jenseits der Linie dieser Punkte a_0 ist der hydraulische Ueberdruck an der Oberfläche des Körpers negativ, und zwar ist er am kleinsten (der Absolutwerth des negativen Ueberdrucks am grössten) bei a_1 ungefähr in grösster Entfernung von der Axe AX, weil hier im kleinsten Querschnitte $a_1 b_1$ des Wasserstroms mit stärkster einwärts concaver Bahnkrümmung zu gleicher Zeit die mittlere Pressung am kleinsten ist und die erheblichste Pressungsabnahme nach innen stattfindet. An der Hinterfläche des Körpers muss nun eine Strömung nach der Stelle a_1 des kleinsten Druckes hin eintreten; indem aber das hier angekommene mit dem im Sinne $a_1 a$ strömenden Wasser von überwiegender Masse zusammentrifft, wird es von demselben durch innere Reibung in gleichem Sinne mitgenommen bis es infolge der wachsenden Pressung besonders zwischen a und X gegen die Mitte X_1 der Hinterfläche hin wieder abgelenkt wird. Wenn also auch das Wasser in einem gewissen Raum hinter dem Körper an der regelrechten Strömung nicht Theil nimmt, sondern in wirbelförmiger Bewegung begriffen ist, so ist doch diese nicht der Art regellos, dass ihr eine fast gleichförmige Pressung in dem ganzen fraglichen Raum entspräche, wie es bei den Entwickelungen im vorigen §. angenommen wurde; es müssen vielmehr die Wirbel sich vorwiegend in der Weise ausbilden wie es die Pfeile in Fig. 58 andeuten, entsprechend einer von aX gegen X_1 und von hier gegen a_1 ab-

nehmenden Pressung. Uebrigens lässt sich erwarten, dass das in dem Wirbelraum befindliche Wasser beständig eine theilweise Erneuerung erfahren, dass insbesondere längs $a_0 a_1$ und längs aX strömendes Wasser in diesen Raum eintreten und eine gleiche Wassermenge längs $a_1 a$ aus ihm austretend dem Hauptstrom einverleibt werden wird. Nimmt man hinzu, dass auch abgesehen hiervon besonders da, wo die Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung am schnellsten variabel ist, die innere Reibung von erheblichem Einfluss auf den ganzen Vorgang sein, und dass dieser in seinen Einzelheiten sehr wesentlich von der Grösse, Gestalt und Lage des Körpers abhängig sein muss, so ist es begreiflich, dass eine theoretische Berechnung des in Rede stehenden Druckes in hinlänglich zutreffender und doch zugleich technisch brauchbarer Weise bisher nicht gelungen ist.

Den Entwickelungen des vorigen §. können nur die allgemeinen Ausdrücke:

$$P_0 = R + \vartheta_0 \gamma A H; \quad P_1 = R - \vartheta_1 \gamma A H; \quad P = \vartheta \gamma A H \;\ldots$$

entnommen werden, in denen

$H = \frac{w^2}{2g}$ die der (durch die gegenseitige Störung noch nicht modificirten) relativen Geschwindigkeit entsprechende Geschwindigkeitshöhe,

A den Querschnitt des den Körper in der Richtung von w berührenden Cylinders,

γ das specifische Gewicht des Wassers und

R den hydrostatischen Druck auf die ebene Fläche A am Orte des Körpers

bedeutet, wogegen die Coefficienten ϑ_0, ϑ_1 und $\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1$ nur durch Beobachtung und Messung mit einiger Zuverlässigkeit bestimmbar sind.

Von solchen Beobachtungen, welche zugleich durch Messung des specifischen Druckes an verschiedenen Stellen der Körperoberfläche zur näheren Aufklärung der obwaltenden Umstände dienen können, sind diejenigen bemerkenswerth, welche von Berthon zur Begründung der Eigenschaften des von ihm erfundenen Logs, d. h. Instrumentes zur Messung der Geschwindigkeit eines Schiffes, vielfach angestellt wurden. Der Hauptbestandtheil dieses Logs ist eine oben offene, unten geschlossene cylindrische Röhre, welche, durch eine Stopfbüchse gedichtet, von oben her durch den Schiffskiel hindurch gesteckt ist, so dass sie um etwa 15 bis 20 Cent. unten hervorragt; in der Wand dieses vorstehenden Rohrstücks befindet sich eine kleine Seitenöffnung. Wenn diese Oeffnung gerade vorausgekehrt ist, d. h. in der Mitte der Vorderfläche des Rohrstücks sich befindet, während das Schiff in ruhigem Wasser in der Richtung des Kiels sich

wegt, so steigt das Wasser in der Röhre bis zu einer gewissen der Schiffsgeschwindigkeit entsprechenden Höhe h über der äusseren Wasseroberfläche; wird aber von dieser Stellung aus die Röhre allmählig gedreht, so nimmt die Erhebung des Wassers in ihr stetig ab und wird = Null bei einem Drehungswinkel von 41 bis 42°; bei weiterer Drehung geht die Erhebung des Wassers in eine Senkung über, welche rasch zunimmt bis etwa 1,5 h bei einem Drehungswinkel von ungefähr 90° und dann langsamer abnimmt bis etwa 0,5 h bei einem Drehungswinkel von 180°. In der Mitte der Hinterfläche findet also eine Druckverminderung statt, die halb so gross ist wie die Druckvermehrung in der Mitte der Vorderfläche, aber nur $^1/_3$ so gross wie die Druckverminderung an den Seiten.* Diese Beobachtungen sind in vollkommener Uebereinstimmung mit der obigen allgemeinen Beschreibung des in Rede stehenden Vorganges. Nicht ganz so deutlich ist es der Fall bezüglich auf die schon früher von Dubuat angestellten ähnlichen Beobachtungen. Derselbe benutzte eine rechtwinklig parallelepipedische Blechbüchse von 0,325 Mtr. Seite der quadratischen Endflächen bei nur 9 Millimeter Höhe oder Dicke; an einer der beiden quadratischen Endflächen konnte die flache Büchse, die an und für sich eine quadratische Platte vorstellte, durch Anfügung eines Holzprisma von gleichem Querschnitte zu einem mehr oder weniger langen prismatischen Körper ergänzt werden, wogegen die gegenüber liegende Fläche mit regelmässig vertheilten kleinen Löchern versehen war. Indem dann diese bei Oeffnung eines einzelnen Loches oder sämmtlicher Löcher zugleich zur Vorder- oder Hinterfläche des Körpers bezüglich auf einen Wasserstrom gemacht wurde, konnte durch Beobachtung des Wasserstandes in einer mit dem Inneren der Blechbüchse communicirenden Röhre entweder der Druck an gewissen Stellen oder der mittlere Druck an der Vorder- und Hinterfläche, somit der Gesammtdruck auf jede einzeln und auf den ganzen Körper ermittelt werden. Andere Beobachter haben meistens nur diesen resultirenden Druck gemessen.

Im Allgemeinen ergab sich, dass ϑ_0 ein grösserer, ϑ_1 ein kleinerer Theil des resultirenden Coefficienten ϑ ist, als durch die Rechnung im vorigen §. gefunden wurde, ohne Zweifel eine Folge des Umstandes, dass mit der in Fig. 58 angedeuteten vorwaltenden Richtung der Wirbelströme an der Hinterfläche des Körpers eine solche mittlere Pressung daselbst verbunden ist, welche nicht nur die kleinste, sondern auch die mittlere

* Society of Engineers, Transactions for 1869, p. 215. (Apparatus for measuring the velocity of ships; by Vaughan Pendred.) Das Berthon'sche Log selbst wird im zweiten Bande dieses Werkes näher besprochen werden.

Pressung im kleinsten Querschnitte $a_1 b_1$ des Hauptstroms wesentlich übertrifft. Weniger leicht erklärlich, vielmehr weiterer Prüfung bedürftig erscheint dagegen die Thatsache, dass ϑ nicht unerheblich grösser gefunden wurde für den Fall eines in strömendem Wasser ruhenden $\left(v = 0,\ H = \frac{u^2}{2g}\right)$, als für den Fall eines in ruhigem Wasser bewegten Körpers $\left(u = 0,\ H = \frac{v^2}{2g}\right)$. Wenn dieser letztere Fall noch insofern modificirt wird, als das Wasser nicht allseitig unbegrenzt ist, indem es sich namentlich noch um den Widerstand gegen die Bewegung eines auf dem Wasser schwimmenden Körpers handelt, so kann zwar nach Analogie auch für ihn der allgemeine Ausdruck (1) von P zu Grunde gelegt werden, jedoch ist der Coefficient ϑ in noch höherem Grade auf eine nur empirische Bestimmung angewiesen, besonders auch deshalb, weil bei der oft grossen Länge solcher Körper die Reibung ihrer Oberfläche am Wasser als ein den Widerstand wesentlich mit bedingender, vielleicht gar (z. B. bei vorn und hinten allmählig verjüngt zulaufenden Schiffskörpern) als ein ihn vorwiegend bestimmender Umstand in Betracht kommt. —

Wenn nun aber auch Versuche unerlässlich sind, um den Druck P für verschiedene vorkommende Fälle zuverlässig zu bestimmen, so kann es doch oft Bedürfniss sein, solche Fälle, für welche unmittelbar zutreffende Versuche nicht vorliegen, mit anderen einfacheren Fällen auf Grund gewisser näherungsweise zulässiger Annahmen rechnungsmässig zu vergleichen. Denkt man sich den der Vorderfläche des Körpers mit der relativen Geschwindigkeit w zufliessenden Wasserstrom, dessen Querschnitt $= A$ ist, aus elementaren Wasserfäden mit den Querschnitten dA bestehend, so ist man zu jenem Zweck besonders von der Voraussetzung ausgegangen, dass diese Wasserfäden ähnlich wie freie Wasserstrahlen auf den Körper wirken, und dass somit der Normaldruck eines solchen Fadens auf das in seiner Verlängerung liegende Element dF der Körperoberfläche analog Gl. (4) in §. 150:

$$dN = \mu\, dA\, w^2 \cos\nu = \mu (w \cos\nu)^2 dF \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

gesetzt werden könne, unter μ eine der specifischen Masse der Flüssigkeit, wenn auch nicht gleiche, so doch proportionale Constante, und unter ν den spitzen Winkel verstanden, den die Richtung von w mit der einwärts gerichteten Normalen des Oberflächenelementes dF bildet. Man setzt darnach diesen elementaren Normaldruck proportional dem Quadrat der betreffenden relativen Normalgeschwindigkeit, welche auch

$$w \cos\nu = u \cos\alpha - v \cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ist, wenn α und β die Winkel bedeuten, unter denen die Geschwindig-

keiten u und v des Wassers und des Körpers gegen die einwärts gerichtete Normale von dF geneigt sind. Aus Gl. (2) ergiebt sich für ein Element des hydraulischen Ueberdrucks auf die Vorderfläche des Körpers im Sinne von w der Ausdruck:

$$d(P_0 - R) = dN \cos\nu = \mu w^2 \cos^2\nu \, dA$$

und ist daraus zu schliessen, dass, wenn wieder

$$P_0 - R = \vartheta_0 \gamma A H \text{ mit } H = \frac{w^2}{2g}$$

gesetzt wird, der Coefficient ϑ_0 im Verhältniss des Mittelwerthes

$$= \frac{1}{A}\int \cos^2\nu \, dA$$

von $\cos^2\nu$ kleiner zu schätzen ist, als für den Fall einer ebenen Fläche $= A$, die von der relativen Geschwindigkeit w normal getroffen wird. Wenn man nun aber dieses Resultat dahin ausdehnt, dass man in demselben Verhältniss auch den Coefficient ϑ im Ausdrucke $P = \vartheta\gamma A H$ des resultirenden Drucks verkleinert, so kann dadurch freilich die Fehlerhaftigkeit solcher Schätzung um so mehr gesteigert werden, je mehr dieses P zugleich durch den negativen hydraulischen Ueberdruck an der Hinterfläche und durch die Reibung an der Oberfläche des Körpers bedingt wird.

Im Fall einer ebenen und im Allgemeinen schräg von der relativen Geschwindigkeit w getroffenen ebenen Platte sind ν, α, β constant, und erhielte man

$$P = \vartheta\gamma A \frac{(w\cos\nu)^2}{2g},$$

wenn ϑ hier den erfahrungsmässigen Coefficienten für die normal getroffene Platte ($\nu = 0$) bedeutet. Ist aber F die Flächengrösse der Platte und N der Normaldruck auf dieselbe, so ist (bei Abstraction von der Reibung)

$$P = N\cos\nu, \quad A = F\cos\nu$$

und deshalb der resultirende Normaldruck, aus welchem hier auch der Druck nach einer beliebigen Richtung durch Multiplication mit dem Cosinus ihres Winkels mit der Normale erhalten werden kann,

$$N = \vartheta\gamma F \frac{(w\cos\nu)^2}{2g} = \vartheta\gamma F \frac{(u\cos\alpha - v\cos\beta)^2}{2g} \quad \ldots\ldots (4).$$

Für einen normalen Kreiscylinder vom Radius r und von der Länge l, dessen Axe rechtwinkelig gegen w gerichtet ist, hat man

$$dA = d(2lr\sin\nu) = A\,d\sin\nu,$$

also $$\frac{1}{A}\int cos^2 v\, dA = \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = \frac{2}{3};$$

für eine Kugel vom Radius r:

$$dA = d(\pi r^2 sin^2 v) = A\, d(sin^2 v),$$

also $$\frac{1}{A}\int cos^2 v\, dA = \int_0^1 (1 - x)\, dx = \frac{1}{2};$$

woraus man mit freilich nur roher Annäherung schliesst, dass der Coefficient ϑ im ersteren Falle etwa $^2/_3$ so gross sein werde wie für ein rechtwinkeliges Parallelepipedum mit den Kanten $2r$, $2r$ und l, wenn w parallel dem einen System der Kanten $2r$ ist, und im zweiten Falle etwa halb so gross wie für einen normalen Kreiscylinder vom Radius r, wenn w die Richtung seiner Axe $= 2r$ hat, oder auch etwa halb so gross wie für einen Würfel, wenn w mit 4 seiner Kanten $= 2r$ parallel ist.

§. 154. Erfahrungen über den hydraulischen Druck und Widerstand des Wassers.

1) Der Druck eines Wasserstroms auf einen ganz eingetauchten ruhenden festen Körper, und zwar auf ein normales Prisma, dessen quadratische Endflächen senkrecht zur Bewegungsrichtung des Wassers waren, ist von Dubuat und von Duchemin gemessen worden. Ihren nahe übereinstimmenden Messungsresultaten ist mit Bezug auf Gl. im vorigen §., wenn l die Länge des Prisma und a die Seite seines quadratischen Querschnitts bedeutet, zu entnehmen:

für $\frac{l}{a}$ =	0,03	1	2	3	6
ϑ =	1,86	1,46	1,35	1,33	1,46
ϑ_0 =	1,19	1,19	1,19	1,19	1,19
$\vartheta_1 = \vartheta - \vartheta_0$ =	0,67	0,27	0,16	0,14	0,27

Die Unabhängigkeit des Coefficienten ϑ_0 von der verhältnissmässigen Körperlänge wurde namentlich von Dubuat (auf die im vorigen §. angegebene Weise) erkannt; das Aenderungsgesetz des entsprechenden Coefficienten $\vartheta_1 = \vartheta - \vartheta_0$, der zugleich den Einfluss der Druckverminderung an der Hinterfläche und der Reibung an der prismatischen Umfläche in sich begreift, deutet darauf hin, dass jene Druckverminderung mit wachsender

Länge sich bald einem Minimum nähert, während natürlich die Reibung nahe proportional der Länge zunimmt. Der Querschnitt $A = a^2$ des Prisma war bei den Versuchen nahe $= 0{,}1$ Quadratm., die Geschwindigkeit u des Wassers $= 1$ Mtr. pro Secunde.

2) In Betreff des Widerstandes gegen die Bewegung ganz eingetauchter Körper in unbewegtem Wasser sind auch zunächst die Versuche von Dubuat und von Duchemin mit normalen und in der Längenrichtung bewegten Prismen zu erwähnen, deren Resultate zwar darin übereinstimmen, dass dieser Widerstand kleiner, als der Druck im Falle unter 1) gefunden wurde, übrigens aber insofern in Widerspruch sind, als der Coefficient ϑ mit wachsender Länge des Prisma von Dubuat auch hier anfangs abnehmend, von Duchemin dagegen nur zunehmend gefunden wurde. Wenn nämlich a und l die oben unter 1) angegebenen Bedeutungen haben, so wäre

für	$\frac{l}{a} =$	0,03	1	3
nach Dubuat:	$\vartheta =$	1,43	1,17	1,10
nach Duchemin:	$\vartheta =$	1,25	1,28	1,33

und dabei nach Dubuat beständig $\vartheta_0 = 1$. Wenn auch das von Letzterem gefundene Aenderungsgesetz des Coefficienten ϑ wahrscheinlicher und der Werth $\vartheta = 1{,}43$ für eine normal bewegte ebene Platte mit einem Versuche Pambour's in Uebereinstimmung ist, so erscheinen doch immerhin jene Zahlen einstweilen so unsicher, dass mit Poncelet bis auf Weiteres

$$\vartheta = 1{,}3 \text{ für } \frac{l}{a} \text{ oder allgemeiner } \frac{l}{\sqrt{A}} < 3$$

gesetzt werden mag, falls A nicht erheblich kleiner oder grösser als 0,1 Quadratmeter ist. Nach sonstigen Erfahrungen scheint nämlich ϑ mit A zu wachsen, wenn auch das Gesetz dieser Abhängigkeit noch nicht sicher angegeben werden kann. —

Für eine Kugel wurde von Piobert (Geschützkugeln von 0,1 bis 0,2 Mtr. Durchm.) $\vartheta = 0{,}47$, von Borda $\vartheta = 0{,}56$, von Hutton $\vartheta = 0{,}59$ gefunden.

Bei anderen Versuchen mit Körpern, die einerseits eben begrenzt, andererseits abgerundet, zugespitzt oder zugeschärft waren, wurde der Widerstand nicht seinem Absolutwerth nach, sondern nur das Verhältniss des Widerstandes bei vorausgekehrter Rundung, Spitze oder Schneide zum Widerstande gegen die Bewegung im umgekehrten Sinn mit vorausgekehrter ebener Fläche ermittelt. Dieses Verhältniss ergab sich:

für eine Halbkugel in naher Uebereinstimmung nach Borda, Hutton und Vince = 0,41;

für einen senkrecht zur Axe bewegten Cylinder mit halbkreisförmigem Querschnitt nach Borda = 0,57;

für einen normalen Kegel mit kreisförmiger Basis

	0,69	0,54	0,43
bei einem Oeffnungswinkel =	90°	60°	$51^1/_2$°
nach	Borda		Hutton;

für einen dreiseitigen Keil mit ebenen Seitenflächen nach Borda

	0,73	0,52
bei einem Keilwinkel =	90°	60°;

für einen dreiseitigen Keil mit gewölbten Seitenfläc[hen] (Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck, dessen zwei Seiten durch Kreisbögen, aus den Gegenecken beschrieben, ersetzt sind) nach Borda = [illegible]

Da für die Kugel dem Obigen zufolge im Mittel $\vartheta = 0,54$ gefunden wurde und ebenso gross auch ϑ für die Halbkugel bei ihrer Bewegung in der Richtung der Axe mit vorausgekehrter Rundung zu schätzen ist, würde bei ihrer Bewegung im umgekehrten Sinne

$$\vartheta = \frac{0,54}{0,41} = 1,3$$

zu setzen sein. Daraus und mit Rücksicht auf die vorher angeführten erfahrungsmässigen Widerstände von Prismen ist zu schliessen, dass die Absolutwerthe von ϑ für die Bewegung eines halbkreisförmigen Cylinders mit vorausgekehrter Rundung, eines Kegels mit vorausgekehrter Spitze oder eines Keils mit vorausgekehrter Schneide näherungsweise durch Multiplication der betreffenden obigen Verhältnisszahlen mit 1,3 erhalten werden, vorausgesetzt, dass die Dimensionen nicht übermässig klein oder gross [illegible]

3) Ueber den Widerstand gegen die Bewegung theilweise eingetauchter (schwimmender) Körper in unbewegtem Wasser, [illegible] bei in dem Ausdrucke

$$P = \vartheta \gamma A \frac{v^2}{2g}$$

desselben der Factor A dieselbe Bedeutung bezüglich auf den unter Wasser befindlichen Körpertheil wie in den vorigen Fällen unter 1) und 2) bezüglich auf den ganzen Körper hat, sind Versuche von Dubuat, Bossut, d'Alembert, Condorcet u. A. angestellt worden. Ihnen zufolge [illegible]

wenn der eingetauchte Körpertheil die Form eines normalen Prisma hat, dessen Endflächen senkrecht zur Bewegungsrichtung sind, $\vartheta = 1,1$ gesetzt werden, sofern die Länge

$$l = (3 \text{ bis } 6)\sqrt{A}$$

ist; bei kleinerer und grösserer Länge ist ϑ grösser. Wird der Körper durch zwei Verticalebenen vorn zugeschärft, so wird ϑ erheblich kleiner und beträgt ungefähr bei dem Zuschärfungswinkel

$\alpha =$	156^0	132^0	108^0	84^0	60^0	36^0	12^0
$\vartheta =$	1,06	0,93	0,84	0,59	0,48	0,45	0,44

Eine ähnliche Zuschärfung des Hintertheils vermindert ϑ in geringerem Grade, etwa

bei $\alpha =$	138^0	96^0	48^0	24^0
bis $\vartheta =$	1,03	0,98	0,95	0,92

Noch mehr wird ϑ vermindert bei gleichzeitiger Zuschärfung des Körpers vorn und hinten, ferner bei Combination jener Zuschärfung des Vordertheils durch convergirende Verticalebenen mit einer Abschrägung desselben durch eine von vorn nach hinten abwärts geneigte Ebene, endlich indem diese Zuschärfungs- und Abschrägungsebenen durch stetig gekrümmte Flächen ersetzt werden, wie bei Schiffen, wodurch ϑ bis unter 0,1 verkleinert werden kann.* Je mehr übrigens so der Einfluss der Druckvermehrung am Vordertheil und der Druckverminderung am Hintertheil herabgezogen wird, desto mehr wird die Reibung von vorwiegender Bedeutung.

b. Druck der Luft auf relativ bewegte feste Körper.

§. 155. Druck eines freien Luftstrahls auf eine feste Fläche.

Die aus einer Mündung ausströmende Luft bildet zwar nicht einen ebenso bestimmt begrenzten Strahl wie Wasser bei freiem Ausflusse, weil die Oberfläche des Luftstroms alsbald durch Mischung mit der umgebenden Luft mehr und mehr verwischt und durch eine an Dicke zunehmende Lufthülle ersetzt wird, in welcher eine stetig nach aussen abnehmende Strömungsgeschwindigkeit stattfindet. Bis zu mässiger Entfernung von der Mündung

* Der Widerstand von Schiffen wird in einem späteren Theile dieses Werkes eingehender besprochen werden.

kann man indessen auch hier von einem Strahl reden, und wenn derselbe eine feste Fläche trifft, so übt er einen Druck P auf dieselbe aus, der im Wesentlichen denselben Gesetzen unterworfen sein wird wie der Druck eines freien Wasserstrahls. Eine Modification dieser Gesetze kann aber dadurch verursacht werden, dass die in ihrer Bewegung von der Fläche gehemmte Luft zugleich eine Dichtigkeitsänderung (Verdichtung) erfährt: die Correction des theoretischen Ausdrucks von P durch erfahrungsmässige Bestimmung gewisser Coefficienten wird dadurch in erhöhtem Grade nöthig.

Versuche in dieser Beziehung sind bisher, so viel bekannt, nur von Weisbach angestellt worden, nämlich 1856 mit demselben Apparate und in Verbindung mit einem Theil seiner in §. 151 besprochenen Versuche über den Druck von Wasserstrahlen.* Die benutzten Mundstücke waren die dort angegebenen: zwei Kreismündungen in dünner Wand von 10,1 und 14,08 Millim. Durchmesser, ein kurzes conoidisches Mundstück mit cylindrischer Ausmündung von 10,02 Millim. Mündungsdurchmesser und ausserdem noch eine kurze cylindrische Ansatzröhre von 50 Millim. Länge und 10,12 Millim. Weite; die Luftstrahlen wurden ebenso wie die Wasserstrahlen normal und centrisch theils gegen eine ebene, theils gegen eine hyperbolisch concave (Ablenkungswinkel $\varrho = 134^0$) runde Platte von 100 Millim. Durchmesser gerichtet, deren Entfernung von der Mündung etwa 60 Millim. betrug.

Wenn man, unter k und n erfahrungsmässig zu bestimmende Coefficienten verstanden, den Druck P auch hier wie in §. 151

$$P = k\mu F u^2 (1 - n \cos\varrho)$$

setzt oder, wenn A den Flächeninhalt der Mündung bedeutet, mit

$$F = \alpha A,\quad h = \frac{u^2}{2g},\quad \mu g = \gamma$$

$$P = 2k\alpha\gamma A h (1 - n \cos\varrho)$$

und wenn man dabei unter $F = \alpha A$ den Ausflussquerschnitt, d. h. denjenigen Querschnitt des Luftstrahls versteht, in welchem zuerst die Pressung = der äusseren (atmosphärischen) Pressung geworden ist und welcher dann mit dem kleinsten Querschnitte (α mit dem Contractionscoefficienten

---

* „Civilingenieur“, Band VIII. Den daselbst aus diesen Versuchen gezogenen Folgerungen liegen übrigens erhebliche Irrthümer zu Grunde; insbesondere ist der Zustand der ausfliessenden Luft irrthümlich so berechnet worden, als ob das Verhältniss der specifischen Wärmen bei constanter Pressung und bei constantem Volumen $= \frac{10}{3}$ wäre.

identisch ist, wenn das Verhältniss $\frac{p_0}{p}$ der inneren zur äusseren Pressung eine gewisse Grenze

$$lim \frac{p_0}{p} = \left(\frac{m+1}{2}\right)^{\frac{m}{m-1}}$$

nicht überschreitet, ferner unter γ das specifische Gewicht der Luft und unter h die Geschwindigkeitshöhe in diesem Querschnitte, so ist nach §. 101, Gl. (9) mit $n = 1{,}41$ und

$$p_0 v_0 = R T_0 = 29{,}4 \,.\, 287{,}5$$

entsprechend der zu 14,5 Grad angegebenen Temperatur im Windkessel:

$$h = 29068 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right]$$

und, wenn γ_0 das specifische Gewicht der Luft im Kessel bedeutet,

$$\gamma = \gamma_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{p_0}{R T_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{p}{R T_0} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{m-1}{m}}$$

oder, da der Barometerstand bei den Versuchen 0,7316 Mtr. betrug,

$$\gamma = \frac{0{,}7316 \,.\, 13596}{29{,}4 \,.\, 287{,}5} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{m-1}{m}} = 1{,}1768 \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{m-1}{m}}.$$

Die Einsetzung dieser Werthe von h und γ ergiebt:

$$P = 68413\, k \alpha A \left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{m-1}{m}} - 1\right] (1 - n \cos\varrho).$$

Zur Bestimmung des Coefficienten k sind die Versuche mit der ebenen Platte ($\cos\varrho = 0$) und dem kurzen conoidischen Mundstück ($A = 0{,}00007885$ Quadratm.) am geeignetsten, indem dabei $\alpha = 1$ oder nur wenig > 1 gesetzt werden kann, jenachdem $\frac{p_0}{p}$ kleiner oder grösser, als der obige Grenzwerth ist, der sich mit $m = 1{,}388$ entsprechend dem Widerstandscoefficienten $\zeta = 0{,}04$ (§. 103, S. 585) hier $= 1 : 0{,}53 = 1{,}887$ ergiebt. Der Ausdruck von P geht dadurch für diese Versuchsreihe über in

$$P = 5{,}3944\, k \alpha \left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{0{,}2795} - 1\right]$$

und liefert entsprechend den Versuchswerthen

$$\frac{p_0}{p} = 1{,}508 \qquad 1{,}675 \qquad 1{,}862 \qquad 2{,}056 \qquad 2{,}252$$

und $P = 0,6497 \quad 0,8402 \quad 1,0307 \quad 1,2212 \quad 1,4117$

$ka = 0,990 \quad 1,005 \quad 1,007 \quad 1,014 \quad 1,027$

Indem die mässige Zunahme dieser Zahlen durch das Wachsen von α genügend erklärt werden kann, ist zu schliessen, dass der Coefficient k hier nur sehr wenig von 1 verschieden ist.

Die meisten Versuche beziehen sich auf den Ausfluss der Luft aus den zweierlei Kreismündungen in dünner Wand, und wenn dieselben wegen des unbekannten und in höherem Grade veränderlichen Werthes von α auch weniger zur Prüfung des Coefficienten k geeignet sind, so können sie doch zur Bestimmung von n dienen, da bei diesen Versuchen theils die ebene, theils die concav gekrümmte Platte vom Luftstrahl getroffen wurde. Wenn der gemessene Druck auf erstere mit P_1, auf letztere mit P_2 bezeichnet wird, so ergab sich bei den Versuchen mit der Kreismündung von 10,1 Millim. Durchmesser:

$$\left\{\begin{array}{llllll} \frac{p_0}{p} & = 1,670 & 1,880 & 2,074 & 2,276 & \\ P_1 & = 0,6497 & 0,8402 & 1,0307 & 1,2212 & \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} \frac{p_0}{p} & = 1,413 & 1,541 & 1,667 & 1,806 & 1,951 \\ P_2 & = 0,6264 & 0,8169 & 1,0074 & 1,1979 & 1,3884 \end{array}\right.$$

Durch Interpolation findet man daraus für gleiche Werthe von $\frac{p_0}{p}$, nämlich

$$\begin{array}{rllll} \text{für} & \frac{p_0}{p} & = 1,6 & 1,8 & 2,0 \\ & P_1 & = 0,586 & 0,767 & 0,957 \\ & P_2 & = 0,904 & 1,192 & 1,458 \\ & \frac{P_2}{P_1} & = 1,543 & 1,554 & 1,524 \\ \text{und daraus} & n & = 0,782 & 0,798 & 0,754 \end{array}$$

indem sich annehmen lässt, dass bei derselben Mündung und demselben Verhältniss $\frac{p_0}{p}$ auch ka denselben Werth hat und somit

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 - n\cos\varrho = 1 - n\cos 134^0 = 1 + \frac{n}{1,4396}$$

ist. Die Versuche mit der Kreismündung von 14,08 Millim. Weite ergaben

$$\left\{\begin{array}{llllll} \frac{p_0}{p} & = 1,349 & 1,558 & 1,776 & 1,984 & 2,236 \\ P_1 & = 0,6497 & 1,0307 & 1,4117 & 1,7927 & 2,1737 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \frac{p_0}{p} = 1{,}205 \quad 1{,}347 \quad 1{,}477 \quad 1{,}609 \quad 1{,}739 \\ P_2 = 0{,}6264 \quad 1{,}0074 \quad 1{,}3884 \quad 1{,}7694 \quad 2{,}1504 \end{cases}$$

und daraus für

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= 1{,}4 \quad 1{,}6 \quad 1{,}8 \\ P_1 &= 0{,}742 \quad 1{,}100 \quad 1{,}457 \\ P_2 &= 1{,}171 \quad 1{,}748 \quad 2{,}338 \\ \frac{P_2}{P_1} &= 1{,}578 \quad 1{,}589 \quad 1{,}605 \end{aligned}$$

in gleicher Weise $n = 0{,}832 \quad 0{,}848 \quad 0{,}871$.

Eine Beziehung zwischen n und $\frac{p_0}{p}$ ist hieraus nicht deutlich erkennbar; indem aber im Mittel

$n = 0{,}78$ für die 10 Millim. weite,

$n = 0{,}85$ „ „ 14 „ „ Mündung

ist, scheint sich auch hier die in §. 151 für den Wasserstrahl gefundene Abnahme von n mit zunehmendem Durchmesserverhältniss von Platte und Strahl zu bestätigen, ein Verhalten, welches ebenso wie dort erklärlich ist. Der hier grössere Werth von k ist dem Einflusse der Luftverdichtung vor der Platte zuzuschreiben.

§. 156. Druck unbegrenzter Luft auf feste Körper bei ihrer relativen Bewegung.

Wenn man den Druck im Sinne der relativen Geschwindigkeit w auch hier

$$P = \vartheta \gamma A H \text{ mit } H = \frac{w^2}{2g} \text{ (§. 153, Gl. 1)}$$

setzt, unter γ das specif. Gewicht der Luft und unter A den Querschnitt des den Körper in der Richtung von w ringsum berührenden Cylinders verstanden, so lässt sich den freilich vielfach widerspruchsvollen betreffenden Erfahrungen im Ganzen entnehmen, dass dem Coefficienten ϑ dieselben Werthe beigelegt werden können wie unter sonst gleichen Umständen für Wasser (§. 154), so lange A und w gewisse Grenzen nicht überschreiten, insbesondere $w < 10$ Mtr. pro Sec. ist.

Indem sich erwarten lässt, dass P durch die Verdichtung der Luft an der Vorderfläche des Körpers vergrössert wird, diese Verdichtung aber,

vom Rande gegen die Mitte der Fläche zunehmend, nur bei grösseren Dimensionen der letzteren in merklichem Grade sich geltend machen kann, ist es begreiflich, dass ϑ mit A wachsend gefunden wurde. So setzte d'Aubuisson, besonders auf Versuche Borda's gestützt, den Druck bewegter Luft auf eine normal getroffene ebene Fläche (Wand von kleiner Dicke) $= A$ Quadratm.

$$P = 0{,}11\ \gamma A^{1,1}\ u^2\ \text{Kgr.},$$

entsprechend $\qquad \vartheta = 0{,}11 \,.\, 2 \,.\, 9{,}81\ A^{0,1} = 2{,}16\ A^{0,1}.$

Wenn man aber, den erfahrungsmässigen Werth $\vartheta = 1{,}86$ für $A = 0{,}1$ Quadratm. nach §. 154 unter 1) zu Grunde legend,

$$\vartheta = 2{,}34\ A^{0,1}$$

setzt, so ist für $A =$	0,25	0,5	1	2	4	Quadratm.
$\vartheta =$	2,04	2,18	2,34	2,51	2,69	

Bei länglicher Gestalt der Fläche ist zu bedenken, dass für das mehr oder weniger leichte seitliche Abfliessen der durch sie in ihrer Bewegung gestörten Luft vorzugsweise die kleinere Dimension maassgebend sein wird. So würde z. B. für den Winddruck auf die vom Segeltuch bedeckte Fläche eines Windmühlenflügels von 2 Mtr. Breite der $A = 4$ Quadratm. entsprechende Werth $\vartheta = 2{,}69$ passend erscheinen, wenn diese Fläche ganz eben wäre; sofern aber der Wind eine ihm zugekehrte concave Krümmung des Segeltuchs verursacht, kann dadurch ϑ in einem nur durch Specialversuche näher festzustellenden Maasse weiter vergrössert werden.

Wenn der Luftstrom unter einem gewissen Winkel ν gegen die Normale der ebenen Fläche geneigt ist, so sollte nach §. 1[illegible] Gl. (4) der Normaldruck im Verhältniss $\cos^2\nu$ kleiner sein, als für $\nu = 0$, wogegen nach Hutton dieses Verhältniss besser $= (\cos\nu)^{1,84\,\sin\nu}$ zu setzen ist,

z. B. $=$	0,995	0,984	0,962	0,926	0,876	0,810	0,730
für $\nu =$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°
$=$	0,637	0,536	0,433	0,331	0,238	0,156	0,042
für $\nu =$	45°	50°	55°	60°	65°	70°	80°

Der Widerstand gegen die Bewegung ebener plattenförmiger Körper nach Richtung der Normalen ist gewöhnlich als aus einer constanten und einem mit v^2 wachsenden Gliede bestehend dargestellt worden; indessen sind diese Ausdrücke, abgesehen davon, dass ihre Coefficienten von verschiedenen Beobachtern sehr verschieden gefunden wurden, selbst in ihrer angenäherten Zulässigkeit auf mässig grosse Geschwindig-

keiten beschränkt, indem die ihnen entsprechende Abnahme des Coefficienten ϑ mit wachsender Geschwindigkeit v sich mit sonstigen Erfahrungen über den Widerstand fester Körper in der Luft nur bei kleineren Geschwindigkeiten in Uebereinstimmung befindet, während bei grösseren ϑ mit v zunimmt. In Betreff des Widerstandes ebener fester Flächen muss übrigens der Fall ihrer normalen Translationsbewegung von dem technisch wichtigeren und auch bei den Versuchen meistens realisirten Falle ihrer rotirenden Bewegung um eine in der Ausbreitung ihrer Ebene gelegene Axe unterschieden werden; nach Didion z. B. wäre im ersten bei $A = 1$ Quadratm.

$$\vartheta = 1,318 + \frac{0,565}{v^2},$$

dagegen im zweiten bei $A = 0,2 . 0,2 = 0,04$ Quadratm.

$$\vartheta = 1,573 + \frac{0,681}{v^2},$$

d. h. etwa 1,2 mal so gross trotz der viel kleineren Fläche. Dieses Verhalten mag dadurch zu erklären sein, dass die bei der Translationsbewegung eine Zeit lang an der Vorderfläche fast relativ ruhende verdichtete Luft gewissermaassen eine den Widerstand vermindernde Zuspitzung bildet, während die rotirende Fläche die vor ihr befindliche Luft wie ein Ventilator beständig nach aussen treibt und so überhaupt eine grössere lebendige Kraft ihr mittheilt.

In ähnlicher Weise wird auch bei beschleunigter Bewegung der Fläche durch ihre Beschleunigung φ, indem dieselbe auch der Luft mitzutheilen ist, der Widerstand vergrössert. So ist nach Versuchen von Didion mit der ebenen Fläche von 1 Quadratm. bei beschleunigter normaler Translationsbewegung:

$$\vartheta = 1,318 + \frac{0,565 + 2,574\,\varphi}{v^2}.$$

Seinen Versuchen mit einem Fallschirm von $A = 1,2$ Quadratmeter, bei welchem die Tiefe der vorausgehenden concaven Fläche etwa $^1/_3$ des Durchmessers betrug, ist dagegen

$$\vartheta = 2,559 + \frac{1,099 + 2,229\,\varphi}{v^2}$$

zu entnehmen, woraus zugleich der erhebliche (hier den Widerstand fast verdoppelnde) Einfluss einer concaven Krümmung der Vorderfläche ersichtlich ist. —

Ausser dem Widerstande plattenförmiger Körper bei mässigen Geschwindigkeiten ist namentlich der Widerstand von Kugeln bei grossen

Geschwindigkeiten wiederholt geprüft (aus den Geschwindigkeitsverlusten der aus verschiedenen Entfernungen auf ein ballistisches Pendel abgeschossenen Kugeln berechnet) worden. Solche Versuche wurden besonders im Jahre 1742 von Robins mit Flintenkugeln, 1788 und 1789 von Hutton mit Kanonenkugeln kleinen Kalibers, endlich 1839 und 1840 zu Metz mit Kanonenkugeln grösseren Kalibers (zumeist solchen von 0,12 und 0,15 Mtr. Durchmesser) angestellt. Aus diesen letzteren leitete Didion den Ausdruck

$$P = 0{,}027\,(1 + 0{,}0023\,v)\,Av^2 \text{ Kgr.}$$

ab bei Voraussetzung eines mittleren specifischen Gewichtes der Luft. Wird dieses, entsprechend einem Barometerstand von 0,76 Mtr. und einer Temperatur von 15° C., zu

$$\gamma = 1{,}293\,\frac{273}{288} = 1{,}225$$

angenommen, so ergiebt sich

$$\vartheta = \frac{0{,}027 \,.\, 2 \,.\, 9{,}81}{1{,}225}\,(1 + 0{,}0023\,v) = 0{,}43\,(1 + 0{,}0023\,v)$$

Die Resultate der Hutton'schen Versuche weichen davon nur wenig ab, und lassen überhaupt die Durchmesser der Geschosse bis zu den verwendeten Grössen derselben keinen erheblichen Einfluss auf den Widerstandscoefficienten ϑ erkennen.

DRITTER ABSCHNITT.

Heizung.

§. 157. Uebersicht der Aufgaben.

Unter Heizung wird hier allgemein die zweckmässig geregelte Wärmemittheilung an einen zu erwärmenden Körper verstanden, die speciellere Ausführung der Aufgabe jedoch (insbesondere unter Ausschluss metallurgischer und anderer chemisch-technologischer Erhitzungszwecke) auf den Fall beschränkt, dass der zu erwärmende und eventuell in seiner Aggregatform zu verändernde Körper eine (tropfbare oder luftförmige) Flüssigkeit ist, sei es, dass diese Erwärmung letzter Zweck ist oder in der Absicht geschieht, damit die Flüssigkeit die ihr mitgetheilte Wärme weiterhin an eine andere (z. B. an einem für die unmittelbare Erwärmung unpassenden Orte befindliche) Flüssigkeit übertrage, oder damit sie als erwärmte Arbeitsflüssigkeit einer calorischen Kraftmaschine durch ihre Zustandsänderung die Verwandlung von Wärme in mechanische Arbeit vermittle.

Im Allgemeinen ist die zu übertragende Wärme vorher durch den Verbrennungsprocess eines Brennstoffes erst zu produciren. Die in dem Verbrennungsraum (auf dem Herde) entwickelten heissen luftförmigen Verbrennungsproducte können dann unter Umständen mit dem zu erwärmenden Körper in unmittelbare Berührung kommen; in den hier vorzugsweise vorausgesetzten Fällen von zu erwärmenden und eventuell zu verdampfenden Flüssigkeiten bleiben sie aber gewöhnlich von diesen durch eine feste Wand (Heizwand) getrennt, deren Fläche die Heizfläche genannt wird, indem die Heizgase, d. h. die luftförmigen Verbrennungsproducte, welche trotz ihres Gehaltes an Wasserdampf doch meist ohne wesentlichen Fehler als den einfachen Gasgesetzen unterworfen betrachtet werden können, einen Canal (Heizcanal) oder mehrfach getheilt ein System solcher röhrenförmiger, d. h. ringsum begrenzter Canäle durchströmen. Am Ende derselben dürfen die Heizgase im Allgemeinen nicht unmittelbar in die Atmo-

sphäre entweichen theils wegen ihrer schädlichen oder belästigenden Einflüsse auf die Umgebung, theils weil auch zur Vermittelung einer dauernd ausreichenden Strömung trotz den unvermeidlichen Widerständen im Herde und im Heizcanal und zur Sicherung der zur Verbrennung nöthigen Zuströmung äusserer Luft zum Herde ihre Sammlung und Aufwärtsleitung in einem weiteren Canal, der Esse (Schornstein, Kamin) erforderlich ist.

Hiernach zerfällt die folgende Untersuchung in 3 Theile, betreffend

1) die Verbrennung der technisch verwendbaren Brennstoffe und die dadurch bedingte Beschaffenheit und Bedienung des Herdes,

2) die Wärmetransmission durch feste Wände und die unter gegebenen Umständen erforderliche Grösse einer Heizfläche,

3) die Bewegung der Heizgase in dem gesammten Canalsystem, insbesondere die Zugwirkung der Esse.

Hier sollen diese Gesichtspunkte einstweilen nur im Allgemeinen erörtert werden vorbehaltlich der weiteren Ausführung und Anwendung in besonderen Fällen, die im 3ten und 4ten Bande dieses Werkes zu besprechen sein werden. Die Gesetze der Verbrennung gelten übrigens im Wesentlichen gleicher Weise auch in solchen Fällen, deren Besprechung nicht im Zweck dieses Werkes liegt, und die Gesetze der Wärmetransmission sind ebenso wie behufs der Erwärmung einer Flüssigkeit, natürlich auch zum Zweck ihrer Abkühlung oder in solchen Fällen anwendbar, wo es sich umgekehrt darum handelt, die Erwärmung oder Abkühlung einer Flüssigkeit unter gegebenen Umständen möglichst zu verzögern.

A. Verbrennung.

§. 158. Brennstoffe.

Die technisch verwendeten Brennstoffe stammen fast ausschliesslich von der Holzfaser (Cellulose, einem sogenannten Kohlenhydrat, d. h. einer solchen Verbindung von Kohlenstoff mit Wasserstoff und Sauerstoff, dass die letzteren in demselben Gewichtsverhältnisse wie im Wasser darin enthalten sind). Sie sind entweder Holz (mit unveränderter Holzfaser als wirksamem Bestandtheile), oder natürliche Vermoderungsproducte der Holzfaser: Torf, Braunkohle, Steinkohle (fossile Brennstoffe), oder künstliche Verkohlungsproducte insbesondere von Holz und Steinkohle: Holzkohle und Coks, oder endlich gasförmige Producte der Destillation u.

unvollkommenen Verbrennung jener festen Brennstoffe: Leuchtgas, Gichtgase, Generatorgase.

I. Die festen Brennstoffe enthalten ausser den der Holzfaser entstammenden organischen Bestandtheilen, nämlich Kohlenstoff (C), Wasserstoff (H) und Sauerstoff (O), in der Regel noch geringe Mengen Stickstoff (bei den Analysen gewöhnlich dem Sauerstoff zugerechnet) und Schwefel, ferner wechselnde Mengen hygroskopischen, d. h. solchen Wassers (W), welches durch Erwärmung etwas über 100^0 ohne weitere Zersetzung des Brennstoffes ausgetrieben werden kann, und von erdigen Bestandtheilen, in der Folge als Asche (A) bezeichnet, indem sie als solche bei der Verbrennung zurückbleiben. Die hier beigesetzten Buchstaben dienen im Folgenden zur kürzeren Bezeichnung dieser Bestandtheile im Allgemeinen, unbeschadet der specielleren Bedeutungen von C, H, O in chemischen Formeln als zugleich bestimmter verhältnissmässiger Gewichtsmengen (Atomgewichte: $C = 12$, $H = 1$, $O = 16$) der betreffenden Elemente.

1. Holz. Der Aschengehalt, etwas wachsend mit dem Alter und im Zweigholze grösser, als im Stammholze, beträgt im Mittel etwa 1,5 Procent. Der Gehalt an hygroskopischem Wasser variirt mit der Art und dem Alter des Holzes, mit der Feuchtigkeit des Bodens und mit der Jahreszeit; bei im Winter frisch gefälltem Holze beträgt er ungefähr 40 Procent, nimmt aber durch Austrocknen an der Luft (etwa in Jahresfrist) um die Hälfte ab. Im Durchschnitt kann die Zusammensetzung des lufttrockenen Holzes angenommen werden zu:

$$0{,}39\,C;\quad 0{,}40\,H_2O;\quad 0{,}015\,A;\quad 0{,}195\,W,$$

unter H_2O den Wasserstoff und Sauerstoff zusammen genommen verstanden, da sie im Holze in demselben Gewichtsverhältnisse 1 : 8 wie im Wasser enthalten sind und zusammen als chemisches Wasser aufgefasst und bezeichnet werden können. —

Die allmählige Zersetzung des Holzes bei beschränktem Luftzutritte, durch welche, begünstigt durch hohe Temperatur und starken Druck, die fossilen Brennstoffe, nämlich in chronologischer Folge Torf, Braunkohle und Steinkohle entstanden zu denken sind, erfolgte (und erfolgt in geringerem Maasse noch jetzt) unter Entwickelung verschiedener zumeist gasförmiger Verbindungen der organischen Elementarbestandtheile, und zwar verhältnissmässig am meisten des Sauerstoffs, am wenigsten des Kohlenstoffs, so dass die fossilen Brennstoffe je älter desto reicher an Kohlenstoff und desto ärmer an Sauerstoff sind, während die verhältnissmässige Menge des Wasserstoffs sowohl im Ganzen wie insbesondere auch des freien Wasserstoffs zuerst zunimmt und nur gegen die letzten Stadien

des Vermoderungsprocesses hin wieder abnimmt. Dabei ist unter freiem Wasserstoff derjenige verstanden, welcher mehr in dem Brennstoff enthalten ist, als seinem Gewicht nach mit dem gleichzeitig noch vorhandenen Sauerstoff zu Wasser verbunden sein könnte; der übrige Theil des Wasserstoffs wird mit dem Sauerstoff als wirklich zu Wasser verbunden gedacht und dieses als chemisches Wasser (H_2O) im Gegensatze zu dem hygroskopischen Wasser (W) bezeichnet.

2. Torf. Während die organische Masse des Holzes zu ungefähr gleichen Theilen aus Kohlenstoff und chemischem Wasser ohne freien Wasserstoff besteht, ist ihre verhältnissmässige Zusammensetzung bei Torf im Mittel etwa:

$$C : H_2O : H = 54 : 44{,}5 : 1{,}5.$$

Die Aschenmenge ist sehr verschieden (im Allgemeinen um so kleiner, aus je grösserer Tiefe der Torf gewonnen wurde) und kann bei überhaupt noch verwerthbaren Sorten bis 30 Procent betragen. Frisch gestochen kann der Torf bis 80 Procent hygroskopisches Wasser enthalten, lufttrocken zwischen 15 und 35 Procent. Im Durchschnitt kann die Zusammensetzung des lufttrockenen Torfs zu

$$0{,}35\,C;\quad 0{,}01\,H;\quad 0{,}29\,H_2O;\quad 0{,}10\,A;\quad 0{,}25\,W$$

angenommen werden.

3. Die Braunkohle kommt in sehr verschiedenen Varietäten vor, und es ist die verhältnissmässige Zusammensetzung der organischen Masse

	C	H_2O	H
bei fasriger Braunkohle etwa	60 :	39 :	1
„ erdiger „ „	70 :	28 :	2
„ muschliger „ „	75 :	22 :	3

Der Aschengehalt beträgt 5—10 Procent, der Gehalt an hygroskopischem Wasser im frischen Zustande bis 50, im lufttrockenen etwa 20 Procent. Im Mittel mag die Zusammensetzung der lufttrockenen Braunkohle angenommen werden zu:

$$0{,}50\,C;\quad 0{,}015\,H;\quad 0{,}205\,H_2O;\quad 0{,}08\,A;\quad 0{,}20\,W.$$

In ihren Eigenschaften nähert sich die kohlenstoffreichere muschlige Braunkohle (Pechkohle, Glanzkohle) zuweilen so sehr der Steinkohle, dass zur Unterscheidung nur das geologische Vorkommen maassgebend ist, bezüglich auf welches eine der Tertiärformation angehörige, also der Kreidegruppe auflagernde (jüngere) Kohle als Braunkohle bezeichnet wird.

4. Die Steinkohlen können zunächst in langflammige und kurzflammige unterschieden werden; die ersteren, mit langer Flamme brennend

und bei der Destillation viel Gas entwickelnd, sind geologisch jünger, ärmer an Kohlenstoff, reicher an Wasser- und Sauerstoff, als die letzteren. Ferner unterscheidet man backende, sinternde und magere Kohlen hinsichtlich des Verhaltens in der Hitze, jenachdem nämlich dabei die einzelnen Stücke zu einer festen Masse zusammenbacken oder einen loseren Zusammenhang erhalten oder ganz unverbunden bleiben. Diese sämmtlichen Sorten finden sich sowohl bei den langflammigen als bei den kurzflammigen Steinkohlen vertreten, und zwar zeigt sich, dass die kohlenstoffärmsten jüngsten langflammigen und die kohlenstoffreichsten ältesten kurzflammigen Kohlen mager sind. Für das Verhalten der Zwischenglieder ist das relative Alter und die chemische Zusammensetzung weniger deutlich maassgebend; im Allgemeinen aber liegen in beiden Hauptgruppen (der lang- und kurzflammigen Kohlen) die sinternden Kohlen dem Alter nach zwischen den mageren und den backenden Varietäten, so dass letztere den Uebergang aus der einen in die andere Gruppe vermitteln. Mit Rücksicht auf diese Erwägungen lässt sich nach R. Peters* die folgende Classification aufstellen, geordnet nach zunehmendem Alter mit Beifügung der französischen Benennungen nach Regnault:

1) Magere langflammige Steinkohlen, magere Flammkohlen (houilles seches à longue flamme).

2) Sinternde langflammige Steinkohlen, sinternde Flammkohlen (houilles flénu).

3) Backende langflammige Steinkohlen, backende Flammkohlen (houilles grasses dures ou à longue flamme).

4) Backende kurzflammige Steinkohlen, Fettkohlen (houilles grasses maréchales).

5) Sinternde kurzflammige Steinkohlen, Esskohlen (houilles demi-grasses).

6) Magere kurzflammige Steinkohlen, Anthracitkohlen (houilles maigres ou anthraciteuses).

Diese Uebersicht der Varietäten eigentlicher Steinkohle wäre noch zu ergänzen am Anfange durch die den geologischen Uebergang zur Braunkohle bildende sogenannte Schwarzkohle, am Ende durch den kurzweg sogenannten Anthracit als ältestes und kohlenstoffreichstes Zersetzungsproduct der Holzfaser. Die sinternden Flammkohlen sind zur Leuchtgasgewinnung, die backenden Flammkohlen, Fettkohlen und Esskohlen zu

* Ueber den Heizeffect der Brennmaterialien. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1859, S. 68.

Dampfkessel- und anderen Feuerungen, die Fettkohlen zugleich als Schmiedekohlen und zur Coksbereitung vorzugsweise geeignet.

R. Peters hat auf Grund vieler Analysen von Baer, Liebig, Marsilly, Playfair, Regnault, Richardson, Stein und Truran die mittlere Zusammensetzung der organischen Substanz obiger 6 Steinkohlen-Varietäten ermittelt. Wenn die von ihm angegebenen Gewichtsmengen Sauerstoff (incl. Stickstoff) im Verhältnisse 9 : 8 auf Kosten der Wasserstoffmengen vergrössert als chemisches Wasser und die restirenden Wasserstoffmengen als freier Wasserstoff gerechnet werden, ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

Varietät.	Zahl der Analysen.	C	H_2O	H
Magere Flammkohle	28	80,9	15,6	3,5
Sinternde "	64	83,4	12,7	3,9
Backende "	61	84,8	11,3	3,9
Fettkohle	41	89,0	6,6	4,4
Esskohle	38	90,7	5,3	4,0
Anthracitkohle	23	91,9	4,6	3,5
Mittel:		86,8	9,3	3,9

Die Fettkohle enthält am meisten freien, die sinternde Flammkohle am meisten Wasserstoff überhaupt. Da ausserdem die Steinkohle zwischen 2 und 6 Procent Asche und etwa 3 Procent hygroskopisches Wasser zu enthalten pflegt, so mag bei Abstraction von ihrem nur etwa 1 Procent betragenden Schwefelgehalt den weiteren Rechnungen die folgende durchschnittliche Zusammensetzung zu Grunde gelegt werden:

$$0{,}80\ C;\quad 0{,}04\ H;\quad 0{,}09\ H_2O;\quad 0{,}04\ A;\quad 0{,}03\ W.$$

5. Die Holzkohle wird durch Verkohlung des Holzes in Meilern zu 20 bis 25 Gewichtsprocenten desselben gewonnen, so dass der Aschengehalt des Productes entsprechend grösser sein muss, als der des Holzes. Je länger die Verkohlung dauert und bei je höherer Temperatur sie stattfindet, desto vollständiger werden Wasser- und Sauerstoff (theilweise mit Kohlenstoff insbesondere zu Holzessig und Theer verbunden) ausgetrieben. Auch bei der Aufbewahrung unter Dach kann die Holzkohle bis 15 Procent Wasser aus der feuchten Luft aufnehmen; in mässig feuchtem Zustande ist ihre mittlere Zusammensetzung etwa:

$$0{,}85\ C;\quad 0{,}01\ H;\quad 0{,}03\ H_2O;\quad 0{,}05\ A;\quad 0{,}06\ W.$$

6. Die Coks, durch unvollkommene Verbrennung bei beschränktem Luftzutritt oder durch Destillation ohne Luftzutritt aus backender oder

sinternder Steinkohle zu 60—75 Gewichtsprocenten derselben gewonnen, bestehen in ihrer organischen Masse aus fast reinem Kohlenstoff; auch wird der Schwefelgehalt der Steinkohle theils durch den Vercokungsprocess selbst, theils durch das Löschen der glühenden Coks mit Wasser in der Hauptsache ausgetrieben. Ihre durchschnittliche Zusammensetzung ist:

$$0{,}87\ C;\quad 0{,}005\ H;\quad 0{,}015\ H_2O;\quad 0{,}06\ A;\quad 0{,}05\ W.$$

Auf andere als die besprochenen vorzugsweise gebräuchlichen festen Brennstoffe, die Verkohlungsproducte von Torf und Braunkohle und verschiedenartige, durch Pressung mit oder ohne Bindemittel aus an und für sich zu den betreffenden Anwendungen nicht hinlänglich compacten brennbaren Stoffen hergestellte Producte sei hier nur im Allgemeinen hingewiesen.

II. Die gasförmigen Brennstoffe enthalten in der Regel freien Wasserstoff, Sumpfgas (Methylwasserstoff, CH_4), ölbildendes Gas (Acthylen, C_2H_4), Kohlenoxydgas (CO), Kohlensäure (CO_2), Stickstoffgas (N), eventuell auch noch andere Kohlenwasserstoffverbindungen, als die zwei genannten, insbesondere die dem Aethylen polymeren: Propylen (C_3H_6) und Butylen (C_4H_8), endlich kleine Mengen Schwefelwasserstoff und Schwefelkohlenstoff.

1) Die Zusammensetzung des Steinkohlen-Leuchtgases ist sehr schwankend je nach der verwendeten Kohlensorte und der Dauer des Destillationsprocesses; im Durchschnitt mag sie angenommen werden zu:

$$0{,}05\ H;\quad 0{,}54\ CH_4;\quad 0{,}10\ C_2H_4;\quad 0{,}08\ C_4H_8;\quad 0{,}15\ CO;\quad 0{,}08\ N,$$

immer in Gewichtstheilen pro 1 Kgr. verstanden.

2) Die Zusammensetzung von Hochofen-Gichtgasen ergab sich (abgerundet nach Scheerer) wie folgt:

	H	CH_4	C_2H_4	CO	CO_2	N
Gichtgase von Steinkohlen:	0,01	0,04	0,02	0,22	0,15	0,56
„ Holzkohlen:	—	0,01	—	0,30	0,06	0,63
„ Coks:	—	—	—	0,35	0,01	0,64

3) Generatorgase, durch unvollkommene Verbrennung fester Brennstoffe (namentlich solcher von geringer Qualität) in besonderen Oefen (Generatoren) bei beschränktem Luftzutritt entstanden, zeigten sich (abgerundet nach Ebelmen) von folgender Zusammensetzung:

	H	CO	CO_2	N
Generatorgase aus Holz:	0,01	0,34	0,12	0,53
„ Torf:	0,01	0,22	0,14	0,63
„ Holzkohle:	—	0,34	0,01	0,65
„ Coks:	—	0,34	0,01	0,65

§. 159. Heizeffect der Brennstoffe.

Die Verbrennung eines Brennstoffes heisst vollkommen, wenn dabei seine brennbaren (mit Sauerstoff sich verbindenden) Elementarbestandtheile Kohlenstoff und Wasserstoff vollkommen zu Kohlensäure und Wasser verbrennen. Unter dem Heizeffect K eines Brennstoffes wird die Wärmemenge verstanden, welche bei vollkommener Verbrennung von 1 Kgr. desselben frei wird, d. h. als freie Wärme in den (mit Ausnahme der Asche luftförmigen) Verbrennungsproducten enthalten ist.

Zur Prüfung des Heizeffects sind theils technische Versuche in grossem, theils physikalische in kleinerem Maassstabe angestellt worden. Erstere haben zwar einen hohen wirthschaftlichen und technischen Werth, lehren aber doch unmittelbar nur den Theil des Heizeffects kennen, der durch die Verbrennung eines gewissen Brennstoffes in einem bestimmten Heizapparat unter gewissen Umständen (insbesondere z. B. zur Verdampfung von Wasser in einer Dampfkesselanlage von gewisser Art) technisch nutzbar gemacht werden kann. Zur Bestimmung des vollen Heizeffects, unvermindert durch die von den Besonderheiten der Heizanlage und der Feuerungsmethode abhängigen Wärmeverluste, dienen Verbrennungsversuche in einem Calorimeter verbunden mit Analysirung der Verbrennungsproducte, wie solche namentlich von Favre und Silbermann in ausgedehnter und sorgfältiger Weise ausgeführt wurden. Weil aber durch solche Versuche doch nicht die Heizeffecte der vielen Varietäten zusammengesetzter Brennstoffe von variabler Zusammensetzung speciell ermittelt werden können, so haben auch sie besonders nur insofern technische Wichtigkeit, als sie die Heizeffecte der entfernteren und näheren brennbaren Bestandtheile zusammengesetzter Brennstoffe und (in Verbindung mit anderweitigen Versuchen) die Gesetze kennen lehren, vermittels welcher jene zur Berechnung des Heizeffects irgend eines Brennstoffes dienen können, dessen chemische Zusammensetzung bekannt ist oder als mittlere für eine gewisse Varietät angenommen wird. Diese erfahrungsmässig constatirten allgemeinen Gesetze (bei Voraussetzung eines beständig gleichen äusseren Drucks = dem atmosphärischen Luftdruck) sind namentlich folgende:

1) Die Wärme, welche durch die chemische Verbindung verschiedener Stoffe entwickelt wird, bleibt die gleiche, auf welchem Wege, nämlich durch was für Zwischenprocesse die Verbindung zu Stande kommen mag.

2) Bei der Zerlegung einer chemischen Verbindung wird dieselbe Wärmemenge gebunden, welche bei ihrer Bildung frei wird.

3) Die bei einer chemischen Verbindung frei werdende Wärme ist nicht nur durch diese Verbindung an und für sich, sondern auch durch die gleichzeitig etwa stattfindende Aenderung des Aggregatzustandes, insbesondere der Dichtigkeit und der Aggregatform, bedingt, überhaupt durch die Disgregationsänderung (§. 48), welche auch bei gegebener chemischer Zusammensetzung, d. h. bei bestimmter Gruppirung der Atome in den Molekülen mit einer veränderten Gruppirung der letzteren gegen einander verbunden sein kann.

4) Der Heizeffect eines zusammengesetzten Brennstoffes ist = der Summe der Wärmemengen, welche durch vollkommene Verbrennung seiner isolirt gedachten brennbaren Bestandtheile entwickelt werden, vermindert um die Wärme, welche zur Zerlegung der Verbindungen erfordert wird, in denen sich diese Bestandtheile mit einander und mit den nicht brennbaren Bestandtheilen im Brennstoffe befanden, und endlich vermindert um diejenige Wärme, welche zu etwaigen Aenderungen des Aggregatzustandes verbraucht wird.

Favre und Silbermann erhielten u. A. durch vollkommene Verbrennung von je 1 Kgr. der folgenden Substanzen die daneben stehenden Wärmemengen:

Kohlenstoff	8080
Kohlenoxydgas (CO)	2403
Wasserstoffgas	34462
Sumpfgas (CH_4)	13063
Oelbildendes Gas (C_2H_4) . .	11858

Bei Wasserstoff und den Wasserstoffverbindungen sind diese Zahlen nicht die Heizeffecte im oben erklärten Sinne, weil Favre und Silbermann die im Schlangenrohr des Calorimeters entweichenden Verbrennungsgase bis zu einer so geringen Temperatur sich abkühlen liessen, dass ihr Wasserdampf fast ganz zu Wasser condensirt wurde und somit auch die entsprechende Verdampfungswärme an das Wasser im Calorimeter abgab. Letztere ist also in Abzug zu bringen, und zwar pro 1 Kgr. Wasser entsprechend der Formel

$$r = 607 - 0,708\, t \quad (§. 27, Gl. 6)$$

für diejenige Temperatur t, welche die verbrannten Substanzen und der zu ihrer Verbrennung (statt atmosphärischer Luft) verwendete Sauerstoff eventuell als Mischungstemperatur vor der Verbrennung hatten, sofern der Heizeffect näher als die Wärme definirt wird, welche die Verbrennungs-

producte verlören, wenn sie bei constanter atmosphärischer Pressung und unveränderter Aggregatform (die Möglichkeit vorausgesetzt) bis zur Anfangstemperatur abgekühlt würden. Mit Rücksicht auf die den Versuchswerthen anhaftenden wahrscheinlichen Fehler genügt es, für eine mittlere Lufttemperatur t in runder Zahl $r = 600$ zu setzen, und da 1 Kgr. H bei der Verbrennung 9 Kgr. H_2O liefert, in 1 Kgr. CH_4 und C_2H_4 aber beziehungsweise $^1/_4$ und $^1/_7$ Kgr. H enthalten sind, ergeben sich die corrigirten Heizeffecte K

$$\text{des Wasserstoffs} = 34462 - 9 . 600 = 29062,$$

$$\text{des Sumpfgases} = 13063 - \frac{9}{4} . 600 = 11713,$$

$$\text{des ölbildenden Gases} = 11858 - \frac{9}{7} . 600 = 11087.$$

Für die Kohlenwasserstoffverbindung C_5H_{10} fanden Favre und Silbermann die Zahl 11491, entsprechend dem Heizwerth

$$11491 - \frac{9}{7} . 600 = 10720.$$

Auch für andere Verbindungen der Gruppe C_nH_{2n} mit noch grösseren Werthen von n ergaben sich mit wachsendem n abnehmende Heizeffecte, erklärlich durch den mit n wachsenden Wärmeaufwand zur Zerlegung dieser Verbindungen, und es lässt sich danach annehmen, dass der Heizeffect des im Leuchtgase vorkommenden Butylens (C_4H_8), zwischen den Heizeffecten 11087 von C_2H_4 und 10720 von C_5H_{10} liegend, nicht viel von

$$\frac{1}{3} . 11087 + \frac{2}{3} . 10720 = 10842$$

verschieden sein werde. Den weiteren Rechnungen sollen als Heizeffecte der brennbaren Bestandtheile der im vorigen §. besprochenen Brennstoffe (vorbehaltlich einer näheren Bestimmung über den Heizeffect des Kohlenstoffs) folgende etwas abgerundete Zahlen zu Grunde gelegt werden:

		K
Kohlenoxydgas	CO	2400
Wasserstoffgas	H	29060
Sumpfgas	CH_4	11710
Oelbildendes Gas	C_2H_4	11090
Butylen	C_4H_8	10840

In Betreff des Kohlenstoffs ist es noch von Interesse, die Wärme $= i$ zu kennen, welche 1 Kgr. desselben bei der Verbrennung zu Kohlenoxyd-

gas entwickelt; in Erwägung aber, dass dabei aus 1 Kgr. Kohlenstoff $\frac{12+16}{12} = \frac{7}{3}$ Kgr. Kohlenoxyd entstehen, ergiebt sich aus obigen Zahlen mit Rücksicht auf das allgemeine Gesetz 1):

$$k + \frac{7}{3} . 2400 = 8080; \quad k = 2480 \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Uebrigens ist es wesentlich zu bemerken, dass diese Wärmemengen $K = 8080$ und $k = 2480$, die als Resultat der Verbrennung von 1 Kgr. Kohlenstoff zu Kohlensäure resp. zu Kohlenoxydgas gefunden wurden, für festen Kohlenstoff gelten und (nach dem 3ten der oben angeführten Gesetze) um den Betrag der zur Verflüchtigung desselben nöthigen Wärme y kleiner sind als diejenigen Wärmemengen, die durch die chemische Verbindung an und für sich entwickelt werden. Setzt man die letzteren $= 2x$ und $= x$, da 1 Atom C sich im ersten Falle mit zwei, im zweiten nur mit einem Atom O verbindet, so hat man

$$8080 = 2x - y; \quad 2480 = x - y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und somit $\quad x = 5600, \; 2x = 11200, \; y = 3120.$

Es wäre also 11200 der Heizeffect des gasförmigen Kohlenstoffs, und da derselbe z. B. im Sumpfgase und im ölbildenden Gase schon gasförmig enthalten ist, im Gewichtsverhältnisse 3 : 1 resp. 6 : 1 mit Wasserstoff verbunden, so müssten, wenn mit (CH_4) und (C_2H_4) die zur Zerlegung von je 1 Kgr. dieser gasförmigen Verbindungen erforderlichen Wärmemengen bezeichnet werden, die Heizeffecte derselben

$$= \frac{3}{4} . 11200 + \frac{1}{4} . 29060 - (CH_4) = 15665 - (CH_4)$$

$$\text{und} = \frac{6}{7} . 11200 + \frac{1}{7} . 29060 - (C_2H_4) = 13751 - (C_2H_4)$$

sein. Durch Gleichsetzung derselben mit den experimentellen Zahlen 11710 und 11090 ergiebt sich:

$$(CH_4) = 3955, \quad (C_2H_4) = 2661$$

und daraus mit Rücksicht auf das Gesetz 2) die Wärmemenge, welche durch chemische Verbindung von 1 Kgr. gasförmigen Kohlenstoffs mit Wasserstoff zu CH_4 resp. C_2H_4 frei wird:

$$\frac{4}{3} . 3955 = 5273 \quad \text{resp.} \quad \frac{7}{6} . 2661 = 3104.$$

Dass die zweite dieser Zahlen mehr, als die Hälfte der ersten beträgt, obschon in der Verbindung C_2H_4 je ein Atom C nur mit 2 statt mit 4 Atomen H verbunden ist, wird dem Umstande zuzuschreiben sein, dass in dem

Molekül C_2H_4 zwei Atomgruppen CH_2 noch weiter unter sich verbunden sind und dass dadurch eine weitere Wärmeentwickelung bedingt wird. Diese letztere secundäre Verbindungsweise, welche in der theoretischen Chemie als durch je 2 unter sich zusammenhängende Atome C vermittelt betrachtet zu werden pflegt, findet in den Kohlenwasserstoffen der Gruppe C_nH_{2n} um so vielfältiger statt, und ist also der Wärmeverbrauch zur Zerlegung einer solchen Verbindung um so grösser, ihr Heizeffect in Uebereinstimmung mit der Erfahrung um so kleiner, je grösser n ist; die gefundenen Differenzen sind indessen nicht gross genug im Vergleich mit den diesen calorimetrischen Bestimmungen anhaftenden wahrscheinlichen Fehlern, als dass daraus auch in quantitativer Beziehung zuverlässige weitere Schlüsse schon jetzt gezogen werden könnten.

Schliesslich ist es nöthig hervorzuheben, dass die hier als Heizeffect des festen Kohlenstoffs bisher gebrauchte Zahl $K = 8080$ sich auf reine Holzkohle bezieht, dass sie aber für festen Kohlenstoff von anderer Beschaffenheit etwas anders, insbesondere kleiner bei grösserer Dichtigkeit gefunden wurde, von Favre und Silbermann z. B. für

Holzkohle	= 8080	natürlichen Graphit	= 7811
Gasretortenkohle	= 8047	Graphit vom Hochofen	= 7785
Zuckerkohle	= 8040	Diamant	= 7770

Die Differenzen können natürlich nur von der verschiedenen Verflüchtigungswärme y herrühren, die für den dichtesten Kohlenstoff am grössten ist. Wenn man in der That in den Gleichungen (1) und (2) allgemein K statt 8080 setzt, so ergiebt sich

$$k = K - \frac{7}{3} . 2400 = K - 5600$$

$$K = 2x - y; \quad k = K - 5600 = x - y$$

und daraus $x = 5600$ wie vorhin, dagegen

$$y = 11200 - K,$$

z. B. für Diamant $y = 3430$. Da es ungewiss ist, in welchem Dichtigkeitszustande sich der Kohlenstoff in irgend einem zusammengesetzten festen Brennstoffe befindet, so mag, um sicherer zu gehen, bei den folgenden approximativen Rechnungen der Heizeffect des festen Kohlenstoffs mit dem mittleren Werthe $K = 8000$ stets zu Grunde gelegt werden. Die durch die Verbrennung von 1 Kgr. desselben zu Kohlenoxydgas frei werdende Wärme ist dann: $k = 2400 =$ dem Heizeffect des Kohlenoxydgases $= 0{,}3\ K$, und die Vergasungswärme von 1 Kgr. festen Kohlenstoffs: $y = 3200 = 0{,}4\ K$. —

Die Anwendung des Gesetzes unter 4) zur Berechnung des Heizeffects eines festen Brennstoffes von gegebener Elementarzusammensetzung mit Hülfe der im Vorhergehenden festgestellten Heizeffecte der brennbaren Bestandtheile ist nun freilich insofern unsicher, als es meistens ungewiss ist, auf welche Weise die chemischen Elemente mit einander verbunden in dem festen Brennstoffe vorkommen. Die ungünstigste Annahme, welche in dieser Beziehung gemacht werden kann, besteht darin, dass aller Sauerstoff an Wasserstoff gebunden sei als chemisches Wasser nach der Bezeichnung im vorigen §., indem dann dieses Wasser in Betreff des Heizeffects nicht nur ohne Nutzen, sondern schädlich ist, nämlich eine gewisse Wärmemenge zu seiner Verdampfung in Anspruch nimmt, und zwar nicht nur in runder Zahl 600 Cal. wie das flüssig vorhandene hygroskopische, sondern zugleich die Schmelzwärme festen Wassers, also im Ganzen etwa 680 Cal. pro 1 Kgr. Weil endlich auch nicht anzunehmen ist, dass der im vorigen §. so genannte freie Wasserstoff sich gasförmig in einem festen Brennstoffe befindet, müsste streng genommen entweder sein Heizeffect mit einer kleineren Zahl in Rechnung gebracht werden, als für Wasserstoffgas (29060), oder eine entsprechende Vergasungswärme in Abzug gebracht werden; in Ermangelung der dazu nöthigen Anhaltspunkte ist aber hiervon um so eher zu abstrahiren, als dieser freie Wasserstoff stets nur in geringer Menge vorhanden und in dem chemischen Wasser zu Ungunsten des Heizeffects auch die kleine Menge des Stickstoffs gerade so einbegriffen ist, als ob sie eine gleiche Gewichtsmenge Sauerstoff wäre. Indem schliesslich noch von der jedenfalls geringfügigen Wärmemenge abgesehen wird, die durch eine chemische Veränderung der Aschenbestandtheile entwickelt oder verbraucht werden kann, mag somit der **Heizeffect eines festen Brennstoffes**, der in 1 Kgr.

C Kgr. Kohlenstoff,
H „ freien Wasserstoff,
H_2O „ chemisches Wasser,
W „ hygroskopisches Wasser

ausser A Kgr. Asche enthält, nach der Formel

$$K = 8000\,C + 29060\,H - 680\,H_2O - 600\,W \quad \ldots\ldots (3)$$

berechnet werden.* Auf Grund der im vorigen §. angegebenen und hier

* In Ermangelung wissenschaftlicher Bestimmungen von K für technisch benutzte feste Brennstoffe von bekannter Zusammensetzung mögen zur Prüfung dieser Formel die calorimetrischen Versuche von **Favre** und **Silbermann** mit anderweitigen, aus C, H und O bestehenden festen brennbaren Substanzen, nämlich mit Wachs ($C_{19}\,H_{32}\,O$) und Stearinsäure ($C_{18}\,H_{36}\,O_2$) benutzt werden.

reproducirten durchschnittlichen Zusammensetzungen der wichtigsten festen Brennstoffe ergeben sich hiernach beispielsweise die in der folgenden Tabelle enthaltenen Werthe von K.

Brennstoff.	C	H	H_2O	W	A	K
Lufttrockenes Holz . . .	0,39	—	0,40	0,195	0,015	2731
Lufttrockener Torf . . .	0,35	0,01	0,29	0,25	0,10	2743
Lufttrock. Braunkohle .	0,50	0,015	0,205	0,20	0,08	4176
Steinkohle	0,80	0,04	0,09	0,03	0,04	7483
Holzkohle	0,85	0,01	0,03	0,06	0,05	7034
Coks	0,87	0,005	0,015	0,05	0,06	7065

Der Heizeffect eines gasförmigen Brennstoffs kann mit grösserer Sicherheit berechnet werden, wenn seine Zusammensetzung nicht nur aus den elementaren (entfernteren), sondern aus den näheren Bestandtheilen bekannt ist. Enthält er in 1 Kgr. H Kgr. Wasserstoffgas, CH_4 Kgr. Sumpfgas, C_2H_4 Kgr. ölbildendes Gas, C_4H_8 Kgr. Butylen, CO Kgr. Kohlenoxydgas ausser CO_2 Kgr. Kohlensäure und N Kgr. Stickstoffgas, so ist sein Heizeffect

$$K = 29060\, H + 11710\, CH_4 + 11090\, C_2H_4 + 10840\, C_4H_8 + 2400\, CO \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4.$$

und ergeben sich hiernach z. B. auf Grund der im vorigen §. angeführten Analysen die folgenden Resultate.

Gasgemenge.	H	CH_4	C_2H_4	C_4H_8	CO	CO_2	N	K
Steinkohlen-Leuchtgas . .	0,05	0,54	0,10	0,08	0,15	—	0,08	1011[illegible]
Gichtgase von Steinkohle .	0,01	0,04	0,02	—	0,22	0,15	0,56	[illegible]
„ „ Holzkohle .	—	0,01	—	—	0,30	0,06	0,63	[illegible]
„ „ Coks	—	—	—	—	0,35	0,01	0,64	[illegible]
Generatorgase von Holz . .	0,01	—	—	—	0,34	0,12	0,53	11[illegible]
„ „ Torf . .	0,01	—	—	—	0,22	0,14	0,63	[illegible]
„ „ Holzkohle	—	—	—	—	0,34	0,01	0,65	[illegible]
„ „ Coks . .	—	—	—	—	0,34	0,01	0,65	[illegible]

Wenn man auch bei ihnen den Sauerstoff zu vorliegendem Zweck als [illegible]sches Wasser[illegible] mit Wasserstoff verbunden betrachtet, so sind ihre Zusammensetzungen pro 1 Kgr.:

$$\text{Wachs:}\quad C = \frac{38}{46},\ H = \frac{5}{46},\ H_2O = \frac{3}{46}$$

$$\text{Stearinsäure:}\quad C = \frac{54}{71},\ H = \frac{8}{71},\ H_2O = \frac{9}{71}.$$

Da in den Verbrennungsproducten von je 1 Kgr. sich $\frac{24}{23}$ resp. $\frac{81}{71}$ Kgr. Wa[illegible]

§. 160. Luftbedarf und Producte der Verbrennung.

Wenn man, wie es zu vorliegendem Zweck unbedenklich geschehen kann, vom Wassergehalt und von den noch mehr nebensächlichen Bestandtheilen der atmosphärischen Luft absieht und dieselbe somit in 100 Gewichtstheilen als aus 23 Theilen Sauerstoff und 77 Theilen Stickstoff bestehend annimmt, so ist die zu vollkommener Verbrennung von 1 Kgr. eines Brennstoffes nöthige Luftmenge $= L$ Kgr. im Verhältnisse 100 : 23 grösser, als die dazu nöthige Sauerstoffmenge, letztere aber leicht aus der bekannten Zusammensetzung des Brennstoffes und aus den Atomgewichten des Kohlenstoffs = 12, des Wasserstoffs = 1 und des Sauerstoffs = 16 zu berechnen, indem danach 1 Kgr. Kohlenstoff und Wasserstoff beziehungsweise $\frac{8}{3}$ und 8 Kgr. Sauerstoff bedürfen, um zu Kohlensäure resp. zu Wasser zu verbrennen. Ebenso leicht findet man die Menge und Zusammensetzung der gasförmigen Verbrennungsproducte, nämlich die Gewichtsmengen Kohlensäure $= Ac$ Kgr., Wasser $= Aq$ Kgr. und Stickstoff $= N$ Kgr. (letzterer hauptsächlich von der ihres Sauerstoffs beraubten Luft herrührend), welche pro 1 Kgr. des Brennstoffs resultiren.

Insbesondere für einen festen Brennstoff, der in 1 Kgr. aus C Kgr. Kohlenstoff, H Kgr. freiem Wasserstoff, H_2O Kgr. chemischem Wasser, W Kgr. hygroskopischem Wasser und A Kgr. Asche besteht, ergiebt sich:

$$L = \frac{100}{23}\left(\frac{8}{3}\,C + 8\,H\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} Ac = \frac{11}{3}\,C;\quad Aq &= 9\,H + H_2O + W \\ N &= L + 1 - A - Ac - Aq \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2)$$

und für einen gasförmigen Brennstoff, in 1 Kgr. ausser Stickstoff enthaltend: H Kgr. Wasserstoffgas, CH_4 Kgr. Sumpfgas, C_2H_4 Kgr. ölbildendes Gas, C_4H_8 Kgr. Butylen, CO Kgr. Kohlenoxydgas und CO_2 Kgr. Kohlensäure,

---

befinden, ergeben sich aus den experimentell gefundenen Verbrennungswärmen 10496 und 9716 die reducirten Heizeffecte:

$$K = 10496 - \frac{24}{23}.600 = 9870 \text{ und } 9716 - \frac{81}{71}.600 = 9031$$

nicht sehr verschieden von $K = 9723$ und 9273 nach Gl. (3).

$$L = \frac{100}{23}\left[8\,H + 4\,CH_4 + \frac{24}{7}\,(C_2H_4 + C_4H_8) + \frac{4}{7}\,CO\right] \ldots\ldots 3.$$

$$\left.\begin{array}{l} Ac = \frac{11}{4}\,CH_4 + \frac{22}{7}\,(C_2H_4 + C_4H_8) + \frac{11}{7}\,CO + CO_2 \\ Aq = 9\,H + \frac{9}{4}\,CH_4 + \frac{9}{7}\,(C_2H_4 + C_4H_8) \ldots\ldots\ldots \\ N = L + 1 - Ac - Aq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots 4.$$

Die zur Verbrennung von 1 Kgr. besonders eines festen Brennstoffes thatsächlich verwendete Luftmenge ist in der Regel $> L$ bis $= 2\,L$ und darüber; wird sie allgemein $= mL$ gesetzt, so ist die Gewichtsmenge der gasförmigen Verbrennungsproducte von 1 Kgr. eines festen oder gasförmigen Brennstoffes:

$$G = mL + 1 - A \text{ resp. } G = mL + 1 \ldots\ldots\ldots 5$$
$$= (m-1)\,L + Ac + Aq + N.$$

In diesem Gemenge von überschüssiger Luft, Kohlensäure, Stickstoffgas und Wasserdampf pflegt letzterer nicht in solcher Menge vorhanden zu sein, dass dadurch der Gascharakter, also die Anwendbarkeit der dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze entsprechenden Zustandsgleichung $pv = RT$ erheblich beeinträchtigt würde. Um aber auf Grund derselben die Zustandsänderungen dieses Heizgasgemenges in dem gesammten Canalsystem zu untersuchen, ist die Kenntniss der Constanten R, bedingt durch die Dichtigkeit δ (bezogen auf diejenige von atmosphärischer Luft bei gleicher Pressung p und Temperatur T als Einheit), sowie die Kenntniss der specifischen Wärme des Gemenges erforderlich, welche, indem sie hier stets nur für constante Pressung verstanden in Betracht kommt, in der Folge einfach mit c ohne Index bezeichnet werden soll. Die Dichtigkeit δ ergiebt sich aus den Mengen und Dichtigkeiten der Bestandtheile:

$(m-1)\,L$	Kgr.	überschüssige Luft,	Dichtigkeit	$= 1$
Ac	„	Kohlensäure,	Dichtigkeit	$= 1{,}529$
Aq	„	Wasserdampf	„	$= 0{,}623$*
N	„	Stickstoffgas,	„	$= 0{,}971$

* Aus den Zustandsgleichungen der Luft und des ungesättigten Wasserdampfes (§. 39):

$$pv_0 = R_0T \text{ und } pv = R\,(T-P),$$

worin P eine Function der Pressung p ist, ergiebt sich die Dichtigkeit des Dampfes bezüglich auf Luft:

$$\frac{v_0}{v} = \frac{R_0}{R}\,\frac{T}{T-P}$$

$$\delta = \frac{G}{(m-1)\,L + \frac{Ac}{1{,}529} + \frac{Aq}{0{,}623} + \frac{N}{0{,}971}}, \text{ damit } R = \frac{R_0}{\delta} \quad . (6),$$

unter R_0 die mit Rücksicht auf ihren Feuchtigkeitsgehalt = 29,3 bis 29,4 zu setzende betreffende Constante für atmosphärische Luft verstanden (§. 17).

Die specifische Wärme c der Heizgase könnte ebenso leicht aus den specifischen Wärmen der Gemengtheile berechnet werden, wenn diese für die hier in Betracht kommenden hohen Temperaturen zuverlässig bekannt wären. Nun kann sie zwar mit hinlänglicher Sicherheit für Luft = 0,2375, für Stickstoffgas = 0,244 gesetzt werden; allein bei der Kohlensäure wächst sie erheblich mit der Temperatur, von 0,187 bei 0° bis 0,240 bei 200° (§. 37), und auch von der specifischen Wärme des Wasserdampfes, bei mässiger Ueberhitzung = 0,48, ist es fraglich, wie sie etwa bei viel höheren Temperaturen sich ändern mag. Unter diesen Umständen, und da die specifischen Wärmen von Luft, Stickstoffgas und Kohlensäure (bei höherer Temperatur) sämmtlich nicht viel, wenigstens nicht mehr von 0,24 verschieden sind, als die Unsicherheit der Uebertragung dieser Bestimmungen auf solche Temperaturen beträgt, welche die Versuchstemperaturen erheblich übertreffen, mag einfach

$$c = \frac{0{,}24\,(G - Aq) + 0{,}48\,Aq}{G} = 0{,}24\left(1 + \frac{Aq}{G}\right) \quad . . . (7)$$

gesetzt werden, wonach es nur der verhältnissmässige Wassergehalt der Heizgase ist, der ihre specifische Wärme mehr oder weniger > 0,24 macht. —

Vermittels dieser Formeln und bei Voraussetzung der in den beiden Tabellen zu Ende des vorigen §. angegebenen mittleren Zusammensetzungen sind die folgenden Resultate berechnet worden.

1) Luftmengen L, welche zur vollkommenen Verbrennung lufttrockener fester Brennstoffe pro 1 Kgr. nöthig sind; Menge und Beschaffenheit der gasförmigen Verbrennungsproducte für $m = 1$ und $m = 2$.

---

streng genommen abhängig von p und T. Indem aber im Heizgasgemenge der Wasserdampf stark überhitzt, d. h. weit von seinem Sättigungszustande entfernt ist, wurde nach §. 19, Gl. (3) seine Dichtigkeit hier aus dem Molekulargewicht $m = 18$ des Wassers berechnet:

$$\delta = 0{,}0346\ m = 0{,}623.$$

Brennstoff.	L	Ac	Aq	N	$m = 1$			$m = 2$		
					G	δ	c	G	δ	c
Holz	4,52	1,43	0,60	3,48	5,50	1,003	0,266	10,02	1,002	0,254
Torf	4,41	1,28	0,63	3,40	5,31	0,993	0,268	9,72	0,996	0,25[illegible]
Braunkohle	6,32	1,83	0,54	4,87	7,24	1,023	0,258	13,56	1,012	0,25[illegible]
Steinkohle	10,67	2,93	0,48	8,22	11,63	1,043	0,250	22,30	1,022	0,245
Holzkohle .	10,20	3,12	0,18	7,85	11,15	1,071	0,244	21,35	1,036	0,242
Coks	10,26	3,19	0,11	7,90	11,20	1,077	0,242	21,46	1,039	0,241

2) Luftmengen L zur vollkommenen Verbrennung **gasförmiger Brennstoffe** pro 1 Kgr. Menge und Beschaffenheit der Verbrennungsproducte für $m = 1$.

Gasgemenge.	L	Ac	Aq	N	G	δ	c
Steinkohlen-Leuchtgas . .	14,19	2,29	1,90	11,00	15,19	0,957	0,27[illegible]
Gichtgase von Steinkohle .	1,89	0,67	0,21	2,01	2,89	1,016	0,257
„ „ Holzkohle .	0,92	0,56	0,02	1,34	1,92	1,080	0,24[illegible]
„ „ Coks	0,87	0,56	—	1,31	1,87	1,090	0,24[illegible]
Generatorgase von Holz . .	1,19	0,65	0,09	1,45	2,19	1,062	0,25[illegible]
„ „ Torf . .	0,89	0,49	0,09	1,31	1,89	1,042	0,251
„ „ Holzkohle	0,84	0,54	—	1,30	1,84	1,087	0,24[illegible]
„ „ Coks . .	0,84	0,54	—	1,30	1,84	1,087	0,24[illegible]

§. 161. Verbrennungstemperatur; Einfluss der Strahlung und des Wirkungsgrades der Feuerung.

Die durch einen Verbrennungsprocess hervorgebrachte Temperaturerhöhung würde nach dem Vorhergehenden bei gegebener Art des Brennstoffs und bei gegebener verhältnissmässiger Luftmenge leicht zu berechnen sein, wenn die Verbrennung eine wirklich vollkommene wäre, also pro 1 Kgr. aufgewendeten Brennstoffs eine dem Heizeffect K desselben gleiche Wärmemenge thatsächlich producirt würde, und wenn ferner diese vollständig zur Temperaturerhöhung der Verbrennungsproducte diente. Bei den technischen Feuerungen pflegt aber die gewöhnlich auf einem Roste stattfindende Verbrennung fester Brennstoffe hauptsächlich aus folgenden Gründen mehr oder weniger unvollkommen zu sein:

1) Mit der Asche können zugleich brennbare Theile unverbrannt durch die Rostspalten in den Aschenraum herunter fallen um so mehr, mehr der Brennstoff an und für sich eine staubförmige Beschaffenheit h...

oder im Verlauf des Verbrennungsprocesses dem Zerfallen in kleine und nicht sogleich wieder zusammenbackende Stückchen unterworfen ist.

2) Bei der periodischen Beschickung des Rostes mit neuem Brennstoffe wird theils durch die niedere Temperatur des letzteren und durch die zunächst stattfindende Verdampfung seines hygroskopischen Wassers, theils durch die kalte Luft, welche in grossem Ueberschuss durch die geöffnete Heizthür in den Feuerraum eindringt, eine solche Erniedrigung der Temperatur verursacht, dass dieselbe besonders zur Verbrennung des in Verbindung mit Wasserstoff verflüchtigten Kohlenstoffs unzureichend sein kann. Indem dieser dann in fester Form sehr fein vertheilt sich ausscheidet, bildet er, eingehüllt von dem verdampften hygroskopischen Wasser, den dicken schwarzen Rauch, der einer neuen Beschickung des Rostes zu folgen pflegt.

3) Auf diese gewöhnlich nur kurze Periode schwarzen Rauches folgt eine länger dauernde, in welcher ein leicht gefärbter Rauch entwickelt wird, der zwar erhebliche Mengen festen Kohlenstoffs nicht mehr enthält, wohl aber unvollkommen verbrannte Gase (Kohlenoxyd, Kohlenwasserstoffverbindungen und freien Wasserstoff). Die Ursache ist in einem Mangel an Luft oder wenigstens an hinlänglich inniger Mischung derselben mit den sich entwickelnden brennbaren Gasen im eigentlichen Feuerraum, wo die zu ihrer vollkommenen Verbrennung nöthige Temperatur herrscht, zu suchen. Indem nämlich in dieser Periode vorzugsweise die Verkohlung des festen Brennstoffes unter Entwickelung brennbarer Gase stattfindet, ist der Luftbedarf zur Verbrennung derselben besonders gross, die wirklich vorhandene Luftmenge aber um so eher ungenügend, als ihr Zutritt durch die Brennstoffschicht hindurch infolge der noch grösseren Dicke der letzteren kurz nach Beschickung des Rostes erschwert wird.

Von der Wärme, welche durch die solcher Weise mehr oder weniger unvollkommene Verbrennung producirt wird, geht nun aber noch ein Antheil verloren theils durch Strahlung nach unten in den Aschenraum, theils durch Strahlung nach oben gegen die Wand des Feuerraums, insoweit sie nicht etwa als Heizwand (Scheidewand zwischen den Heizgasen und der zu erwärmenden Flüssigkeit) dient, theils durch Berührung dieser Wand mit dem glühenden Brennstoff und den Heizgasen. Ist die Wärmemenge, die mit Rücksicht auf diese Verluste und auf die Unvollkommenheit der Verbrennung pro 1 Kgr. Brennstoff nutzbar entwickelt wird, $= \eta_1 K$, so soll η_1 der **Wirkungsgrad der Feuerung** heissen.

Wenn die Wand des Feuerraums ganz oder theilweise Heizwand ist, deren dem Feuerraume zugekehrte Oberfläche dann **directe Heizfläche**

genannt wird (im Gegensatze zu der nur durch Berührung mit den Heizgasen Wärme empfangenden indirecten Heizfläche), so wird auch ihr Wärme zugestrahlt und zwar ein Theil $= s\eta_1 K$ jener nutzbar entwickelten Wärme, so dass nur die Wärme $(1 - s)\,\eta_1 K$ zur Temperaturerhöhung t der Verbrennungsproducte von 1 Kgr. des Brennstoffs übrig bleibt, deren Gewicht $= mL + 1$ ist, wenn mL die Gewichtsmenge der zutretenden Luft bedeutet. Ist also c die mittlere specifische Wärme dieser Producte, so ergiebt sich

$$t = \frac{(1 - s)\,\eta_1 K}{(mL + 1)\,c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1.$$

Im Falle eines festen Brennstoffes gehört auch die Asche zu den Verbrennungsproducten, die durch die frei gewordene Wärme erhitzt werden; ihre verhältnissmässige Gewichtsmenge ist aber so unbedeutend und ihre specifische Wärme (= 0,2 bis 0,22) von der im vorigen §. berechneten der gasförmigen Verbrennungsproducte so wenig verschieden, dass letztere ohne in Betracht kommenden Fehler für c gesetzt werden kann um so mehr, als es sich bei der im Verlauf des Verbrennungsprocesses zwischen zwei Beschickungen des Rostes streng genommen variablen Menge und Beschaffenheit der Producte doch nur um ungefähr zutreffende Mittelwerthe handeln kann.

Das Verhältniss s der einer directen Heizfläche durch Strahlung mitgetheilten zu der gleichzeitig überhaupt nutzbar entwickelten Wärme hängt ab von der Art des Brennstoffes und von der Beschaffenheit der bestrahlten Fläche, von dem Grössenverhältnisse, der gegenseitigen Lage und der Temperaturdifferenz der (der Rostfläche gleichen) ausstrahlenden Oberfläche des glühenden Brennstoffes und der bestrahlten directen Heizfläche, endlich von der Brennstoffmenge, die in der Zeiteinheit pro Flächeneinheit des Rostes verbrannt wird; und zwar ist namentlich s um so grösser 1) mit je weniger Flamme und Rauch die Verbrennung stattfindet, 2) je grösser die Temperaturdifferenz des glühenden Brennstoffs und der bestrahlten Heizwand ist, 3) zu einem je grösseren Theil die Umfassungswand des Feuerraums als Heizwand dient, was vollständig bei sogenannter Innenfeuerung, dagegen nur theilweise bei Unterfeuerung der Fall ist, 4) je weniger Brennstoff (bei kleiner Schichthöhe auf dem Roste und mässigem Zuge) pro Stunde und Quadratmeter Rostfläche (übrigens in vortheilhafter Weise) verbrannt wird. Behufs einer zuverlässigen quantitativen Bestimmung der Abhängigkeitsgesetze dieses Strahlungscoefficienten s unter solchen Umständen, wie sie bei technischen Feuerungen vorzukommen pflegen, fehlt es an brauchbaren Versuchen. Wenn Péclet die Wärm

die eine in einem Drahtnetz brennende und dadurch an ihrer ganzen Oberfläche zur Ausstrahlung geschickte kleine Brennstoffmenge einer in einiger Entfernung sie rings umgebenden berussten und jenseits von Wasser berührten Blechwand durch diese Strahlung mittheilte, für Holz und Torf zu etwa $^1/_4$, für Steinkohle, Holzkohle und Coks zu etwa $^1/_2$ der ganzen Verbrennungswärme bestimmte, so waren doch die Verhältnisse bei diesen Versuchen allzu sehr verschieden von denen der technischen Praxis, als dass für diese von jenen Bestimmungen viel mehr verwendbar wäre, als das Resultat, dass s unter ähnlichen Umständen für Holz und Torf etwa halb so gross ist wie für Steinkohle, Holzkohle und Coks. Die Beurtheilung des Einflusses der Strahlung, so wichtig sie auch für die Wirksamkeit einer Heizfläche sein mag, ist somit einstweilen auf eine ziemlich unsichere Schätzung angewiesen, als welche es zu betrachten ist, wenn z. B. für eine Dampfkesselfeuerung, bei welcher stündlich pro Quadratmeter Rostfläche etwa 50 Kgr. Steinkohle verbrannt werden, im Falle einer Unterfeuerung $s = 0{,}2$ bis $0{,}25$, im Falle einer Innenfeuerung $s = 0{,}3$ bis $0{,}35$ gesetzt wird. —

Nach Gl. (1) und mit den betreffenden Werthen von K (§. 159) und L, c (§. 160) ergiebt sich die dem Grenzfalle

$$m = 1,\ \eta_1 = 1,\ s = 0$$

entsprechende grösstmögliche, praktisch allerdings nicht realisirbare Temperaturerhöhung t durch Verbrennung von

lufttrockenem Holz . . . . = 1860°
„ Torf . . . . = 1892°
lufttrockener Braunkohle . . . . = 2211°
Steinkohle . . . . = 2565°
Holzkohle . . . . = 2574°
Coks . . . . = 2593°
Steinkohlen-Leuchtgas . . . . = 2466°
Gichtgasen von Steinkohle . . . . = 2032°
„ „ Holzkohle . . . . = 1801°
„ „ Coks . . . . = 1872°
Generatorgasen von Holz . . . . = 2022°
„ „ Torf . . . . = 1726°
„ „ Holzkohle und Coks . . . = 1848°.

Für den technisch wichtigsten Brennstoff, die Steinkohle, kann die specif. Wärme der Verbrennungsproducte stets $= 0{,}25$ und dann mit $K = 7483$

$$t = \frac{29932\,(1-s)\,\eta_1}{10{,}67\,m + 1} = \left\{ \begin{array}{l} 1760\,(1-s)\,\eta_1 \text{ für } m = 1{,}5 \\ 1340\,(1-s)\,\eta_1 \text{ für } m = 2 \end{array} \right\} \ldots\ldots 2$$

gesetzt werden.

Die Temperatur, welche im Feuerraum herrscht, ergiebt sich durch Addition jenes Werthes von t zu der Anfangstemperatur, die lediglich in Folge der Berührung des Brennstoffs mit der zutretenden Luft als Mischungstemperatur hervorging und welche bei der Verbrennung fester Brennstoffe der atmosphärischen Temperatur gleich zu sein pflegt, bei Gasfeuerungen aber oft erheblich grösser ist, theils in Folge höherer Anfangstemperatur der brennbaren Gase selbst, theils weil die Luft in vorgewärmtem Zustande mit ihnen gemischt wird. Auf solche Weise und da diese Mischung hier weit vollkommener, als bei festen Brennstoffen geschehen und deshalb mit m kaum > 1 eine fast vollkommene Verbrennung erreicht werden kann, sind Gasfeuerungen besonders zur Hervorbringung hoher Temperaturen geeignet. Uebrigens finden auch sie, und findet überhaupt die Vollkommenheit der Verbrennung auch von noch so innig mit Sauerstoffgas oder Luft gemischten brennbaren Gasen in dem Umstande ihre Grenze, dass die chemische Verbindung eine gewisse Zeit erfordert und um so mehr erschwert wird, je mehr die noch unverbundenen Moleküle mit dem Fortgange des Verbrennungsprocesses durch deren Producte getrennt werden; so fand Bunsen, dass bei der explosiven Verbrennung eines Gemisches von Wasserstoffgas oder Kohlenoxydgas in einem abgeschlossenen Raume mit Sauerstoffgas nur etwa $^1/_3$, mit atmosphärischer Luft nur etwa $^1/_2$ des brennbaren Gases wirklich verbrannte, wenn auch Sauerstoff resp. Luft in der zu vollständiger Verbrennung gerade erforderlichen Menge vorhanden waren. Hierdurch ist es erklärlich, dass die Hervorbringung einer Temperaturerhöhung von über 3000° selbst bei Verwendung reinen Sauerstoffs zur Verbrennung bisher in keinem Falle mit Sicherheit nachgewiesen wurde, obschon sie bei vollkommener Verbrennung z. B. von Wasserstoffgas oder Kohlenoxydgas mit Sauerstoffgas im Gewichtsverhältniss 1 : 8 resp. 7 : 4 der Rechnung zufolge betragen sollte ungefähr

$$\frac{29060}{9 \,.\, 0{,}48} = 6727^0 \text{ resp. } \frac{2400}{\frac{11}{7} \,.\, 0{,}24} = 6364^0.$$

§. 162. Beschaffenheit und Bedienung des Herdes.

Das erste Erforderniss einer vortheilhaften Verbrennung ist die den Umständen entsprechende Beschaffenheit und Bedienung des Herdes, in

welcher Beziehung bei Voraussetzung einer üblichen Rostfeuerung mit periodischer Beschickung durch die Heizthür von oben und Luftzutritt durch die Rostspalten von unten hauptsächlich in Betracht kommen: die Grösse der Rostfläche, die Breite der Roststäbe und ihrer Zwischenräume, die stündlich pro Quadratmeter Rostfläche zu verbrennende Brennstoffmenge, die Dicke der Brennstoffschicht auf dem Roste, die Periode und die Art der Beschickung des Rostes, die Höhe des Verbrennungsraumes und die Beschaffenheit der ihn begrenzenden Wände. Die Umstände aber, von denen die angemessene Bestimmung dieser Verhältnisse zum Theil abhängt, sind namentlich: die Beschaffenheit des Brennstoffes, die disponible Zugwirkung und der Umstand, ob es im Wesentlichen nur auf die Production einer gewissen Wärmemenge oder zugleich auf eine möglichst hohe Verbrennungstemperatur ankommt (z. B. bei der Feuerung von Gasretorten-Oefen, sofern die Production, d. h. die Schnelligkeit der Vergasung einer gewissen Steinkohlenmenge mit der Temperatur wächst), abgesehen von solchen hier ausgeschlossenen Fällen, in denen bei unmittelbarer Berührung der zu erhitzenden und chemisch zu verändernden Körper mit den Verbrennungsproducten zugleich die chemische, oxydirende oder desoxydirende Beschaffenheit der letzteren in Betracht kommen würde.

1) Die Grösse eines Rostes ist begrenzt durch die Möglichkeit seiner hinlänglich leichten und guten Bedienung (Reinigung von Schlacken und Beschickung mit Brennstoff in möglichst gleichförmig dicker Schicht) ohne die Heizthür zu lange offen stehen zu lassen. Als Maximum der Länge ist 1,5 Mtr., der Breite 0,9 Mtr. zu betrachten. Ergiebt sich gemäss der stündlich aufzuwendenden Brennstoffmenge $= B$ Kgr. im Ganzen und $= B_1$ Kgr. pro Quadratm. Rostfläche die im Ganzen erforderliche Grösse der letzteren:

$$R = \frac{B}{B_1} > 1,35 \text{ Quadratm.},$$

so ist ihre Vertheilung auf zwei oder mehr Roste rathsam, abgesehen zunächst von anderen Gründen, die für eine solche Zerlegung sprechen können.

2) Die Spaltweite zwischen den Roststäben soll bei hinlänglicher Grösse für den Gebrauch des Schüreisens so klein sein, dass sie möglichst nur die Asche und nicht zugleich unverbrannte Stückchen des Brennstoffs hindurchfallen lässt, ohne jedoch den Widerstand wesentlich zu vermehren, den die Brennstoffschicht auf dem Roste dem Hindurchströmen der Luft darbietet. Die (von oben nach unten abnehmende) Dicke der Roststäbe soll bei genügender Sicherheit gegen Verbiegung doch möglichst klein sein, um die Kühlung dieser Stäbe durch die von unten her zuströmende kalte

Luft, und um den allseitigen Zutritt der letzteren zu den auf den Stäben liegenden Brennstofftheilen zu erleichtern. In der Regel ist die Spaltweite je nach der Beschaffenheit des Brennstoffs = 5 bis 10 Millim., die obere Dicke der Roststäbe je nach ihrer Länge = 20 bis 30 Millim., die sogenannte freie Rostfläche, d. h. die Gesammtöffnung zwischen den Roststäben im Durchschnitt = $^1/_4$ der ganzen Rostfläche. Wenn bei staubförmigen oder solchen Brennstoffen, die in der Hitze zu staubförmigen Theilchen zerspringen, die Spaltweite eines gewöhnlichen Rostes nicht klein genug gemacht werden kann, um übermässige Verluste zu verhüten, so ist ein Treppenrost am Platze, d. h. ein geneigter, von der höchsten Stelle aus zu beschickender Rost, der durch flach liegende und mit angemessenen Zwischenräumen sich theilweise überdeckende Roststäbe gebildet wird, so dass die Luft in horizontaler Richtung durch jene Zwischenräume zuströmt.

3) Die pro Quadratm. Rostfläche stündlich zu verbrennende Menge = B_1 und die Schichtdicke = b des Brennstoffs auf dem Roste stehen insofern in Beziehung zu einander, als die Zeit, während welcher die Brennstoffschicht von der Luft durchströmt wird, eine gewisse vortheilhafteste Grösse hat. Sie soll zwar gross genug sein, um bei der vielfach wirbelnden Mischungsbewegung, mit welcher die Hohlräume zwischen den Brennstoffstücken von der Luft durchströmt werden, den Sauerstoff derselben in die zur Verbrennung nöthige Berührung mit der Oberfläche des glühenden Brennstoffs und mit den der Luft sich zugesellenden Destillationsproducten kommen zu lassen, dagegen auch nicht grösser, als zu diesem Zwecke erforderlich ist, weil ausser der dadurch unnöthiger Weise bedingten Vermehrung des Zugwiderstandes ein noch grösserer Nachtheil insofern zu erwarten wäre, als die schon gebildete Kohlensäure in Berührung mit glühender Kohle unter Bindung von Wärme zu Kohlenoxydgas reducirt würde und dieses dann später mit dem noch überschüssig vorhandenen Sauerstoff bei zugleich hinlänglich hoher Temperatur nicht mehr in die zur vollständigen Verbrennung zu Kohlensäure nöthige innige Berührung käme. Sofern aber ein lebhafter Verbrennungsprocess erst dann beginnen kann, wenn die Luft, bis zu einer gewissen Tiefe b_0 in die Brennstoffschicht eingedrungen, eine höhere Temperatur angenommen hat und der Brennstoff daselbst dem abkühlenden Einflusse der weniger heissen Roststäbe hinlänglich entzogen ist, kommt zur Berücksichtigung der angeführten Verhältnisse die zum Durchströmen nicht sowohl der ganzen Schichtdicke b, als vielmehr des Theils $= b - b_0$ erforderliche Zeit t in Betracht. Ist nun T die mittlere absolute Temperatur der Luft in diesem Theil der Schichtdicke, und fR, unter f einen ächten Bruch verstanden, die mittlere

Grösse der Fläche, in welcher die Gesammtheit der Hohlräume zwischen den Brennstoffstücken von einer mit der Rostfläche parallelen Ebene geschnitten wird, so ist die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher die Schichtdicke $= b - b_0$ von der Luft durchströmt wird, direct dem Volumen derselben, also der Grösse $mLBT$, und umgekehrt fR proportional, folglich

$$\frac{b - b_0}{t} \text{ proportional } \frac{mLBT}{fR} = \frac{mLB_1T}{f}$$

$$\text{oder } \frac{B_1}{b - b_0} \text{ proportional } \frac{f}{mLTt}.$$

Da T um so kleiner ist, je grösser m, und deshalb das Product mT in verschiedenen Fällen nicht sehr verschieden sein wird, so kann

$$\frac{B_1}{b - b_0} = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

gesetzt werden, unter C eine Constante verstanden, die ebenso wie b_0 nur als abhängig von der Beschaffenheit (Art und Stückgrösse) des Brennstoffs zu betrachten ist.

Der Natur der Sache gemäss lässt sich erwarten, dass b_0 um so grösser sein wird, je grösser die Hohlräume zwischen den Brennstoffstücken sind und je besser diese die Wärme leiten; ersteres ist besonders bei Holz- und Torf-, letzteres bei Coksfeuerung* der Fall, und kann im Durchschnitt

	für Steinkohle,	Holz und Torf,	Coks	
$b_0 =$	0,04	0,08	0,1	Mtr.

gesetzt werden. Der einer möglichst vortheilhaften Verbrennung entsprechende Werth von C ist in allen Fällen nahe gleich, im Durchschnitt $= 800$, wenn B_1 in Kgr. pro Stunde ausgedrückt wird; ist auch L für Holz und Torf erheblich kleiner, als für Steinkohlen und Coks, so kann

* Die verhältnissmässig grosse Wärmeleitungsfähigkeit der Coks kann unter Umständen sich vortheilhaft erweisen, z. B. bei den Meidinger'schen Füllöfen zur Zimmerheizung, bei denen Coks in einem verticalen eisernen Hohlcylinder von mässiger Weite nur in einer unteren Schicht durch die hier eintretende Luft in Verbrennung begriffen sind. Die von dieser Schicht aufsteigenden mit Kohlensäure angereicherten Gase haben dann zwar eine verhältnissmässig hohe Cokschicht zu durchströmen, welche aber durch die von der entlang strömenden Zimmerluft beständig gekühlte eiserne Wand vermöge ihrer eigenen Leitungsfähigkeit selbst so weit abgekühlt ist, dass sie eine erhebliche Reduction der Kohlensäure zu Kohlenoxydgas erfahrungsmässig nicht bewirken kann, wogegen es bei Ausfütterung des eisernen Schachtes mit Thon in sehr merklicher Weise der Fall ist.

doch die verhältnissmässig kleinere Gesammtoberfläche der grösseren Brennstoffstücken und die weniger mannigfache Mischungsbewegung der Luft in den grösseren und weniger zahlreichen Hohlräumen eine entsprechend längere Zeit t nöthig machen, um ihre Sauerstoffmoleküle nach und nach mit dem glühenden Brennstoff in Berührung kommen zu lassen.

Die Absolutwerthe von b und B_1 sind von der Stärke des Zuges abhängig und können bei gleich günstiger Verbrennung zwischen weiten Grenzen variiren. Bei sogenanntem natürlichem Luftzuge durch eine Esse sind sie verhältnissmässig klein und um so kleiner, je geringer die Zugwirkung ist wegen nur mässig hoher Temperatur der in die Esse abziehenden Heizgase, wie z. B. bei Dampfkesselfeuerungen; in solchen Fällen kann etwa $b = 2{,}5\, b_0$, also

	für Steinkohle,	Holz und Torf,	Coks
$b =$	0,1	0,2	0,25 Mtr.

gesetzt werden, entsprechend nach Gl. (1) mit $C = 800$ in runden Zahlen $B_1 = 50$, 100 und 120 Kgr. pro Quadratm. Rostfläche und pro Stunde. Diese Zahlen sind nur Mittelwerthe und nicht nur je nach der Stärke des Zuges, sondern auch mit Rücksicht auf die Stückgrösse und überhaupt die besondere Beschaffenheit des Brennstoffs zu modificiren, z. B. für backende oder einigermaassen staubförmige Steinkohle durch etwa $b = 0{,}08$, für magere Steinkohle von mittlerer Stückgrösse durch $b = 0{,}12$ Mtr. und durch die entsprechenden Werthe von B_1 zu ersetzen. Wenn durch eine Esse von beträchtlicher Höhe die Heizgase mit sehr hoher Temperatur entweichen (wie z. B. bei Gasretortenöfen), so können b und B_1 entsprechend grösser sein, besonders aber bei künstlicher, durch mechanische Mittel bewirkter sehr intensiver Anfachung, wie z. B. durch die Blasrohrvorrichtung der Locomotiven, wobei b bis 0,6 Mtr. und darüber betragen kann. Je grösser b ist, desto kleiner darf m sein bis etwa $m = 1{,}5$; die Temperatur ist dann entsprechend grösser.

4) Die Beschickung des Rostes soll in angemessenen Perioden $= m$ Minuten wiederholt werden. Durch zu kurze Perioden werden die Gelegenheiten zu dem schädlichen Einströmen grosser Mengen kalter Luft durch die Thüröffnung unnöthig vervielfältigt, bei zu langen Perioden wird durch die zu grosse Beschickungsmenge $= \frac{m}{60} B$ Kgr. kalten Brennstoffs eine übermässige Abkühlung und Rauchbildung verursacht. Soll diese Menge $= \frac{1}{n}$ derjenigen Brennstoffmenge sein, die sich im Mittel in intensiver Verbrennung auf dem Roste befindet, und welche, unter γ das

wicht von 1 Cubikm. (incl. Hohlräume) verstanden, $= \gamma R (b - b_0)$ gesetzt werden kann, so ergiebt sich mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$\frac{m}{60} B = \frac{1}{n} \gamma R (b - b_0); \quad m = \frac{60\gamma}{n} \frac{b - b_0}{B_1} = \frac{60\gamma}{nC} \quad \ldots . (2),$$

insbesondere für Steinkohlenfeuerung mit durchschnittlich $\gamma = 900$ Kgr. und $C = 800$:

$$m = \frac{135}{2n}, \text{ z. B. } = 13{,}5 \text{ Minuten für } n = 5.$$

Auch ist es rathsam, vorwiegend die vordere Rosthälfte, diese aber möglichst gleichmässig mit dem frischen Brennstoff zu beschicken, nachdem zuvor die rückständigen glühenden Kohlen gegen die hintere Hälfte hin etwas gehäuft wurden, ein Verfahren, das durch eine mässige Neigung des Rostes von der Heizthür an abwärts erleichtert wird. Indem dann die Producte der unvollkommenen Verbrennung auf der vorderen Rosthälfte über die in voller Gluth befindliche dünnere Schicht auf der hinteren Hälfte hinströmen, finden sie hier die höhere Temperatur und überschüssige Luft als Bedingungen einer vollkommenen Verbrennung.

5) Die Höhe h des Verbrennungsraums über dem Roste muss um so grösser sein, mit je grösserer Schichtdicke b der Brennstoff aufzugeben ist und je mehr derselbe mit Flamme verbrennt, damit diese Raum zur Entwickelung habe und die sie bildenden Gase noch im eigentlichen Feuerraum vollständig zur Verbrennung gelangen können. Ausserdem ist aber die Wahl dieser Höhe h davon abhängig zu machen, ob es sich um eine Innenfeuerung, Unterfeuerung oder Vorfeuerung handelt, d. h. ob der Feuerraum ringsum, oder nur oben, oder gar nicht von einer metallenen Heizwand begrenzt wird, während im zweiten Falle an den Seiten, im dritten zugleich oben die Begrenzung durch eine Steinwand gebildet wird. Bei der Innenfeuerung ist h so gross wie irgend thunlich zu machen, um Brennstoff und Flamme dem abkühlenden Einflusse der kälteren Heizwand zu entziehen. Bei der Unterfeuerung ist zwar dieselbe Erwägung zutreffend, die Vergrösserung von h jedoch mit Rücksicht darauf beschränkt, dass mit h auch die Grösse der Seitenwand wächst, deren Erwärmung durch Leitung nach aussen einen Wärmeverlust verursacht. Bei der Vorfeuerung spricht diese letztere Rücksicht ohne Einschränkung für eine thunlichst kleine Höhe h.

Für den mittleren Fall einer Unterfeuerung bei Voraussetzung einer Temperatur von 100 bis 200° jenseits der Heizwand kann im Mittel

für	Coks,	Steinkohle,	Braunkohle,	Torf,	Holz	
$h - b =$	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	Mtr.

gesetzt werden.

6) Die Wände des Verbrennungsraums, insoweit sie nicht als Heizwände dienen, sollen möglichst dick aus einem Material hergestellt werden, das um so geeigneter ist, je weniger es durch die Hitze in seiner Beschaffenheit verändert wird, je schlechter es die Wärme leitet und je grösser seine Wärmecapacität ist. Der durch eine solche Wand bedingte Wärmeverlust kann dann mehr als aufgewogen werden durch die vortheilhafte regulirende Wirkung der in ihren einwärts gelegenen heissesten Theilen aufgespeicherten Wärme, indem dadurch namentlich die Abkühlung des Feuerraums und somit die Rauchbildung nach einer Beschickung des Rostes mit frischem Brennstoff vermindert wird. In einem Feuerraum, der ganz oder grossen Theils von directer Heizfläche begrenzt wird, herrscht unter sonst gleichen Umständen eine weniger hohe Temperatur als im entgegengesetzten Falle, und geht in Folge dessen die Verbrennung besonders im ersten Stadium nach einer Neubeschickung des Rostes weniger günstig von Statten; dagegen wird die überhaupt nutzbar entwickelte Wärme bei gegebener Grösse der ganzen Heizfläche vollständiger verwerthet, oder es ist zu gleich vollständiger Verwerthung eine kleinere Heizfläche ausreichend. Die Frage, ob eine Innen- resp. Unterfeuerung oder eine Vorfeuerung besser sei, kann unter diesen Umständen nur bedingungsweise beantwortet werden. Bei Brennstoffen von grossem Heizeffect und entsprechend hoher Verbrennungstemperatur und bei genügender Grösse des Verbrennungsraums ist eine Innen- oder Unterfeuerung im Allgemeinen vorzuziehen, wogegen bei einem Brennstoffe von geringer Qualität und bei beschränkter Grösse des Feuerraums eine Vorfeuerung vortheilhafter sein kann.

§. 163. Aussergewöhnliche Mittel zur Vervollkommnung einer Feuerung.

Bei der gewöhnlichen Rostfeuerung können auch durch Befolgung der im vorigen §. besprochenen Constructions- und Bedienungsregeln die Ursachen der Rauchbildung und der unvollkommenen Verbrennung überhaupt in der Regel nicht so vollständig beseitigt oder in ihrer schädlichen Wirkung abgeschwächt werden, wie es wünschenswerth ist. Von den hauptsächlichsten dieser Ursachen, der durch die Beschickung bedingten Temperaturabnahme und dem Mangel an Luft sowie an hinlänglich inniger

Mischung derselben mit den gasförmigen Destillationsproducten des zuletzt aufgegebenen Brennstoffs (§. 161) sind namentlich letztere und besonders bei Steinkohlenfeuerung von nachtheiliger Wirkung, indem ihr Einfluss sich in abnehmendem Grade auf eine längere Zeit erstreckt, die erfahrungsmässig auf 0,2 bis 0,4 der ganzen Periode zwischen zwei Beschickungen veranschlagt werden kann. Um diesen Uebelständen wirksamer zu begegnen, sind deshalb vielfach besondere Herdeinrichtungen und Heizmethoden ersonnen worden, die zuweilen allgemein als rauchlose oder rauchverzehrende Feuerungen bezeichnet und angepriesen wurden, obschon bei ihrer Beurtheilung wesentlich unterschieden werden muss, ob sie in erster Reihe die Verhütung von Rauch oder die Erhöhung des Wirkungsgrades der ganzen Heizanlage zum Zwecke haben. Beide Ziele bedingen sich nicht nothwendig gegenseitig, und es ist namentlich die Rauchlosigkeit nicht selten durch verminderte Ausnutzung der wenn auch in höherem Grade producirten Wärme erkauft worden, nämlich durch Verminderung des später zu besprechenden Wirkungsgrades η_2 der Heizfläche, dessen Product mit dem Wirkungsgrade η_1 der Feuerung (§. 161) erst denjenigen der Heizanlage ergiebt. Die fraglichen Einrichtungen können im Wesentlichen nach folgenden Gesichtspunkten classificirt werden.

1) Der Temperaturerniedrigung beim Aufgeben frischen Brennstoffs kann zwar am einfachsten durch Einschliessung und Ueberdeckung des Herdes mit einem dickwandigen Gewölbe aus feuerfestem Stein entgegengewirkt werden; um aber den Vortheil einer directen Heizfläche für den Wirkungsgrad η_2 nicht preiszugeben, kann man bis zu gewissem Grade den Zweck auch durch Verdickung und Oberflächenvergrösserung der Feuerbrücke, d. h. der Steinwand erreichen, über welche hinweg mit etwas verengtem Querschnitt (zur Beförderung einer innigen Mischung) die Heizgase aus dem Feuerraum in den Heizcanal entweichen; je grösser die Masse und die von den Heizgasen berührte Oberfläche dieser Feuerbrücke ist, desto mehr ist sie im Stande, eine erhebliche Wärmemenge von den heissen Producten des letzten Verbrennungsstadiums vor der Beschickung aufzunehmen und an die Producte des ersten Verbrennungsstadiums nach der neuen Beschickung zurückzugeben. Bei Locomotivfeuerungen, denen eine eigentliche Feuerbrücke fehlt, kann sie durch ein besonderes Gewölbe aus feuerfestem Stein ersetzt werden, das von der Röhrenwand des Feuerkastens aus unterhalb der Rohrmündungen in den verhältnissmässig hohen Verbrennungsraum hineinragt.

2) Dem Umstande, dass die zur Verbrennung nöthige Luftmenge im ersten Stadium des Verbrennungsprocesses am grössten ist, während die

durch den Rost zuströmende Luftmenge gerade umgekehrt anfangs am kleinsten ist und erst mit fortschreitender Verbrennung, also abnehmender Dicke der Brennstoffschicht auf dem Roste zunimmt, kann dadurch mit Vortheil Rechnung getragen werden, dass ausser durch die Rostspalten auch noch durch andere Oeffnungen oberhalb des Rostes Luft in den Feuerraum oder in den Heizcanal bei der Feuerbrücke eingeleitet und die Luftzuführung so regulirt wird, dass sie mit fortschreitender Verbrennung des zuletzt aufgegebenen Brennstoffs abnimmt. Eine vortheilhafte Wirkung ist von diesem Mittel namentlich dann zu erwarten, wenn die fragliche Luft genügend erwärmt zugeführt wird, z. B. durch enge Canäle, die in der heissen Feuerbrücke ausgespart sind, widrigenfalls der Gewinn der Vermeidung des Luftmangels mit einem ihn theilweise aufhebenden Verlust durch gesteigerte Abkühlung verbunden wäre. Auch soll, wenn es in erster Reihe nicht sowohl auf Rauchverhütung, als auf Erhöhung des resultirenden Wirkungsgrades ankommt, die aussergewöhnliche Luftzuführung nicht mehr betragen, als zur Vermeidung des Luftmangels in dem jeweiligen Stadium des Verbrennungsprocesses nöthig ist, eine Forderung, deren Erfüllung freilich einen ungewöhnlich geschickten und sorgfältigen Heizer erfordert.

3) Die vortheilhafte Mischung der noch wesentlich brennbaren Gase, die sich aus dem frisch aufgegebenen Brennstoff, insbesondere aus Steinkohlen entwickeln, mit einem hinlänglich heissen und sauerstoffreichen Gasgemenge, ist ausser der im vorigen §. unter 4) angedeuteten Beschickungsweise eines einfachen Rostes auch durch einen sogenannten Doppelrost, d. h. durch ein System von zwei nebeneinander liegenden Rosten zu erzielen, indem dieselben abwechselungsweise in gleichen Zeitintervallen beschickt werden, so dass die von ihnen sich entwickelnden und sich mischenden Producte stets von verschiedenen Verbrennungsstadien herrühren und somit Mangel und Ueberschuss an Temperatur und freiem Sauerstoff sich möglichst ausgleichen. Die Mischung erfolgt entweder in einem über oder hinter den Rosten gelegenen Raume, oder noch wirksamer, wenn auch weniger einfach (indem durch periodisch umgestellte Schieber die Strömung der Gase entsprechend geleitet wird) stets unmittelbar über demjenigen Roste, der nicht zuletzt beschickt wurde. Wenn es auf hinlänglich praktische Weise ausführbar wäre, würde dasselbe Princip am wirksamsten dadurch zu verwerthen sein, dass die Producte der unvollkommenen Verbrennung auf dem zuletzt beschickten Roste nicht über den glühenden Brennstoff des anderen hinweg, sondern mit Luft gemischt von unten auf durch ihn hindurch geleitet werden. —

Die genannten Einrichtungen haben mit der gewöhnlichen Rostfeuerung die sie charakterisirenden Eigenschaften (periodische Beschickung durch die Heizthür von oben mit Luftzutritt durch die Rostspalten von unten) im Wesentlichen gemein, bis auf die unter 2) besprochene secundäre Luftzuführung. Indem man aber auch jene hauptsächlichsten Eigenschaften der dadurch bedingten Uebelstände wegen in ihr Gegentheil umzukehren versuchte, ist zunächst

4) die periodische Beschickung durch eine continuirliche ersetzt worden. Der Brennstoff fällt aus der unteren Mündung eines hinlänglich voll erhaltenen Trichters stetig in kleinen Mengen entweder auf einen festen Rost nieder, wobei durch eine passende Neigung des letzteren von der Trichtermündung aus abwärts die gleichmässige Ausbreitung auf demselben unterstützt werden kann, oder auf einen durch mechanische Hülfsmittel bewegten Rost, der dann stets andere neu zu beschickende Stellen der Mündung des Fülltrichters darbietet. So sehr indessen auch das Princip solcher Einrichtungen richtig ist und das Uebel dadurch an der Wurzel angegriffen wird, so sehr sind sie in der Ausführung mit Schwierigkeiten und Mängeln verbunden. Bei der variablen Stückgrösse und sonstigen Beschaffenheit der technisch verwendeten festen Brennstoffe ist ihre Verbrennung weder zu verschiedenen Zeiten, noch gleichzeitig an verschiedenen Stellen des Rostes ganz gleichförmig, und ist es in dieser Hinsicht unmöglich, die intelligente Nachhülfe eines Heizers durch automatisch wirkende, hinlänglich einfache, zuverlässige und dauerhafte Vorrichtungen zu ersetzen.

5) Denselben Erfolg, der durch die oben unter 3) erwähnten Einrichtungen erstrebt wird, hat man noch vollkommener durch eine solche Beschickungsweise des Rostes zu erreichen gesucht, bei welcher zwischen ihm und der ihn bedeckenden Schicht die frischen Kohlen hineingeschoben und so die aus diesen sich entwickelnden Destillationsproducte genöthigt werden, mit Luft gemischt die schon abdestillirte von früheren Beschickungen übrige glühende Schicht zu durchströmen. Ausser dem Langen'schen Etagenroste, wodurch dieser Gedanke in zwar nicht vollkommener, aber praktisch brauchbarer Weise realisirt wurde, sind die meisten darauf abzielenden Vorschläge Project geblieben.

6) Einfacher würde derselbe Zweck dadurch zu erreichen sein, dass die Luft genöthigt wird, in der umgekehrten Richtung, nämlich von oben nach unten die in gewöhnlicher Weise von oben periodisch ergänzte Brennstoffschicht auf dem Rost zu durchströmen, wenn dieser dadurch nicht einer so hohen Temperatur ausgesetzt würde, dass ihr die Roststäbe nicht lange

widerstehen können, abgesehen davon, dass auch diese der natürlichen Tendenz des Aufsteigens erhitzter Gase entgegengesetzte Strömung eine wesentlich verstärkte Zugwirkung erfordert. Mit Vortheil wird indessen diese Verbrennungsweise bei Holzfeuerungen ohne Rost, insbesondere bei den Oefen zum Brennen von Thonwaaren und Porzellan verwendet, unterstützt durch die kräftige Zugwirkung der mit sehr hoher Temperatur durch die Esse entweichenden Heizgase. —

Bei vielen Feuerungen, wie sie in der Glas- und Thonwaaren-Industrie, bei der Bearbeitung von Metallen, bei der Leuchtgasfabrikation und zu anderen technologischen Zwecken Verwendung finden, besteht der Zweck nicht sowohl in möglichst ökonomischer Production und Mittheilung einer gewissen Wärmemenge, als vielmehr wenigstens vorzugsweise in der Hervorbringung und Erhaltung einer gewissen und zwar besonders einer möglichst hohen Temperatur; es handelt sich, wie man sich auszudrücken pflegt, in erster Reihe um möglichste Verwerthung nicht des calorimetrischen, sondern des pyrometrischen Effects der Brennstoffe. Die nähere Besprechung solcher Feuerungen, deren rationelle Anlage Aufgabe der Pyrotechnik ist und in erhöhtem Grade praktische Erfahrung sowie specielle Kenntniss der betreffenden Fabrikationsbedingungen erfordert, liegt zwar nicht im Zwecke dieses Buches, doch mögen einige Andeutungen auch in Betreff der Mittel zur Vervollkommnung solcher Feuerungen hier Platz finden. Die Nachtheile, um deren Verminderung es sich dabei vorzugsweise handelt, bestehen theils in den Wärmeverlusten besonders durch die mit sehr hoher Temperatur entweichenden gasförmigen Verbrennungsproducte, theils in dem Umstande, dass die Hervorbringung einer hohen Temperatur vor Allem eine Verbrennung mit möglichst kleinem Luftüberschuss erfordert und dadurch die Erzielung einer genügend vollkommenen Verbrennung erschwert wird.

7) Die Wärme, mit der die heissen gasförmigen Verbrennungsproducte den Ofenraum verlassen, kann entweder zu anderweitigen Heizzwecken verwendet werden, bei denen es nur auf die Mittheilung von Wärme mässig hoher Temperatur ankommt, z. B. zur Heizung von Dampfkesseln, überhaupt zur Verdampfung von Flüssigkeiten, zur Heizung von Trockenkammern u. s. w., oder zur Vorwärmung der Verbrennungsluft des betreffenden Ofens selbst. Letzteres geschieht am vollkommensten durch sogenannte Regeneratoren, bestehend nach Siemens in Kammern, die mit feuerfesten Steinen in mehrfach versetzten Lagen so angefüllt sind, dass diese ein zusammenhängendes System gebrochener Canäle zwischen sich frei lassen. Indem dann ein Ofen mit zwei solchen Regeneratoren

ersehen ist, kann es durch periodische Umstellung einer Klappe erreicht rerden, dass abwechselungsweise der eine von der Verbrennungsluft auf em Wege zur Feuerung, der andere von den gasförmigen Verbrennungsroducten auf dem Wege vom Ofenraum zur Esse durchströmt wird, und o die Luft von den Steinen des betreffenden Regenerators die Wärme ufnimmt, die sie selbst vorher von den hindurch ziehenden heissen Gasen ufgenommen hatten. Sofern die Verbrennung mit warmer Luft wenigstens beuso vollkommen wie mit kalter stattfindet, wird die resultirende Temeratur im Ofenraum ungefähr ebenso viel erhöht wie die der zuströmenden uft, und indem damit auch wieder die Temperatur des von den Heizgasen urchzogenen Regenerators sowie die Erwärmung der ihn demnächst durchiehenden Luft gesteigert wird, so findet nach Inbetriebsetzung des Ofens unächst eine successive Steigerung auch der resultirenden Temperatur im fenraum statt bis durch die gleichzeitig wachsende Wärmeleitung der mfassungswände ein Beharrungszustand eintritt. Die Verwendung vorewärmter Luft bei Rostfeuerungen ist übrigens mit der Schwierigkeit erbunden, dass dadurch die für die Haltbarkeit der Roststäbe so wesentche Kühlung derselben durch die zuströmende Luft preisgegeben oder enigstens erheblich vermindert wird; sie wird deshalb vorzugsweise praksch erst in Verbindung mit der eines Rostes nicht bedürfenden Gaseuerung.

8) Wie schon früher (§. 161) erwähnt wurde, ist zur Verwerthung es pyrometrischen unbeschadet des calorimetrischen Effects eines Brenntoffs besonders die Gasfeuerung geeignet, wobei in einem ersten Verrennungsraum (dem Generator) bei hoher Schichtung des Brennstoffs und ässiger Luftzuführung eine absichtlich unvollkommene Verbrennung unteralten wird (charakterisirt durch eine Reduction der in der untersten rennenden Schicht entwickelten Kohlensäure durch die darauf folgende bere zwar glühende, aber nicht brennende Schicht zu Kohlenoxyd), um ann die gasförmigen Producte dieser unvollkommenen Verbrennung (Geeratorgase) erst in einem zweiten Verbrennungsraume durch beigemischte tmosphärische Luft vollkommen zu verbrennen. Nach dem Fundamentalesetz in §. 159 unter 1) kann zwar durch eine solche Zerlegung des Verrennungsprocesses in zwei gesonderte chemische Processe keine grössere Värmemenge gewonnen werden, im Gegentheil verursachen die Generatorände und die Leitung der Generatorgase weitere Verluste, die höchstens urch eine mehr vollkommene endgültige Verbrennung aufgewogen werden ögen; indem aber letztere in Folge der Möglichkeit einer innigen moleularen Durchdringung von Generatorgasen und Luft (im Gegensatze zu

der nur oberflächlichen Berührung fester Brennstoffe mit der Verbrennungsluft) hier mit einer viel kleineren, die principiell erforderliche kaum übertreffenden Luftmenge erreicht werden kann, ist dadurch die Möglichkeit einer wesentlich höheren Verbrennungstemperatur gegeben. Um die erwähnten Wärmeverluste möglichst herabzuziehen, soll die Wärmeentwickelung im Generator nicht grösser sein, als der Vergasungszweck des festen Brennstoffs erfordert, und wird zum Theil aus diesem Grunde die Verbrennungsluft mit Wasserdampf gemischt dem Generator zugeführt. Wenn die Annahme richtig ist, dass dieser Wasserdampf in seine Elementarbestandtheile zerfällt, der Sauerstoff Kohlenoxydgas bildet, während der Wasserstoff entweder frei oder als Kohlenwasserstoff den Generatorgasen sich zugesellt (eine Annahme, deren Bestätigung durch Analysen wünschenswerth ist), so wird dadurch eine Wärmemenge gebunden, die den Heizeffect der Generatorgase um ebenso viel erhöht und demnächst wiedergewonnen werden kann. Indem aber ferner statt des atmosphärischen (mit einer überwiegenden Menge Stickstoff gemischten) Sauerstoffs zum Theil der Sauerstoff des zersetzten Wassers zur Vergasung des Kohlenstoffs verwendet wird, vermindert sich der Stickstoffgehalt der Generatorgase und erhöht sich dadurch ihr pyrometrischer Effect, weil nun ihre Verbrennungswärme eine kleinere Masse indifferenter Gemengtheile mit zu erhitzen hat.

Dass die Gasfeuerung eine besonders exacte Regulirung der mehr oder weniger oxydirenden oder desoxydirenden Eigenschaft der Flamme gestattet, einem Ueberschuss oder Mangel an zugelassener Verbrennungsluft entsprechend, ist ein hier nur nebenbei zu erwähnender, bei manchen Verwendungen aber wichtiger Umstand.

9) Die höchsten Hitzegrade bei zugleich möglichst vollkommener Verbrennung sind endlich durch Combination der beiden unter 7) und 8) besprochenen Principien zu erreichen, wie es bei den Siemens'schen Regenerativgasöfen der Fall ist. Ein solcher enthält 4 Regeneratoren, von denen zwei abwechselungsweise von den zuströmenden Generatorgasen und von den zur Esse entweichenden Heizgasen, die beiden anderen abwechselungsweise von der zuströmenden Luft und von den entweichenden Heizgasen durchzogen werden, so dass beide Theile, die Generatorgase und die Verbrennungsluft, schon erheblich vorgewärmt zusammentreffen.*

---

* Eine eingehende wissenschaftliche und zugleich auf praktischer Erfahrung beruhende Besprechung dieser Oefen von R. Ziebarth enthält die Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1864, S. 658.

B. Wärmetransmission durch feste Wände.

§. 164. Fundamentalgesetz des permanenten Wärmedurchganges durch eine Wand.

Eine feste Wand von gleichförmiger Dicke $= e$ trenne zwei tropfbare oder luftförmige Flüssigkeiten, deren Temperaturen $= t$ und t' seien; F und F' seien die Grössen der von diesen Flüssigkeiten berührten Wandoberflächen, y die Grösse einer mit ihnen parallelen Schnittfläche der Wand in der Entfernung x von der Oberfläche F. Die Temperaturen t und t' seien constant, t gleich gross längs der ganzen Oberfläche F, t' desgleichen längs F', und es sei bezüglich auf den Wärmedurchgang im Sinne von F gegen F' ($t > t'$ vorausgesetzt) ein Beharrungszustand eingetreten, so dass die Wärmemengen, die in der Zeiteinheit durch F, y und F' hindurchgehen, gleich gross $= Q$ sind. Unter der Voraussetzung, dass die Beschaffenheiten der Wandoberflächen F und F' gleichförmig, wenn auch unter sich im Allgemeinen verschieden sind, haben die von ihnen begrenzten unendlich dünnen Wandschichten gleichförmige constante Temperaturen τ resp. τ', und zwar ist mit Rücksicht auf die Widerstände, die sich dem Eintritt der Wärme durch F, ihrer Leitung durch die Wand selbst und ihrem Austritt aus F' entgegensetzen,

$$t > \tau > \tau' > t'.$$

Unter der ferneren Voraussetzung, dass auch im Inneren die Wand von gleichförmiger Beschaffenheit ist, herrscht in der Schnittfläche y, d. h. überall in der Entfernung x von F dieselbe Temperatur z ($< \tau$ und $> \tau'$), und wenn dz die der Aenderung dx von x entsprechende Aenderung derselben und λ den Wärmeleitungscoefficienten des Materials der Wand im Sinne der Wärmeströmung bedeutet, so ist (§. 9, Gl. 1):

$$\frac{Q}{y} = -\lambda \frac{dz}{dx} \quad \text{oder} \quad -dz = \frac{Q}{\lambda} \frac{dx}{y}$$

$$\tau - \tau' = \frac{Q}{\lambda} \int_0^e \frac{dx}{y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Wenn ferner mit α und α' gewisse Coefficienten bezeichnet werden, die sich (analog dem in §. 9, Gl. 3 mit λ_1 bezeichneten Wärmeübergangscoeffi-

cienten) auf den Eintritt der Wärme in die Wand an der Oberfläche F und auf ihren Austritt aus derselben an der Oberfläche F' beziehen, so ist

$$\frac{Q}{F} = \alpha\,(t - \tau) \text{ und } \frac{Q}{F'} = \alpha'\,(\tau' - t')$$

$$\tau = t - \frac{Q}{\alpha F};\ \tau' = t' + \frac{Q}{\alpha' F'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2.$$

Aus Gl. (1) und (2) folgt

$$t - t' - Q\left(\frac{1}{\alpha F} + \frac{1}{\alpha' F'}\right) = \frac{Q}{\lambda}\int_0^e \frac{dx}{y}$$

und somit die in der Zeiteinheit die Wand durchdringende Wärme:

$$Q = \frac{t - t'}{\frac{1}{\alpha F} + \frac{1}{\alpha' F'} + \frac{1}{\lambda}\int_0^e \frac{dx}{y}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3.$$

Im Falle einer ebenen Wand ist $y = F' = F$, also

$$Q = \frac{F\,(t - t')}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} + \frac{e}{\lambda}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 4.$$

Für eine cylindrische Röhre von der Länge $= 1$, deren Wand in der Richtung von innen nach aussen von der Wärme durchdrungen wird, ist im Falle eines kreisförmigen Querschnitts, wenn d den inneren, D den äusseren Durchmesser bedeutet,

$$F = \pi d,\ F' = \pi D,\ y = \pi\,(d + 2x);\ \int_0^e \frac{dx}{y} = \frac{1}{2\pi}\, ln\, \frac{D}{d}$$

$$Q = \frac{\pi\,(t - t')}{\frac{1}{\alpha d} + \frac{1}{\alpha' D} + \frac{1}{2\lambda}\, ln\, \frac{D}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 5.$$

und im Falle eines quadratischen Querschnitts, wenn d und D die Quadratseiten innen und aussen bedeuten,

$$F = 4d,\ F' = 4D,\ y = 4\,(d + 2x);\ \int_0^e \frac{dx}{y} = \frac{1}{8}\, ln\, \frac{D}{d}$$

$$Q = \frac{4\,(t - t')}{\frac{1}{\alpha d} + \frac{1}{\alpha' D} + \frac{1}{2\lambda}\, ln\, \frac{D}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Geht die Wärme von aussen nach innen durch die Röhrenwand hindurch, so sind nur α und α' in Gl. (5) und (6) zu vertauschen.

Gl. (4) kann allgemein für eine Wand gelten, deren Dicke klein im Vergleich mit dem Krümmungsradius jedes Normalschnitts ihrer beiden Oberflächen ist. Setzt man dann einfacher

$$Q = kF(t - t'), \text{ so ist } \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} + \frac{e}{\lambda} \quad \ldots\ldots (7)$$

und heisst k der Wärmetransmissions-Coefficient der Wand. Hieraus und aus Gl. (2) folgt

$$\left.\begin{aligned} \tau &= t - \frac{k}{\alpha}(t - t') = \frac{(\alpha - k)\,t + kt'}{\alpha} \\ \tau' &= t' + \frac{k}{\alpha'}(t - t') = \frac{kt + (\alpha' - k)\,t'}{\alpha'} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Allgemein kann

$$Q = kF(t - t') = k'F'(t - t')$$

gesetzt werden, wenn die Ausdrücke der auf die Ein- oder Austrittsfläche F resp. F' bezogenen Transmissionscoefficienten k, k' der Gl. (3) resp. den besonderen Formen dieser Gleichung in Specialfällen entnommen werden. —

Von besonderen solchen Fällen, in denen Gl. (7) Anwendung finden kann, sind folgende bemerkenswerth:

1) Wenn die Wand dick und nicht gut leitend, d. h. λ klein ist, oder wenn α, α' gross sind, wie es namentlich dann der Fall ist, wenn die Wand von stark bewegten tropfbaren Flüssigkeiten berührt wird, so kann

$$k = \frac{\lambda}{e}; \quad \tau = t, \; \tau' = t' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

gesetzt werden.

2) Für eine dünne und gut leitende Wand, insbesondere für dünne Metallwände ist

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}; \quad k = \frac{\alpha\alpha'}{\alpha + \alpha'}; \quad \tau = \tau' = \frac{\alpha t + \alpha' t'}{\alpha + \alpha'} \quad \ldots (10)$$

zu setzen, und wenn insbesondere

3) zugleich α' verhältnissmässig gross ist, indem z. B. die Wand an der Austrittsseite der Wärme von stark bewegter tropfbarer Flüssigkeit berührt wird,

$$k = \alpha; \quad \tau = \tau' = \frac{\alpha}{\alpha'}\,t + t' \text{ wenig} > t' \quad \ldots\ldots (11).$$

Dieser Fall einer stark bewegten und somit die aufgenommene Wärme sehr schnell von der Wand wegführenden Flüssigkeit findet namentlich dann

statt, wenn dieselbe, wie z. B. das Wasser eines Dampfkessels, durch die (insbesondere von unten her) aufgenommene Wärme verdampft wird. Umgekehrt kann α besonders gross sein, wenn die wärmere Flüssigkeit Dampf ist, der durch Wärmeabgabe an der Wand condensirt wird. —

Vermittels dieser Grundsätze ist nun auch leicht der Wärmetransmissions-Coefficient einer zusammengesetzten Wand zu bestimmen. Eine solche bestehe aus n einzelnen an einander grenzenden Wänden von den Dicken $e_1, e_2 \ldots e_n$ von verschiedenen Stoffen mit den Leitungscoefficienten $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$; gewisse dieser Wände können auch beiderseits von festen Theilwänden eingeschlossene (tropfbare oder luftförmige) Flüssigkeitsschichten sein. Die Temperaturen der durch die zusammengesetzte Wand geschiedenen flüssigen Medien seien wieder t und t', diejenigen der Einströmungsflächen zunächst liegenden Oberflächenschichten der n Theilwände seien $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$. Dann ist die im Beharrungszustande durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit transmittirte Wärmemenge

$$Q = \alpha(t - \tau_1) = k_1(\tau_1 - \tau_2) = k_2(\tau_2 - \tau_3) \ldots = k_n(\tau_n - t')$$

$$\text{mit } \frac{1}{k_1} = \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_1};\ \frac{1}{k_2} = \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha_2} \ldots \frac{1}{k_n} = \frac{e_n}{\lambda_n} + \frac{1}{\alpha'},$$

unter α, α' die Wärmeübergangscoefficienten für die Eintrittsfläche der ersten und die Austrittsfläche der letzten, und unter α_m den Coefficienten des Wärmeüberganges aus der m^{ten} in die $(m+1)^{\text{te}}$ Theilwand verstanden. Aus diesen Gleichungen folgt

$$t = \tau_1 + \frac{Q}{\alpha};\ \tau_1 = \tau_2 + \frac{Q}{k_1};\ \tau_2 = \tau_3 + \frac{Q}{k_2} \ldots \tau_n = t' - \frac{Q}{k_n}$$

und daraus durch Addition:

$$t - t' = Q\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n}\right)$$

$$Q = k(t - t') \text{ mit } \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} + \sum_1^{n-1} \frac{1}{\alpha_m} + \sum_1^{n} \frac{e_m}{\lambda_m} \quad \ldots \text{ 1:}$$

§. 165. Erfahrungswerthe.

Die Wärmeleitungs-Coefficienten λ der Substanzen sind von verschiedenen Beobachtern theilweise sehr abweichend gefunden worden, auch sind sie bei einerlei Substanzen vermuthlich sehr variirend mit ihren besonderen Beschaffenheiten (Bearbeitung, Beimischungen, Zertheilungsgrad etc.). Die folgenden Zahlen sind verschiedenen Angaben als ungefähr

Durchschnittswerthe entnommen; besonders liegen ihnen die Angaben von Péclet zu Grunde. Sie beziehen sich auf das Meter als Längeneinheit (das Quadratmeter als Flächeneinheit) und die Stunde als Zeiteinheit.

	λ		λ
Kupfer	69	Tannenholz parallel zu den Fasern	0,17
Eisen und Zink	28	Desgl. senkr. zu den Fasern	0,10
Zinn	23	Sand	0,27
Blei	14	Zerstossene Coks	0,26
Coks	5	„ Ziegel	0,15
Marmor	2,8 — 3,4	Kreidepulver	0,09
Kalkstein	1,2 — 1,8	Holzasche	0,06
Glas	0,8	Wolle, Baumwolle, Flaum	0,04
Gebrannter Thon	0,6	Stagnirende Luft	0,04
Eichenholz	0,21		

In Betreff der Wärmeübergangs-Coefficienten α, α' findet noch grössere Unsicherheit statt wegen grösserer Mannichfaltigkeit der sie bedingenden Umstände, deren Einfluss bisher nur in ungenügender Weise ermittelt wurde. Vor Allem ist zu bemerken, dass sowohl der Eintritt der Wärme in die Wand wie ihr Austritt aus derselben theils durch Berührung, theils durch Strahlung vermittelt werden kann; die entsprechenden zwei Theile der übergehenden Wärme hängen beide von der Art der die Wand berührenden Flüssigkeit ab, ausserdem aber der erste besonders von der Bewegung der Flüssigkeit, d. h. von der Schnelligkeit, mit welcher die Flüssigkeitstheilchen, nachdem sie Wärme an die Wand abgegeben oder von ihr aufgenommen haben, durch andere Theilchen zur Wiederholung desselben Vorganges an der Wandfläche ersetzt werden, wogegen der durch Strahlung übergehende zweite Antheil Wärme wesentlich durch die Oberflächenbeschaffenheit der Wand bedingt wird. Als Flüssigkeiten sind hier besonders Wasser, gesättigter Wasserdampf und Luft von technischem Interesse; doch ist einstweilen nur für die letztere eine gesonderte Bestimmung der durch Berührung und durch Strahlung übergehenden Wärmemengen auf Grund der bekannten Erfahrungen möglich.

1) Besonders gross ist α resp. α' für den Uebergang der Wärme von gesättigtem Wasserdampf an eine Metallwand und von einer solchen an siedendes Wasser, vermuthlich in Folge des Umstandes, dass durch die mit der Wärmeabgabe an die Wand verbundene Condensation resp. durch die mit der Wärmeaufnahme von derselben verbundene Verdampfung eine besonders schnelle Erneuerung der die Wand berühren-

den, zur wiederholten Abgabe resp. Aufnahme von Wärme geschickten Flüssigkeitstheilchen vermittelt wird. Im Mittel nach zwei Beobachtungen von Thomas* wurden durch gesättigten Wasserdampf von 135° resp. 121°, der durch eine Wand aus dünnem Kupferblech von (unter atmosphärischem Druck) siedendem Wasser getrennt war, pro Quadratm. Wandfläche und für jeden Grad der Temperaturdifferenz (35° resp. 21°) von Dampf und Wasser stündlich 4,5 Kgr. des letzteren verdampft, woraus mit Rücksicht auf die Verdampfungswärme des Wassers nach §. 27, Gl. (6

$$k = 4{,}5\,(607 - 70{,}8) = 2413$$

folgen würde, also nach Gl. (10) im vorigen §., wenn in Ermangelung anderweitiger Anhaltspunkte $\alpha = \alpha'$ gesetzt wird,

$$\alpha = \alpha' = 2k = 4826.$$

Weil indessen hier trotz der kleinen Wanddicke e und des grossen Leitungscoefficienten λ von Kupfer das Glied $\frac{e}{\lambda}$ in Gl. (7) des vorigen §. nicht verschwindend klein gegen die selbst sehr kleinen Brüche $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{\alpha'}$ sein konnte, so sind letztere in der That noch etwas kleiner, α und α' noch etwas grösser, und mag bis auf Weiteres

$$\alpha = \alpha' = 5000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

in runder Zahl geschätzt werden können, bezogen immer auf Quadratm. und Stunde als Einheiten.

2) Erheblich kleiner sind die Coefficienten α und α' für den Uebergang der Wärme zwischen einer Metallwand und nicht siedendem Wasser. So fand Thomas, dass die eben erwähnte dünnwandige kupferne Röhre von $F = 8{,}97$ Quadratm. Wandfläche, wenn sie, von Wasser umgeben, von Wasserdampf durchströmt wurde, dessen Pressung 3 Atm., dessen Temperatur also $t = 134^0$ betrug, in 4 Minuten oder $z = \frac{1}{15}$ Stunde $G = 400$ Kgr. Wasser von $t_0' = 8^0$ bis $t_1' = 100^0$ zu erwärmen im Stande war.** Ist nun t' die variable Temperatur des Wassers in irgend einem Augenblick, dt' ihre Zunahme im Zeitelement dz, so ist die

* H. Valérius, les applications de la chaleur, Bruxelles, 1867, p. [illegible] Der Verfasser setzt die Wandfläche der von Thomas gebrauchten kupfernen Röhre = 4,45 Quadratm., giebt aber später an, dass sie 34 Millim. Radius und 42 Meter Länge gehabt habe. Indem danach ihre Wandfläche 8,97 Quadratm. betragen hätte, sind mit Rücksicht hierauf die a. a. O. mitgetheilten Rechnungsresultate corrigirt worden.

** H. Valérius a. a. O. p. 166.

während des letzteren die Wand durchdringende Wärmemenge bei Voraussetzung eines constanten Transmissionscoefficienten k (die specif. Wärme des Wassers beständig $= 1$ gesetzt):

$$dQ = kF(t - t')\,dz = G\,dt'$$

und folgt daraus:

$$kF\,dz = G\frac{dt'}{t - t'}; \quad k = \frac{G}{Fz}\,ln\,\frac{t - t_0'}{t - t_1'} = 876$$

und daraus nach Gl. (10) im vorigen §. mit $\alpha = 5000$:

$$\alpha' = 1060.$$

Uebrigens wird die Voraussetzung eines constanten Werthes von α', also von k, durch anderweitige Erfahrungen nicht bestätigt, vielmehr scheint dieser Uebergangscoefficient ausser mit der Bewegung des Wassers auch mit der Temperaturdifferenz $\varDelta$ (hier $= \tau' - t'$) desselben und der angrenzenden Wandschicht erheblich zu wachsen, vermuthlich auch mit der seine innere Beweglichkeit bedingenden Temperatur t' des Wassers allein. Letztere war bei obigem Versuch im Mittel $t' = 54^0$ und nach Gl. (10) im vorigen §. die Temperatur der Wand:

$$\tau = \tau' = \frac{5000 . 134 + 1060 . 54}{6060} = 120^0, \text{ also } \varDelta = 66^0.$$

Eine Erfahrung in Betreff des Falles, dass zwei wässerige, nicht siedende Flüssigkeiten von verschiedenen Temperaturen durch eine dünne Metallwand hindurch sich gegenseitig Wärme mittheilen, führt H. Valérius (a. a. O. p. 167) an. Indem nämlich längs einer solchen Wand von $F = 8$ Quadratm. Oberfläche auf der einen Seite Bierwürze behufs ihrer Kühlung und auf der anderen Seite im entgegengesetzten Sinn das dazu dienende Kühlwasser entlang strömte, wurde von Lacombe beobachtet, dass stündlich 600 Liter Würze von $t_0 = 100^0$ bis $t_1 = 22^0$ abgekühlt werden konnten durch 1000 Liter Wasser, das sich dabei von $t_0' = 18^0$ bis $t_1' = 65^0$ erwärmte.* Indem hiernach das Kühlwasser stündlich

$$Q = 1000\,(65 - 18) = 47000 \text{ Cal.}$$

aufnahm, und die Würze

$$600\,(100 - 22)\,c = 46800\,c \text{ Cal.}$$

d. h. ebenso viel abgab, wenn ihre specif. Wärme $c = 1{,}004$ gesetzt wird, würde aus Gl. (5) in §. 166 der wieder constant vorausgesetzte Transmissionscoefficient

----

* Die Angaben von Valérius: 6000 resp. 10000 Liter sind offenbar unrichtig und mussten in obiger Weise modificirt werden, um mit Valérius' eigener Folgerung zu stimmen.

$$k = \frac{Q}{F} \frac{ln(t_0 - t_1') - ln(t_1 - t_0')}{(t_0 - t_1') - (t_1 - t_0')} = 410$$

und aus Gl. (10) im vorigen §.:

$$\alpha = \alpha' = 2k = 820$$

folgen. Dabei war im Mittel:

$$t = 61^0,\ t' = 41{,}5^0,\ \tau = \tau' = \frac{t + t'}{2} = 51^0;\ \Delta = t - \tau = \tau' - t' = 10^0$$

Nach Péclet wäre α resp. α' für so kleine Temperaturdifferenzen Δ weniger gross, nämlich für den durch eine dünne Metallwand vermittelten Wärmeaustausch zwischen Wasser und Wasser

$$k = 100 \text{ bis } 300 \text{ für } t - t' = 10 \text{ bis } 24^0,$$

$$\text{also } \alpha = \alpha' = 200 \text{ bis } 600 \text{ für } \Delta = 5 \text{ bis } 12^0$$

zu setzen. Der Gesammtheit der vorliegenden Erfahrungen gemäss mag einstweilen

$$\alpha = \alpha' = 400 + 10\Delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

gesetzt werden, vorbehaltlich einer Vergrösserung oder Verkleinerung dieses Werthes nach Schätzung, jenachdem das Wasser mehr oder weniger heftig bewegt ist.

3) Das Gesetz des Wärmeaustritts aus einer von Luft (und anderen Gasen, die hier nicht weiter interessiren) berührten festen Wand ist namentlich von Dulong und Petit näher untersucht worden, freilich unter solchen Umständen, dass die gefundenen Resultate nur mit Vorsicht auf die in der technischen Praxis vorkommenden Fälle anwendbar erscheinen. Ein grösseres zuvor erhitztes Quecksilberthermometer wurde in einen innen berussten, aussen durch Wasser von constanter Temperatur berührten und somit selbst sehr nahe auf dieser Temperatur erhaltenen Ballon von Kupferblech eingehängt und am sinkenden Stande des Thermometers bei verschiedenen Oberflächenbeschaffenheiten der Thermometerkugel die Abnahme ihrer Temperatur im Verlauf der Zeit beobachtet, während der Ballon zuerst mit Luft (oder einem anderen Gase) von einer gewissen Pressung erfüllt war und dann der Versuch mit luftleer gemachtem Ballon wiederholt wurde, um so den in beiden Fällen gleichen, im letzteren Falle aber allein wirksamen Einfluss der Strahlung gesondert zu bestimmen und endlich durch Subtraction vom Gesammtresultat des ersten Falles auch den Einfluss der Luftberührung getrennt von dem der Strahlung zu finden. Diesen Versuchen zufolge kann die Wärmemenge W, die ein fester Körper stündlich pro Quadratmeter seiner Oberfläche bei der Temperatur t verliert, wenn er von einem luftförmigen Medium be-

rührt wird, dessen Temperatur $t' < t$ ist, und wenn er zugleich an dem betreffenden Theil seiner Oberfläche sich in Wärmeaustausch durch Strahlung mit einer das luftförmige Medium einschliessenden Wand von der Oberflächentemperatur $t'' < t$ befindet, ausgedrückt werden durch

$$Q = 0{,}55\, b\, (t - t')^{1{,}233} + 125\, s \left(1{,}0077^{t} - 1{,}0077^{t''}\right) \ldots (3).$$

Der erste Theil dieses Ausdrucks mit dem von der Art, Dichtigkeit und Bewegung des luftförmigen Mediums abhängigen Coefficienten b betrifft den Wärmeverlust durch Berührung, der zweite mit dem von der Oberflächenbeschaffenheit des Körpers abhängigen Coefficienten s den Einfluss der Strahlung, und zwar das positive Glied mit dem Factor $1{,}0077^{t}$ die vom Körper ausgestrahlte, das negative Glied mit dem Factor $1{,}0077^{t''}$ die von der äusseren Wand zurückgestrahlte Wärme. Wenn das luftförmige Medium nicht in gleichartiger Weise ringsum begrenzt wäre, so müsste unter t'' eine zugleich mit Rücksicht auf die verschiedenen Strahlungsvermögen der Bestandtheile abzuschätzende mittlere Temperatur der Begrenzung verstanden werden; insbesondere für die Strahlung in den Weltraum könnte $1{,}0077^{t''}$ als verhältnissmässig klein vernachlässigt werden.

Die Versuche von Dulong und Petit umfassten Temperaturdifferenzen $t - t'$ resp. $t - t''$ bis 260°. Für Temperaturen bis 200° wird die Benutzung ihrer Formel durch folgende Tabelle erleichtert.

t	$1{,}0077^{t}$	$t^{0{,}233}$	t	$1{,}0077^{t}$	$t^{0{,}233}$	t	$1{,}0077^{t}$	$t^{0{,}233}$	t	$1{,}0077^{t}$	$t^{0{,}233}$
10	1,080	1,710	60	1,584	2,596	110	2,325	2,990	160	3,412	3,263
20	1,165	2,010	70	1,711	2,691	120	2,510	3,051	170	3,684	3,309
30	1,259	2,209	80	1,847	2,776	130	2,711	3,108	180	3,978	3,353
40	1,359	2,362	90	1,994	2,853	140	2,927	3,163	190	4,295	3,396
50	1,467	2,488	100	2,153	2,924	150	3,160	3,214	200	4,637	3,437

Für Temperaturdifferenzen bis etwa 60° kann nach Péclet gesetzt werden:

$$Q = \beta\,(t - t') + \sigma\,(t - t'') \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\text{mit } \beta = b\,[1 + 0{,}0075\,(t - t')] \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{und } \sigma = s\,(0{,}9556 + 0{,}0037\,t'')\,[1 + 0{,}0056\,(t - t'')] \\ \quad \text{oder noch einfacher } \sigma = s\,[1 + 0{,}0056\,(t - t'')] \end{array}\right\} \ldots\ldots (6).$$

Gewöhnlich sind die Umstände von solcher Art, dass t'' entweder $= t$ oder $= t'$ gesetzt werden kann. Bezeichnet dann α' den resultirenden Wärmeübergangscoefficienten der Formeln des vorigen §., entsprechend der

Gleichung $Q = \alpha'\varDelta$, unter $\varDelta$ die Temperaturdifferenz des Körpers und der Luft an ihrer Berührungsfläche verstanden, so ist

$$\text{für } t'' = t : \alpha' = \beta = b(1 + 0{,}0075\,\varDelta) \;\ldots\ldots\; 7.$$

$$\text{für } t'' = t' : \alpha' = \beta + \sigma = b + s + \frac{75\,b + 56\,s}{10000}\,\varDelta \;\ldots$$

Die Erwärmung der Luft durch Berührung mit einer wärmeren Wand verursacht einen längs derselben aufsteigenden Luftstrom, für welchen t' von unten nach oben zunimmt, also $\varDelta$ abnimmt. Dadurch ist es erklärlich, dass Péclet den Coefficienten b von der Gestalt und den Dimensionen der die Wärme abgebenden Wand abhängig fand. Für atmosphärische Luft von gewöhnlicher Dichtigkeit drückte er b durch verschiedene empirische Formeln aus für eine verticale ebene, eine horizontale oder verticale cylindrische und eine kugelförmige Wand, denen zufolge b im Allgemeinen zwischen den Grenzen 2 und 4 liegen würde, abnehmend mit wachsender Grösse, insbesondere mit wachsender Höhe der Wand, wenn unter t' die Temperatur an der tiefsten Stelle der Wand verstanden wird. Indessen ist es doch hauptsächlich die stärkere oder schwächere Bewegung (stete Erneuerung) der Luft an der Körperoberfläche, die den Coefficienten b beeinflusst und die auch von anderen Umständen, als von der Gestalt und den Dimensionen der Wand abhängt, z. B. in freier atmosphärischer Luft in höherem Grade stattfindet, als in eingeschlossener Zimmerluft. Auch ist zu bemerken, dass nach Péclet's Versuchsmethode seine Uebergangscoefficienten α' eigentlich zusammengesetzte Transmissionscoefficienten sind, betreffend den Uebergang der Wärme aus beständig bewegtem Wasser durch eine dünne Metallwand in Luft, und wenn hier auch der Widerstand gegen den Eintritt der Wärme aus dem Wasser in die Wand und gegen ihre Leitung durch die Wand verhältnissmässig klein waren, so musste doch immerhin die Temperatur der Wand an ihrer die Luft berührenden Oberfläche etwas kleiner, als die von Péclet dafür gesetzte Wassertemperatur sein, und somit α' etwas zu klein gefunden werden. In der That ist nach anderweitigen Angaben* $b = 3$ bis 6 zu setzen, und zwar im Durchschnitt:

$$b = 4 \text{ für eingeschlossene, } b = 5 \text{ für freie Luft} \;\ldots\ldots$$

wenn unter t' die Lufttemperatur in mässiger Entfernung vom Körper verstanden wird.

* H. Valérius (les applications de la chaleur) nach Ser (Cours de physique industrielle de l'Ecole des arts et manufactures à Paris

Die Art der Oberfläche bedingt den Coefficienten b nicht merklich, sehr wesentlich dagegen den Strahlungscoefficienten s, dessen Werthe nach Péclet der folgenden Tabelle zu entnehmen sind.

	s		s
Kupfer	0,16	Oxydirtes Eisen	3,36
Zinn	0,22	Kohlenstaub	3,42
Zink	0,24	Holz, Gyps, Bausteine	3,60
Blankes Messing	0,26	Baumwollenzeug	3,65
Polirtes Eisenblech	0,45	Wollen- u. Seidenstoff, Oelanstrich	3,7
Gewöhnliches Eisenblech	2,77	Papier	3,8
Glas	2,91	Russ	4,0
Neues Gusseisen	3,17	Wasser	5,3

Was endlich den umgekehrten Fall des Wärmeeintritts in einen von Luft berührten festen Körper betrifft, so ist die übergehende Wärme in Ermangelung specieller Erfahrungen derjenigen gleich zu setzen, welche aus der Körperoberfläche austräte, wenn ihre Temperatur mit derjenigen der Luft resp. (in Betreff der Strahlung) mit der mittleren Oberflächentemperatur der diese Luft begrenzenden Wände vertauscht würde, eine Regel, die von Péclet wenigstens bei mässigen Temperaturdifferenzen als hinlänglich zutreffend erkannt wurde. Im Widerspruch damit scheint sich freilich die besonders durch Versuche von Noeggerath * constatirte Thatsache zu befinden, dass, während der Wärmeübergang von einer festen Wand an Luft durch Berührung erfahrungsmässig nicht merklich durch die Oberflächenbeschaffenheit der Wand beeinflusst wird, die Wärmetransmission aller derjenigen Theile einer von den Heizgasen einer Feuerung berührten Metallwand, die dem Einflusse der Wärmestrahlung des Feuers nicht unmittelbar ausgesetzt sind (indirecte Heizfläche), durch Berussung dieser Wand an ihrer den Heizgasen zugekehrten Oberfläche sehr erheblich vermindert wird, dass insbesondere Heizgase von weniger als 400° Temperatur kaum nennenswerthe Wärmemengen durch berusste Metallwände transmittiren. Indessen mag diese Thatsache hauptsächlich in der sehr geringen Wärmeleitungsfähigkeit der lockeren Russschicht ihren Grund haben. —

Zur Anwendung der hier mitgetheilten Erfahrungen auf die Bestimmung der Wärmetransmission durch einfache und zusammengesetzte Wände

* „Ueber den Einfluss der Berussung der Dampfkessel und Siedepfannen auf den Heizeffect". Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1865. S. 66.

von besonderer Beschaffenheit werden spätere Theile dieses Werkes Gelegenheit bieten.

§. 166. Heizflächen.

Unter einer Heizfläche soll hier allgemein die Scheidewand von zwei ungleich warmen (tropfbaren oder luftförmigen) Flüssigkeiten verstanden werden, welche den Wärmeübergang von der einen zur anderen dieser beiden Flüssigkeiten vermittelt, einerlei ob die Abkühlung resp. Condensation der ersten oder die Erwärmung resp. Verdampfung der zweiten dadurch bezweckt wird. Es ist dann die Aufgabe, die Grösse $= F$ der Heizfläche zu berechnen, die nöthig ist, um in der Zeiteinheit eine gegebene Wärmemenge $= Q$ durchzulassen bei Voraussetzung eines Beharrungszustandes der Art, dass an jeder Stelle der Heizfläche die Temperaturen t und t' ($t > t'$) der beiderseits angrenzenden Flüssigkeiten unveränderlich sind. Wenn dabei, wie es hier immer geschehen soll, der Wärmetransmissions-Coefficient k für alle Elemente der Heizfläche gleich gesetzt resp. näherungsweise für die ganze Heizfläche mit demselben Mittelwerth in Rechnung gebracht wird, so ergiebt sich nach §. 164, Gl. (7) sofort

$$F = \frac{Q}{k(t - t')} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

falls t und t' nicht nur an jeder einzelnen Stelle der Heizfläche unveränderlich, sondern auch an allen Stellen gleich gross sind.

Wenn aber die Temperaturen t und t' an verschiedenen Stellen der Heizfläche verschieden sind, so ist eine besondere Rechnung nöthig, die natürlich voraussetzt, dass jene Verschiedenheit ein mathematisch ausdrückbares Gesetz befolgt, wie es namentlich dann der Fall ist, wenn die Flüssigkeiten nach parallelen Richtungen längs der lang gestreckten Heizfläche hin fliessen. Unter dieser Voraussetzung nehme längs der ganzen Heizfläche und für jede Flüssigkeit im Sinne ihrer strömenden Bewegung die Temperatur

der wärmeren von t_0 bis t_1 ab,

der anderen von t_0' bis t_1' zu.

Beide Flüssigkeiten seien von solcher Art, dass ihre specifischen Wärmen c, c', die hier stets als solche für constante Pressung zu verstehen sind, als unabhängig von ihren variablen Wärmezuständen betrachtet werd-

können. Denkt man sich die beiden Flüssigkeitsströme durch correspondirende (denselben Durchschnittslinien mit der Heizfläche entsprechende) unendlich nahe Querschnitte geschnitten, so theilen dieselben die Heizfläche in unendlich schmale Elemente dF und die Wandflächen der Canäle, in denen die beiden Flüssigkeiten strömend zu denken sind, in Elemente dW und dW'; von diesen zwischen denselben zwei Schnittflächen enthaltenen Wandflächenelementen dW und dW' ist dF im Allgemeinen nur ein Theil, nämlich der beiden gemeinschaftliche Theil. An den übrigen Theilen $= dW - dF$ und $dW' - dF$ können die Flüssigkeiten Wärmeverluste nach aussen erleiden, von denen dann aber vorausgesetzt werden soll, dass sie, in der Zeiteinheit beziehungsweise $= w dQ$ und $= w' dQ$, als überall gleiche Theile der durch dF in der Zeiteinheit übertragenen viel grösseren Wärme dQ betrachtet werden können, dass also w und w' kleine constante Brüche sind.

Unter diesen Voraussetzungen ist nun, wenn t und t' die Temperaturen der zwei Flüssigkeiten beiderseits von dF sind, und wenn $-dt$ die Temperaturabnahme der wärmeren Flüssigkeit längs dF ist,

$$dQ = k dF (t - t') \text{ und } \frac{dQ}{Q} = \frac{-dt}{t_0 - t_1},$$

$$\text{also } dF = \frac{-Q dt}{k(t_0 - t_1)(t - t')} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Um in dieser Gleichung behufs ihrer Integration t' durch t auszudrücken, werde zunächst angenommen, dass sich beide Flüssigkeiten in gleichem Sinn an der Heizfläche entlang bewegen. An demselben Theil der letzteren entsprechen sich dann die Temperaturabnahme $= t_0 - t$ der einen und die Temperaturzunahme $= t' - t_0'$ der anderen Flüssigkeit; beide haben gemäss den oben erklärten Voraussetzungen für jeden Theil der Heizfläche dasselbe Verhältniss zu einander:

$$\frac{t' - t_0'}{t_0 - t} = \frac{t_1' - t_0'}{t_0 - t_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Daraus folgt: $$\frac{t_0 - t + t' - t_0'}{t_0 - t} = \frac{t_0 - t_1 + t_1' - t_0'}{t_0 - t_1}$$

oder mit $\Delta_0 = t_0 - t_0'$ und $\Delta_1 = t_1 - t_1'$: $$\frac{t - t' - \Delta_0}{t - t_0} = \frac{\Delta_0 - \Delta_1}{t_0 - t_1},$$

und die Substitution des hieraus folgenden Ausdrucks von

$$(t_0 - t_1)(t - t') = (\Delta_0 - \Delta_1)(t - t_0) + \Delta_0 (t_0 - t_1)$$
$$= (\Delta_0 - \Delta_1) t + \Delta_1 t_0 - \Delta_0 t_1$$

in Gl. (2) ergiebt durch Integration:

$$F = \frac{Q}{k(\varDelta_0 - \varDelta_1)} \ln \frac{(\varDelta_0 - \varDelta_1)t_0 + \varDelta_1 t_0 - \varDelta_0 t_1}{(\varDelta_0 - \varDelta_1)t_1 + \varDelta_1 t_0 - \varDelta_0 t_1} = \frac{Q}{k(\varDelta_0 - \varDelta_1)} \ln \frac{\varDelta_0}{\varDelta_1}$$

$$\text{oder } F = \frac{Q}{k} \frac{\ln \frac{t_0 - t_0'}{t_1 - t_1'}}{(t_0 - t_0') - (t_1 - t_1')} = F_{ab} \quad \ldots\ldots (4,$$

indem zur Unterscheidung und Vergleichung verschiedener Fälle diese demselben Strömungssinne beider Flüssigkeiten entsprechende Heizfläche mit F_{ab} bezeichnet werden soll.

Im Falle entgegengesetzten Strömungssinnes der beiden Flüssigkeiten sei sie mit F_{ba} bezeichnet. Indem sich dann an demselben Theile der Heizfläche die Temperaturabnahme $= t_0 - t$ der einen und die Temperaturzunahme $= t_1' - t'$ der anderen Flüssigkeit entsprechen und somit

$$\frac{t_1' - t'}{t_0 - t} = \frac{t_1' - t_0'}{t_0 - t_1}$$

ist, eine Gleichung, die aus Gl. (3) durch Vertauschung von t_0' und t_1' hervorgeht, ergiebt sich durch dieselbe Vertauschung aus Gl. (4):

$$F = \frac{Q}{k} \frac{\ln \frac{t_0 - t_1'}{t_1 - t_0'}}{(t_0 - t_1') - (t_1 - t_0')} = F_{ba} \quad \ldots\ldots\ldots (5.$$

Wenn nur die Wärme abgebende Flüssigkeit in strömender Bewegung längs der Heizfläche begriffen, die Temperatur t' der anderen aber constant und überall gleich ist, indem sie eine stetige Erneuerung durch Abfluss erwärmter (t' Grad warmer) und Zufluss kälterer Flüssigkeit erfährt, die sich mit der übrigen mischt, so ergiebt sich aus Gl. (4) oder (5) mit $t_0' = t_1' = t'$:

$$F = \frac{Q}{k} \frac{\ln \frac{t_0 - t'}{t_1 - t'}}{t_0 - t_1} = F_a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6.$$

Wenn endlich nur die Wärme empfangende Flüssigkeit eine strömende Bewegung längs der Heizfläche hat, die Temperatur t der anderen dagegen in Folge stetiger Erneuerung durch Abfluss abgekühlter (t Grad warmer) und Zufluss wärmerer, mit der übrigen sich mischender Flüssigkeit constant und überall gleich ist, so folgt aus Gl. (4) oder (5) mit $t_0 = t_1 = t$:

$$F = \frac{Q}{k} \frac{\ln \frac{t - t_0'}{t - t_1'}}{t_1' - t_0'} = F_b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7.$$

Schliesslich kann Gl. (1) aus Gl. (6) mit $t_0 = t_1 = t$ oder aus Gl. (7) mit $t_0' = t_1' = t'$ erhalten werden, wenn nur das bekannte Verfahren angewendet wird, um den zunächst in unbestimmter Form:

$$F = \frac{Q}{k}\frac{0}{0}$$

erscheinenden Ausdruck seiner Bedeutung nach zu bestimmen.

Wenn M Kgr. die Gewichtsmenge der Wärme abgebenden Flüssigkeit ist, die in der Zeiteinheit mit der Temperatur t_0 zufliesst und mit t_1 ($= t$ in den Fällen von Gl. 1 und 7) abfliesst, ferner M' Kgr. die Gewichtsmenge der Wärme empfangenden Flüssigkeit, die in der Zeiteinheit mit der Temperatur t_0' zufliesst und mit t_1' ($= t'$ in den Fällen von Gl. 1 und 6) abfliesst, so ist mit Rücksicht auf die oben erklärten Bedeutungen von c, c' und w, w':

$$Q = \frac{Mc\,(t_0 - t_1)}{1 + w} = \frac{M'c'\,(t_1' - t_0')}{1 - w'} \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

Würde die erste Flüssigkeit bei ihrer Abkühlung bis t_1 condensirt, so wäre im Zähler des ersten Ausdrucks von Q die betreffende Condensationswärme hinzuzufügen; mit dem Beginn dieser Condensation bliebe t constant $= t_1$, und wäre dann die Heizfläche — ausser in den Fällen von Gl. (1) und (7) — in zwei besonders zu berechnende Theile von verschiedenen Wirkungsweisen zu zerlegen. Würde die zweite Flüssigkeit bei der Erwärmung bis t_1' verdampft, so wäre im Zähler des zweiten Ausdrucks (8) von Q die betreffende Verdampfungswärme hinzuzufügen; mit dem Beginn dieser Verdampfung bliebe t' constant $= t_1'$, und wäre dann — ausser in den Fällen von Gl. (1) und (6) — wieder eine entsprechende Zerlegung der Heizfläche nöthig.

Ein Beispiel mag die Verschiedenheit der Grösse erkennen lassen, die zur Erreichung desselben Heizzweckes den betrachteten 5 Arten von Heizflächen zu geben ist, nämlich den Heizflächen F, F_a, F_b, F_{ab} und F_{ba}, unter F ohne Index hier die Heizfläche nach Gl. (1) entsprechend dem Falle verstanden, dass auf der einen Seite überall und beständig die Minimaltemperatur der Wärme abgebenden, auf der anderen überall und beständig die Maximaltemperatur der Wärme aufnehmenden Flüssigkeit stattfindet. Es sei z. B. der Gebläsewind eines Hochofens von $t_0' = 20°$ bis $t_1' = 300°$ zu erwärmen durch die einer (die Heizfläche nicht direct bestrahlenden) Feuerung entstammenden Heizgase, die sich dabei von $t_0 = 1000°$ bis resp. $t_1 = 300°$, $400°$, $500°$, $600°$ abkühlen sollen. Mit $\frac{Q}{k} = 100000$ ergeben sich dann folgende relative Grössen der betreffenden Heizflächen.

	F	F_a	F_b	F_{ab}	F_{ba}
$t_1 = 300^0$	∞	∞	∞	∞	218
$t_1 = 400^0$	1000	324	477	259	191
$t_1 = 500^0$	500	251	313	204	171
$t_1 = 600^0$	333	212	235	174	157

Da ein Element der Heizfläche in einer gewissen Zeit um so mehr Wärme durchlässt, je höher die Temperatur auf der einen Seite und je niedriger sie auf der anderen Seite ist, so muss es zur Verkleinerung der nöthigen Heizflächengrösse beitragen, wenn die Wärme abgebende Flüssigkeit schon mit ihrer Maximaltemperatur t_0, die andere schon mit ihrer Minimaltemperatur t_0' die Heizfläche berührt, d. h. wenn längs derselben sowohl die eine wie die andere Flüssigkeit in strömender Bewegung begriffen ist. Jedenfalls sind deshalb unter übrigens gleichen Umständen die Heizflächen F_{ab} und F_{ba} kleiner als F_a und F_b, letztere kleiner als F und es kann nur noch die Vergleichung von F_{ab} mit F_{ba}, sowie von F_a mit F_b in Frage kommen. Was erstere betrifft, so ist nach Gl. (4) mit

$$t_0 + t_1 = s,\ t_0 - t_1 = d;\quad t_0' + t_1' = s',\ t_1' - t_0' = d',$$

wo s, d, s', d' und $s - s'$ positive Grössen sind,

$$F_{ab} = \frac{Q}{k(d + d')}\, ln\, \frac{t_0 - t_0'}{t_1 - t_1'}$$

oder wegen $ln\, x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right]$

mit $x = \frac{t_0 - t_0'}{t_1 - t_1'}$, also $\frac{x-1}{x+1} = \frac{t_0 - t_0' - t_1 + t_1'}{t_0 - t_0' + t_1 - t_1'} = \frac{d + d'}{s - s'}$

$$F_{ab} = \frac{2Q}{k(s - s')}\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{d + d'}{s - s'}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{d + d'}{s - s'}\right)^4 + \ldots\right].$$

Indem hieraus F_{ba} durch Vertauschung von t_0' mit t_1', also von d' mit $-d'$ hervorgeht, ergiebt sich $F_{ba} < F_{ab}$. Was aber F_a und F_b betrifft, so ist nicht immer, wie bei obigen Beispielen, $F_a < F_b$; es kann auch $F_a > F_b$ sein, wenn $d' = t_1' - t_0'$ verhältnissmässig gross ist. Wenn z. B. der Gebläsewind von $t_0' = 20^0$ bis $t_1' = 500^0$ zu erwärmen wäre durch Heizgase, die sich bei von $t_0 = 1000^0$ bis $t_1 = 600^0$ abkühlen, so wären

$$\text{mit } \frac{Q}{k} = 100000 : F_a = 402,\ F_b = 366.$$

Allgemein ist also nur

$$F > \binom{F_a}{F_b} > F_{ab} > F_{ba} \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

und zwar wachsen die Unterschiede dieser Heizflächengrössen mit den Temperaturdifferenzen $t_0 - t_1$ und $t_1' - t_0'$. —

Wenn es die gasförmigen Verbrennungsproducte einer Feuerung (Heizgase) sind, die als Wärme abgebende Flüssigkeit mit der Heizfläche in Berührung kommen, so kann es der Fall sein, dass letztere wenigstens theilweise als sogenannte directe Heizfläche der Bestrahlung durch den glühenden Brennstoff und die Flamme ausgesetzt ist. Ausser der in obigen Formeln vorkommenden Wärmemenge Q, die hier auf die Stunde als Zeiteinheit bezogen werde, überträgt dann in Folge jener Strahlung die Heizfläche stündlich noch die Wärmemenge $s\eta_1 KB$, unter s einen erfahrungsmässigen Coefficienten (§. 161), η_1 den Wirkungsgrad der Feuerung, K den Heizeffect des Brennstoffes und B die stündlich verbrannte Gewichtsmenge desselben verstanden, und ist also die stündlich im Ganzen durch die Heizfläche übertragene Wärme:

$$W = Q + s\eta_1 KB.$$

Das Verhältniss derselben zu der in der Feuerung stündlich nutzbar entwickelten Wärme kann der Wirkungsgrad der Heizfläche, und ihr Verhältniss zum Heizeffect des stündlich verbrannten Brennstoffs der resultirende Wirkungsgrad der Heizanlage genannt werden. Wird ersterer mit η_2, letzterer mit η bezeichnet, so ist also

$$\eta_2 = \frac{W}{\eta_1 KB};\ \eta = \frac{W}{KB} = \eta_1\eta_2 \quad \ldots\ldots\ldots (10).$$

Ist W gegeben, so ist in den Gleichungen (1) bis (8) zu setzen:

$$Q = W - s\eta_1 KB = \left(1 - \frac{s}{\eta_2}\right) W \quad \ldots\ldots\ldots (11).$$

Die Anfangstemperatur t_4 der Heizgase ist die Summe der durch den Verbrennungsprocess hervorgebrachten Temperaturerhöhung und der allein aus der Mischung des Brennstoffs mit der hinzutretenden Verbrennungsluft resultirenden Temperatur τ. Wird also mit G die Gewichtsmenge der gasförmigen Verbrennungsproducte pro 1 Kgr. Brennstoff bezeichnet, die auch im Falle eines festen Brennstoffs ohne in Betracht kommenden Fehler $= mL + 1 =$ der Gewichtsmenge aller Verbrennungsproducte gesetzt werden kann, so ist nach §. 161, Gl. (1):

$$t_4 - \tau = \frac{(1 - s)\,\eta_1 K}{Gc} \quad \ldots\ldots\ldots (12).$$

Hiermit und mit $M = BG$ ergiebt sich nach Gl. [illegible]:

$$Q = \frac{BGc\,(t_0 - t_1)}{1 + w} \quad \frac{1 - s}{1 - u}\,\frac{t_4 - t_1}{t_4 - \tau}\,\eta_1 KB$$

und somit für den Wirkungsgrad der Heizfläche der Ausdruck:

$$\eta_2 = \frac{Q + s\eta_1 KB}{\eta_1 KB} = \frac{1-s}{1+w}\,\frac{t_0 - t_1}{t_0 - \tau} + s \quad \ldots\ldots 13$$

Ihm zufolge ist η_2 um so grösser, je kleiner w (d. h. der verhältnissmässige Wärmeverlust durch solche Wandtheile des Heizcanals, die nicht als Heizfläche dienen), ferner je kleiner t_1 und, sofern $\tau < t_1$, je grösser t_0 und je grösser s ist. Die Vortheilhaftigkeit der Vergrösserung von s wird indessen durch den Umstand vermindert, dass damit t_0 abnimmt, vielleicht auch η_1 (bei übermässiger Verkleinerung von t_0 im Falle eines Brennstoffs von geringer Qualität). Die Vortheilhaftigkeit der Verkleinerung von t_1 wird begrenzt und vermindert theils durch die Rücksicht auf die Zugwirkung der Esse, theils durch den Umstand, dass mit abnehmender Endtemperatur t_1 der Heizgase die erforderliche Heizfläche grösser (die Anlage somit theuerer) wird, und zwar in höherem Grade, als t_1 abnimmt, da zur Transmission gleicher Wärmemengen um so grössere Heizflächentheile nöthig werden, je mehr die Heizgase schon abgekühlt sind.

Meistens, insbesondere bei Dampfkesselanlagen im Beharrungszustande, wenn das Kesselmauerwerk eine constante Temperatur angenommen hat, sind w und $\frac{\tau}{t_0}$ klein genug, um ohne erheblichen Fehler

$$(1+w)\left(1-\frac{\tau}{t_0}\right) = 1$$

setzen zu können. Dann ist nach Gl. (13):

$$\eta_2 = (1-s)\left(1-\frac{t_1}{t_0}\right) + s = 1 - (1-s)\frac{t_1}{t_0} \quad \ldots\ldots 14$$

und somit nach Gl. (11):

$$\frac{Q}{W} = 1 - \frac{s}{\eta_2} = \frac{t_0 - t_1}{\frac{t_0}{1-s} - t_1} \quad \ldots\ldots 15$$

§. 167. Berechnungsmethode einer Heizanlage.

Für die Berechnung einer zu entwerfenden Heizanlage ist die durch die Heizfläche stündlich zu übertragende Wärmemenge W als gegeben resp. durch die Bedingungen der Aufgabe bestimmt vorauszusetzen, desgl. die Anfangstemperatur t_0' und Endtemperatur t_1' der dadurch zu erwärmenden und event. zu verdampfenden Flüssigkeit. Durch die ferner gegebene Be-

des Brennstoffs sind dessen Heizeffect K (§. 159), sowie nach §. 160 die zu vollkommener Verbrennung von 1 Kgr. desselben nöthige Luftmenge $= L$ Kgr. und die specifische Wärme c der Verbrennungsproducte bestimmt, wenn für den Factor m der thatsächlich für 1 Kgr. Brennstoff verwendeten Luftmenge $= m\,L$ Kgr. ein erfahrungsmässiger Werth angenommen wird. Angaben in dieser Beziehung sowie in Betreff des gleichfalls erfahrungsmässig anzunehmenden Strahlungscoefficienten s und des Wirkungsgrades η_1 der Feuerung müssen der Besprechung besonderer Arten von Feuerungsanlagen vorbehalten werden. Das Verhältniss w des stündlichen Wärmeverlustes der Heizgase zu der durch die Heizfläche (ausser durch die Wärmestrahlung der Feuerung) stündlich übertragenen Wärmemenge Q, sowie der Transmissionscoefficient k der Heizfläche sind mit Rücksicht auf §. 164 und 165 in jedem einzelnen Fall zu bestimmen resp. auf Grund von Specialerfahrungen in Betreff analoger Fälle anzunehmen.

Am meisten Ueberlegung erfordert die angemessene Wahl der Temperatur t_1, mit der die Heizgase die Heizfläche verlassen sollen. Je kleiner t_1, desto grösser η_2, also $\eta = \eta_1 \eta_2$ und desto kleiner der Bedarf an Brennstoff; je grösser aber t_1, desto kleiner die erforderliche Heizfläche und die Esse (behufs einer ausreichenden Zugwirkung), desto billiger also die Anlage. Hiernach giebt es einen gewissen Werth von t_1, durch welchen die Summe des jährlichen Geldaufwandes für Brennstoff sowie für Verzinsung und Amortisation des Capitals zur Herstellung der Anlage ein Minimum wird; die möglichst angenäherte Bestimmung dieses vortheilhaftesten Werthes von t_1 ist aber wegen der nöthigen Rücksichtnahme auf die obwaltenden Umstände natürlich nur für gewisse Arten von Heizanlagen gesondert ausführbar. Im Allgemeinen lässt sich nur sagen, dass t_1 um so grösser angenommen werden muss, je billiger der Brennstoff, je weniger andauernd der Betrieb, je theurer die Anlage und je mehr die zulässige Grösse der Heizfläche (wie z. B. bei Locomotiven) durch die Rücksicht auf Raum und Gewicht beschränkt ist, ferner je näher die Art der betreffenden Heizfläche am Anfang der Reihe (9) steht und je grösser die gegebene Endtemperatur t_1' der zu erwärmenden Flüssigkeit (überhaupt die verlangte Temperatur in dem Raum jenseits der Heizwand) ist. Ausser im Falle einer sogenannten Gegenstromheizfläche (F_{b4}) muss jedenfalls $t_1 > t_1'$ sein, da für $t_1 = t_1'$ die erforderliche Heizfläche schon unendlich gross würde, und ist danach eine Gegenstromheizfläche besonders bei grossen Werthen von t_1' von erheblichem Vortheil. Inwiefern die Zugwirkung einer Esse durch die Temperatur t_1 der in sie abziehenden Heizgase bedingt ist, wird im Folgenden erörtert.

Mit einem angenommenen Werth von t_1 und sofern auch die ursprüng-liche Mischungstemperatur τ von Brennstoff und Verbrennungsluft als gegeben vorauszusetzen ist (bei gewöhnlichen Rostfeuerungen für feste Brennstoffe = einer mittleren atmosphärischen Lufttemperatur), findet man die Temperatur im Feuerraum:

$$t_0 = \tau + \frac{(1-s)\eta_1 K}{Gc} \text{ nach §. 166, Gl. (12) mit } G = mL + 1$$

und den Wirkungsgrad der Heizfläche:

$$\eta_2 = \frac{1-s}{1+w}\,\frac{t_0 - t_1}{t_0 - \tau} + s \text{ nach §. 166, Gl. (13).}$$

Ist ferner B_1 Kgr. die pro Quadratm. Rostfläche stündlich zu verbrennende Brennstoffmenge (§. 162), so ergiebt sich die stündlich im Ganzen erforderliche Menge desselben = B Kgr. und die dazu nöthige Grösse der Rostfläche = R Quadratm.

$$\text{mit } \eta = \eta_1\eta_2 : B = \frac{W}{\eta K} \text{ und } R = \frac{B}{B_1}$$

und sind dann mit Rücksicht auf die in §. 162 erörterten Gesichtspunkte auch die übrigen Dimensionen des Herdes festzusetzen. Die der Aufgabe entsprechende Heizflächengrösse ist endlich durch die betreffende der Gleichungen (1) resp. (4) bis (7) des vorigen §. bestimmt, wenn darin nach Gl. (11) daselbst

$$Q = \left(1 - \frac{s}{\eta_2}\right) W$$

gesetzt wird. Diese Wärme Q wird zwar unabhängig von der Strahlung des Feuers, aber doch nicht nur durch Berührung mit den Heizgasen von der Heizfläche übertragen, falls letztere nur einen Theil der Wand des übrigens von einer Steinwand begrenzten Heizcanals ausmacht; die von der heissen Oberfläche dieser Steinwand aus durch den Gasstrom hindurch der Heizfläche zugestrahlte Wärme kann dann vielmehr einen erheblichen Theil von Q betragen, besonders wenn die zu einer wirksamen Wärmeübertragung durch Berührung nöthige beständige Mischung der an der Heizfläche abgekühlten mit den übrigen heisseren Theilen des Gasstroms durch einen weiten Querschnitt und eine glatte Oberfläche des Heizcanals erschwert ist. Zur Beförderung eines schnellen Ersatzes der an der Heizfläche abgekühlten durch heissere Gastheile ohne erhebliche Vergrösserung des Zugwiderstandes erscheint der Vorschlag v. Reiche's* zweckmässig, die Mauerfläche des Heiz-

* „Anlage und Betrieb der Dampfkessel", S. 65.

canals mit vorspringenden Schraubengängen auszustatten. Wenn, wie bei Röhrenkesseln, die ganze Wand des Heizcanals resp. des Canalsystems als Heizfläche wirkt, so fällt die hier in Rede stehende Strahlung fort; die dadurch bedingte Verkleinerung des Transmissionscoefficienten k kann aber durch die vollkommenere Temperaturausgleichung der einzelnen Gasströme in den engeren Heizröhren, also durch Erhöhung der Contactwirkung aufgewogen werden. —

Wenn endlich die Flüssigkeit, an welche die Wärme W durch die Heizfläche übertragen wurde, selbst wieder als Wärme abgebende Flüssigkeit an einem anderen Orte verwendet werden soll, wie z. B. bei Wasser- oder Dampfheizungen von Gebäuden, so sind die dazu dienenden anderweitigen Heizflächengrössen wiederum nach den betreffenden Formeln des vorigen §. zu berechnen mit Rücksicht auf die nach §. 164 und 165 zu bestimmenden (wenn nicht unmittelbar erfahrungsmässig bekannten) betreffenden Transmissionscoefficienten k, sowie mit Rücksicht auf die sonstigen Umstände und vorgesetzten Zwecke.

C. Zugwirkung der Esse.

§. 168. Allgemeine Gleichungen.

Die Zugwirkung einer Esse, d. h. des röhrenförmigen Canals, durch welchen die Heizgase nach Ausübung ihrer Heizwirkung aufwärts strömen, um an einer höheren Stelle in die Atmosphäre zu entweichen, beruht auf dem Umstande, dass die Gassäule in der Esse ihrer höheren Temperatur wegen ein kleineres specifisches Gewicht als die äussere Luft hat, und dass deshalb der Druck dieses Gases, der oben in der Essenmündung dem atmosphärischen Luftdruck daselbst gleich ist, unten in der Esse von dem äusseren Luftdruck gleichen Niveau's übertroffen wird. Dieser Drucküberschuss bewirkt eine Luftströmung durch den Herd (die Brennstoffschicht auf dem Roste), durch den Heizcanal längs der Heizfläche und in der Esse aufwärts, deren Beharrungszustand an eine solche Geschwindigkeit gebunden ist, bei welcher die mit ihr wachsenden Bewegungswiderstände mit der jenem Ueberdruck entsprechenden bewegenden Kraft im Gleichgewicht sind. Bei Voraussetzung dieses Beharrungszustandes handelt es sich um die Beziehungen, welche zwischen den Widerständen des Herdes und des Heizcanals, der stündlich abzuführenden Gasmenge,

den Dimensionen der Esse, der Temperatur der in sie einströmenden Heizgase und der Ausflussgeschwindigkeit in der Essenmündung stattfinden.

Den Querschnitt der Esse lässt man zwar in der Regel von unten nach oben etwas abnehmen, theils um ohne erhebliche Vermehrung des Bewegungswiderstandes die Ausflussgeschwindigkeit zu vergrössern und dadurch die Wirksamkeit der Esse von dem störenden Einflusse des Windes möglichst unabhängig zu machen, theils um der frei stehenden Esse eine grössere Stabilität zu geben; indessen soll der Einfachheit wegen hier so gerechnet werden, als ob der Essenquerschnitt constant (= seinem Mittelwerth) wäre und erst oben an der Mündung eine plötzliche Verengung erführe. Es sei dann:

F dieser mittlere Querschnitt (im Lichten),

P sein Umfang,

$d = \frac{4F}{P}$ der entsprechende mittlere Durchmesser,

$A = \alpha F$ die Grösse der Mündung (event. des kleinsten Querschnitts des nach dem Ausflusse aus der Mündung contrahirten Gasstroms),

h die Essenhöhe, gerechnet von der Feuerung (dem Roste) bis zur Mündung, indem eine etwaige Ansteigung des Heizcanals klein genug im Vergleich mit der Essenhöhe zu sein pflegt, um sie dieser zurechnen zu können.

Auch die Wanddicke der Esse nimmt nach oben gewöhnlich ab, also der Wärmetransmissions-Coefficient dieser Wand zu; doch soll auch er mit einem constanten Mittelwerth k (bezogen auf die Stunde als Zeiteinheit) in die Rechnung eingeführt werden. Ferner sei:

M Kgr. die durch die Esse stündlich abzuführende Heizgasmenge,

c ihre specifische Wärme, und zur Abkürzung

$a = \frac{Mc}{kP}$ entsprechend Gl. (6), §. 109, in der es gleichgültig ist, auf welche, wenn nur auf dieselbe, Zeiteinheit k und M bezogen werden.

Weiter seien:

u_1, u_2, u die Geschwindigkeiten des Gasstroms,

H_1, H_2, H die entsprechenden Geschwindigkeitshöhen,

T_1, T, T die absoluten Temperaturen beziehungsweise unten im Anfangsquerschnitte, oben im Endquerschnitte der Esse und im Ausflussquerschnitte A. Bei der geringen Verschiedenheit der Pressungen können die Geschwindigkeiten den absoluten Temperaturen und umgekehrt den Querschnitten proportional gesetzt werden:

$$u_1 : u_2 : u = T_1 : T : \frac{T}{\alpha}.$$

Der atmosphärische Luftdruck (Kgr. pro Quadratm.) sei $= p'$ und $= p$ beziehungsweise im Niveau der Feuerung (des Rostes) und der Essenmündung, die absolute Temperatur der dazwischen liegenden Luftschicht $= T'$, ihr mittleres specifisches Gewicht also mit hinlänglicher Annäherung $= \frac{p'}{RT'}$, unter R ($= 29{,}4$ bei mittlerer Feuchtigkeit) die Constante der Zustandsgleichung (§. 17) verstanden, indem der verhältnissmässige Unterschied von p' und p viel weniger beträgt, als die Veränderlichkeit von T' und die Unsicherheit der meisten bei der folgenden Rechnung zu benutzenden Erfahrungscoefficienten. Es ist dann also

$$p' - p = \frac{p'}{RT'}\,h; \quad \frac{p}{p'} = 1 - \frac{h}{RT'}.$$

Ist ferner die Pressung im Feuerraume $= p_0$, die Pressung der Heizgase in der Esse am unteren Ende $= p_1$, am oberen vor dem Ausfluss aus der Mündung $= p_2$, und setzt man

$$\frac{p_0}{p'} = 1 - \delta_0, \quad \frac{p_1}{p_0} = 1 - \delta_1, \quad \frac{p_2}{p_1} = 1 - \delta_2, \quad \frac{p}{p_2} = 1 - \delta,$$

so ist mit Rücksicht darauf, dass δ_0, δ_1, δ_2 und δ sehr kleine Brüche sind, auch

$$\frac{p}{p'} = 1 - \delta_0 - \delta_1 - \delta_2 - \delta, \quad \text{also} \quad \frac{h}{RT'} = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta$$

$$h = h_0 + h_1 + h_2 \text{ mit } h_0 = RT'\delta_0,\ h_1 = RT'\delta_1,\ h_2 = RT'(\delta_2 + \delta).$$

Diese Höhen h_0, h_1 und h_2 sind die Bestandtheile der Essenhöhe h, welche beziehungsweise dazu dienen, die Bewegung der Verbrennungsluft (durch die Brennstoffschicht auf dem Roste) in den Feuerraum, sowie der Heizgase im Heizcanal und in der Esse mit Rücksicht auf die betreffenden Widerstände zu unterhalten.

Die Dichtigkeit der Heizgase ist zwar von derjenigen der atmosphärischen Luft verschieden, in der Regel etwas grösser (§. 160), jedoch nicht in solchem Grade, dass mit Rücksicht auf den variablen Zustand der atmosphärischen Luft selbst und auf den Genauigkeitsgrad, den die vorliegende Untersuchung überhaupt in Anspruch nehmen kann, die Rücksichtnahme darauf hier Bedürfniss wäre. Wird dann also auch die (der Dichtigkeit umgekehrt proportionale) Constante R der Zustandsgleichung für die Heizgase ebenso wie für die äussere Luft angenommen, so ist nach §. 109, Gl. 13, bei Voraussetzung einer verticalen Esse mit $\cos\varphi = -1$ und den entsprechenden Buchstabenänderungen:

$$\delta_2 = \frac{H_1}{R T_1} \left[\lambda \frac{T'}{T_1} \frac{h}{d} + \left(2 - \lambda \frac{a}{d}\right) \frac{T - T_1}{T_1} \right] + \frac{1}{R T'} \left(h + a l n \frac{T}{T_1}\right)$$

und nach §. 108, Gl. (9) bei Abstraction von einem besonderen Widerstand in Betreff des Ausströmens aus der Essenmündung A:

$$\delta = \frac{\frac{1}{\alpha^2} - 1}{\frac{RT}{H_2} - \frac{2}{\alpha^2}} = \frac{H_2}{RT}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right),$$

da $\frac{RT}{H_2}$ im Vergleich mit $\frac{2}{\alpha^2}$ eine grosse Zahl ($H_2 < 1$ Mtr.) ist, oder auch wegen

$$H_2 : H_1 = u_2^2 : u_1^2 = T^2 : T_1^2$$

$$\delta = \frac{H_1 T}{R T_1^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) = \frac{H_1 T'}{R T_1^2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)\frac{T}{T'}.$$

Hiernach ergiebt sich:

$$\delta_2 + \delta = \frac{H_1 T'}{R T_1^2}\left[\lambda \frac{h}{d} + \left(2 - \lambda \frac{a}{d}\right)\frac{T - T_1}{T'} + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)\frac{T}{T'}\right] + \frac{1}{RT'}\left(h + a l n \frac{T}{T_1}\right)$$

und somit $h_2 = RT'(\delta_2 + \delta)$, wenn noch mit

$$H' = H_1 \left(\frac{T'}{T_1}\right)^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{\gamma' F}\right)^2; \quad m = \frac{M}{3600} \quad \ldots\ldots 1$$

die Geschwindigkeitshöhe bezeichnet wird, mit der die Heizgase (m Kgr. pro Secunde) den Querschnitt F durchströmen würden, wenn ihre absolute Temperatur $= T'$ und ihr specifisches Gewicht entsprechend $= \gamma'$ wäre:

$$h_2 = H' \left[\lambda \frac{h}{d} + \left(\lambda \frac{a}{d} - 1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{T_1 - T}{T'} + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)\frac{T_1}{T'}\right] + h + a l n \frac{T}{T_1}$$

In dieser Gleichung ist T von h abhängig, nämlich nach §. 109, Gl. (9):

$$T = T' + (T_1 - T')e^{-\frac{h}{a}} = T_1 - (T_1 - T')\left(1 - e^{-\frac{h}{a}}\right)$$

oder $\quad T = T_1 - (T_1 - T')f(h)$ mit $f(h) = 1 - e^{-\frac{h}{a}} \quad \ldots\ldots 2$

wodurch nun die Gleichung: $h_0 + h_1 + h_2 = h$ die Form erhält:

$$h_0 + h_1 + H' \left[\lambda \frac{h}{d} + \left(\lambda \frac{a}{d} - 1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{T_1 - T'}{T'} f(h) + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)\frac{T_1}{T'}\right.$$

$$= -a\ln\left[1 - \frac{T_1 - T'}{T_1} f(h)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Endlich ist die Ausflussgeschwindigkeit:

$$u = \frac{m}{\gamma A} \text{ mit } \gamma = \gamma' \frac{T'}{T}, \text{ also } u = \frac{m}{\gamma' A}\frac{T}{T'} \ldots\ldots (4).$$

Der Rechnungsgang bei Benutzung dieser Gleichungen ist natürlich von der besonderen Form der Aufgabe abhängig, d. h. verschieden jenachdem diese oder jene der verschiedenen Elemente gegeben sind oder gesucht werden. Wären z. B. ausser $M = 3600$ *m*, h_0 und h_1 auch h und u, ferner die Gestaltung und Wandbeschaffenheit der Esse (Querschnittsform, Verjüngsverhältniss innen und aussen, Herstellungsmaterial) insoweit gegeben, dass durch h und A auch F, P und k bestimmt sind, und würden dann A und T_1 gesucht, so fände man mit den Umständen gemäss angenommenen Werthen von c, T', γ', λ und mit einem versuchsweise angenommenen Werth von A zunächst F, α, P, d, k und a, dann H' nach Gl. (1), T_1 aus Gl. (3), T aus Gl. (2) und u aus Gl. (4). Wäre dieser Werth von u zu klein oder zu gross, so wäre mit einem entsprechend kleineren oder grösseren A die Rechnung zu wiederholen bis die resultirende Ausflussgeschwindigkeit u von der verlangten sich hinlänglich wenig verschieden ergiebt. Ergiebt sich indessen u nur mässig zu klein, so genügt es, die Esse sich nur an ihrem oberen Ende bis zu einem entsprechend kleineren Mündungsquerschnitte verengen zu lassen ohne im Uebrigen die zuletzt gefundenen Elemente zu ändern. —

Von den Grössen h_0 und h_1 ist erstere im Falle einer mit festem Brennstoff beschickten Rostfeuerung natürlich um so grösser, je grösser die Schichtdicke des Brennstoffs auf dem Roste und je kleiner, auch je ungleichartiger seine Stückgrösse ist; der dieser Grösse h_0 in einem gegebenen Falle zukommende, offenbar auch sehr wesentlich vom Verhalten des Brennstoffs in der Hitze, insbesondere z. B. von der Backfähigkeit einer Steinkohle abhängige Werth ist indessen nur sehr unsicher anzugeben, und wird dadurch vorzugsweise eine zuverlässige Vorausbestimmung der Zugwirkung unter gegebenen Umständen beeinträchtigt.

Was die Höhe h_1 betrifft, so seien T_0 und T_1 die absoluten Temperaturen, H_0 und H_1 die Geschwindigkeitshöhen des Gasstroms beziehungsweise am Anfang und Ende des Heizcanals von der Länge l, und es mögen in Beziehung auf denselben F_1, d_1, a_1 und λ_1 dieselben Bedeutungen haben wie F, d, a und λ in Betreff der Esse. Unter der Voraussetzung, dass jenseits der Heizfläche eine constante absolute Tem-

peratur $= T_1'$ stattfindet (oder wenn diese näherungsweise mit einem Mittelwerth $= T_1'$ in die vorliegende Rechnung eingeführt wird), wäre dann nach §. 109, Gl. (13) mit $\cos\psi = 0$ und abgesehen zunächst von besonderen Widerständen:

$$\delta_1 = \frac{H_0}{RT_0}\left[\lambda_1 \frac{T_1'}{T_0}\frac{l}{d_1} + \left(2 - \lambda_1 \frac{a_1}{d_1}\right)\frac{T_1 - T_0}{T_0}\right].$$

Besondere Widerstände, verursacht durch plötzliche Querschnitts- und Richtungsänderungen, können besonders am Anfang und Ende des Heizcanals (bei der Feuerbrücke und an der Stelle des Zugschiebers im Fuchs) vorkommen; andere können mit einer hier meistens genügenden Annäherung wenigstens so in Rechnung gebracht werden, als ob sie am Anfang oder Ende stattfänden. Beim Uebergang der Heizgase aus dem Feuerraum in den Heizcanal findet zugleich eine dauernde Querschnittsverminderung, also Geschwindigkeitszunahme statt, in Betreff welcher so gerechnet werde, als ob die Geschwindigkeit im Feuerraum = Null wäre. Sind dann ζ_0 und ζ_1 die resultirenden Widerstandscoefficienten am Anfang und Ende des Heizcanals, so ist nach §. 108, Gl. (9) dem obigen Ausdruck von δ_1 hinzuzufügen:

$$(1 + \zeta_0)\frac{H_0}{RT_0} \text{ und } \zeta_1 \frac{H_1}{RT_1} = \zeta_1 \frac{H_0}{RT_0}\frac{T_1}{T_0}$$

und wird dann

$$\delta_1 = \frac{H_0}{RT_0}\left[\frac{(1 + \zeta_0)T_0 + \zeta_1 T_1}{T_0} + \lambda_1 \frac{T_1'}{T_0}\frac{l}{d_1} + \left(2 - \lambda_1 \frac{a_1}{d_1}\right)\frac{T_1 - T_0}{T_0}\right]$$

und schliesslich $h_1 = RT'\delta_1$ mit $H_0\left(\frac{T'}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{\gamma' F_1}\right)^2$

= der Geschwindigkeitshöhe, mit der das Gasgemenge denselben Querschnitt F_1 durchströmen würde, wenn seine Temperatur $= T'$ wäre,

$$h_1 = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{\gamma' F_1}\right)^2\left[\frac{(1+\zeta_0)T_0 + \zeta_1 T_1}{T'} + \lambda_1 \frac{l}{d_1}\frac{T_1'}{T'} + \left(\lambda_1 \frac{a_1}{d_1} - 2\right)\frac{T_0 - T_1}{T'}\right] \quad (5)$$

Wenn die Heizgase mehrerer Feuerungen durch eine gemeinschaftliche Esse abgeführt werden sollen, haben m in den Gleichungen (1) und (4), T_1 in den Gleichungen (2) und (3) nicht dieselben Bedeutungen wie in Gl. (5); vielmehr ist dann m dort die Summe der einzelnen m von Gl. (5) und T_1 dort die Mischungstemperatur der von den einzelnen Feuerungen mit vielleicht verschiedenen Temperaturen in der Esse zusammenströmenden Gasgemenge. Wenn in solchem Falle $h_0 + h_1$ für die verschiedenen Feuerungen nicht gleich ist, so ist dafür in Gl. (3) der grösste dieser verschiedenen Werthe zu setzen; die Zug-

schieber der übrigen Feuerungen müssten dann so eng gestellt werden, dass (durch die hierdurch bedingte Vergrösserung des Widerstandscoefficienten ζ_1, also der Höhe h_1) jenes Maximum von $h_0 + h_1$ auch bei ihnen erreicht würde. Um das Bedürfniss solch' unerwünschter theilweiser Vermehrung des Zugwiderstandes zu vermeiden, sollten nur solche Feuerungen mit einer gemeinschaftlichen Esse verbunden werden, bei denen $h_0 + h_1$ unter normalen Umständen bei ganz geöffneten Zugschiebern nahe gleich gross ist.

§. 169. Erfahrungswerthe.

Die Anwendung der allgemeinen Gleichungen des vorigen §. erfordert die erfahrungsmässige Annahme einiger Elemente in Betreff der Bewegungswiderstände des Gasstroms und der Wärmetransmission durch die Essenwand.

1) Für den Coefficienten λ (resp. λ_1) des Leitungswiderstandes sind die Erfahrungen in Betreff der Bewegung kalter Luft in ziemlich glattwandigen cylindrischen Röhren bei grösseren Geschwindigkeiten (über 20 Mtr. pro Secunde), denen zufolge im Durchschnitt etwa $\lambda = 0{,}025$ gesetzt werden kann, wachsend mit abnehmender Geschwindigkeit (§. 106), hier nicht ohne Weiteres maassgebend. Die Geschwindigkeit ist hier viel kleiner, höchstens etwa 4 Mtr. pro Secunde, die mehr oder weniger mit Russ bedeckten Wände sind rauher, und durch die erhebliche Wärmetransmission der Wände werden in weit höherem Grade mannigfach unregelmässige, die Temperaturausgleichung vermittelnde und mit inneren Reibungen verbundene Mischungsbewegungen verursacht. Alle diese Umstände bedingen eine Vergrösserung von λ, und es mag mit Péclet zunächst für gemauerte Wände $\lambda = 0{,}08$ gesetzt werden, ein Werth, den auch andere Autoren* in Ermangelung anderweitiger Anhaltspunkte einstweilen angenommen haben. Für Metallwände (Essen von Eisenblech, Heizröhren bei Röhrenkesseln) mag λ resp. λ_1 etwas kleiner zu setzen sein, doch ist die Beschaffenheit der Wand an sich um so weniger von Einfluss, je mehr sie mit Russ bedeckt ist.

Was den Einfluss besonderer Widerstände betrifft, so kann (§. 108) der betreffende Widerstandscoefficient für eine plötzliche Rich-

* Morin, études sur la ventilation, Paris 1863 und H. Valérius, les applications de la chaleur, Bruxelles 1867.

tungsänderung des Gasstroms um einen rechten Winkel zu $\zeta = 0{,}8$ bis 1 veranschlagt, für eine plötzliche Querschnittsänderung nach §. 92, Gl. (1, ebenso wie bei Wasser beurtheilt werden.

2) Den Widerstand, den die Brennstoffschicht auf dem Roste dem Durchgang der Luft entgegensetzt, suchte Péclet dadurch zu bestimmen, dass er durch Vergleichung der vermittels eines Anemometers gemessenen Strömungsgeschwindigkeit mit seiner theoretischen Formel für dieselbe den Gesammtwiderstand ermittelte und davon die mit Hülfe angenommener Coefficienten berechneten übrigen Widerstände in Abzug brachte. Eine befriedigende Zuverlässigkeit lässt indessen dieses indirecte Verfahren, wobei zudem die Temperaturänderungen des Gasstroms nur sehr unvollkommen veranschlagt wurden, kaum erwarten. Unmittelbarer und sicherer ist der in Rede stehende Widerstand durch Messung der Druckdifferenz $p'-p_0$ (§. 168) bei geschlossener Heizthür mit Hülfe eines Wassermanometers zu bestimmen, von welchem der eine (eiserne) Schenkel, die Herdwand oberhalb des Rostes luftdicht durchdringend, mit dem Feuerraum, der andere ausserhalb mit der Atmosphäre communicirt. In wünschenswerther Zuverlässigkeit und zur Ableitung empirischer Gesetze ausreichender Mannigfaltigkeit sind derartige Messungen bisher nicht bekannt geworden. Nach Ser* soll die Druckdifferenz $p'-p_0$ bei Rostfeuerungen zu technischen Zwecken (insbesondere vermuthlich bei Steinkohlenfeuerungen für Dampfkessel, Siedepfannen etc.) mit sogenanntem natürlichem, d. h. durch eine Esse vermitteltem Luftzuge einer Wassersäule von $\Delta = 5$ bis 20 Millim. entsprechen, bei Locomotivfeuerungen aber (mit viel grösserer Schichthöhe und intensiverem Luftzuge durch Vermittelung des Blasrohrs) einer bis $\Delta = 100$ Millim. betragenden Wassersäule. Bei dieser Bedeutung von Δ ist auch

$$p'-p_0 = \Delta \text{ Kgr.},$$

also $\frac{p_0}{p'} = 1 - \delta_0 = 1 - \frac{\Delta}{p'}$; $h_0 = RT'\delta_0 = \frac{RT'}{p'}\Delta = \frac{\Delta}{\gamma'}$

und wenn das specifische Gewicht γ' der äusseren Luft zu durchschnittlich 1,25 Kgr. pro Cubikm. angenommen wird,

$$h_0 = \frac{4}{5}\Delta = 4 \text{ bis } 16 \text{ Mtr. bei natürlichem Luftzuge,}$$

resp. bis 80 Mtr. bei Locomotivfeuerungen.

Die Strömung der Luft durch die Brennstoffschicht kann der Be-

* „Cours de physique industrielle de l'école centrale à Paris“ par H. Valérius, les applications de la chaleur, Bruxelles 1867, p. 99.

wegung des Wassers durch Sandfilter verglichen, und deshalb analog Gl. (2) in §. 98 vermuthlich ziemlich zutreffend

$$\frac{M}{R} = x\frac{h_0}{b} - y\left(\frac{h_0}{b}\right)^2$$

gesetzt werden, unter M die Gewichtsmenge der stündlich entwickelten Heizgase (nicht sehr verschieden von der stündlich zuströmenden Luftmenge), R die Grösse der Rostfläche, b die Dicke der Brennstoffschicht, und unter x, y von der Art und Beschaffenheit des Brennstoffs abhängige Coefficienten verstanden, von denen y erheblich $< x$ ist. Bei Weglassung des Gliedes mit y, und wenn mit G Kgr. die Gasmenge pro 1 Kgr. Brennstoff, mit B_1 die von letzterem pro Quadratm. Rostfläche stündlich verbrannte Menge bezeichnet wird, wäre also

$$h_0 \text{ proportional } \frac{M}{R}b = GB_1 b$$

zu setzen, und wenn bei gleich guter Verbrennung B_1 proportional $b - b_0$ (§. 162, Gl. 1), hier aber einfacher B_1 proportional b gesetzt wird,

$$h_0 \text{ proportional } Gb^2,$$

nach den obigen Angaben für Steinkohlenfeuerungen im Durchschnitt etwa:

$$h_0 = 25\,Gb^2, \text{ entsprechend } h_0 = 4 \text{ für } b = 0{,}08 \text{ und } G = 25$$

$$h_0 = 80 \quad \text{„} \quad b = 0{,}45 \quad \text{„} \quad G = 16.$$

Für eine bei natürlichem Luftzuge im Mittel zu $b = 0{,}1$ anzunehmende Schichthöhe der Steinkohle und mit $G = 22$ (entsprechend $m = 2$, §. 160) wäre $h_0 = 5{,}5$ Mtr.

3) Was endlich den Wärmetransmissions-Coefficienten k betrifft, von dem die Constante $a = \dfrac{Mc}{kP}$ abhängt, so sind die beiden Fälle einer gemauerten und einer Esse von Eisenblech zu unterscheiden. In beiden hängt k ausser von den Dimensionen streng genommen auch von der Temperatur in der Esse ab, in welcher Hinsicht hier jedoch mittlere Verhältnisse vorausgesetzt werden vorbehaltlich einer schätzungsweisen Vergrösserung oder Verkleinerung von k, jenachdem die Temperatur in der Esse ungewöhnlich hoch oder niedrig ist.

Wenn im Falle einer gemauerten Esse von kreisförmigem oder quadratischem Querschnitt d und D beziehungsweise (im Mittel) den inneren und äusseren Durchmesser oder die innere und äussere Quadratseite bedeuten, wo dann in beiden Fällen d auch der sogenannte mittlere Durchmesser $= \dfrac{4F}{P}$ ist, so kann nach §. 164, Gl. (5) und (6)

$$kP = \frac{\pi \text{ resp. } 4}{\frac{1}{\alpha d} + \frac{1}{\alpha' D} + \frac{1}{2\lambda} ln \frac{D}{d}}$$

gesetzt werden. Was die darin den Coefficienten α, α' und λ im Durchschnitt beizulegenden Werthe betrifft, so sei an irgend einer Stelle der Esse: t die Temperatur der Heizgase, τ die innere, τ' die äussere Oberflächentemperatur der Wand, t' die äussere Lufttemperatur, $\Delta = t - \tau$, $\Delta' = \tau' - t'$; es verhält sich dann:

$$\Delta : \Delta' : \tau - \tau' = \frac{1}{\alpha d} : \frac{1}{\alpha' D} : \frac{1}{2\lambda} ln \frac{D}{d}.$$

Indem nun der Wärmeübergang an der inneren Wandfläche nur durch Berührung mit den Heizgasen vermittelt wird, da die Strahlung hier zwischen Wänden von gleicher Oberflächentemperatur τ stattfindet und deshalb wirkungslos ist, kann nach §. 165, Gl. (7)

$$\alpha = b\,(1 + 0{,}0075\,\Delta) \text{ etwa } = 7$$

gesetzt werden, entsprechend $b = 5$ und $\Delta = 53^0$. (Durch Ansatz von Russ wird zwar b verkleinert; in Folge der intensiven Bewegung an der inneren Essenwand mag aber gleichwohl diesem Coefficienten ein verhältnissmässig grosser Werth beizulegen sein.) Der Wärmeaustritt aus der Essenwand erfolgt durch Leitung und Strahlung unter solchen Umständen, dass nach §. 165, Gl. (8)

$$\alpha' = b + s + \frac{75b + 56s}{10000}\,\Delta' \text{ etwa } = 9$$

in runder Zahl gesetzt werden kann. Indem nämlich

$$\Delta' = \frac{\alpha d}{\alpha' D}\,\Delta = 16^0 \text{ mit } \alpha = 7,\ \alpha' = 9,\ \Delta = 53^0 \text{ und } \frac{d}{D} = \frac{2}{3}$$

(als ungefährem Mittelwerth dieses letzteren Verhältnisses) sich ergiebt und $s = 3{,}6$ (nach den Angaben in §. 165) zu setzen ist, entspricht der Annahme $\alpha' = 9$ der vermuthlich nahe zutreffende Werth $b = 4{,}5$.

Den grössten Einfluss auf den Transmissionscoefficienten k hat bei gemauerten Essen der Leitungscoefficient λ der dicken Wand. Besteht dieselbe aus Ziegelstein, so lässt sich erwarten, dass die Angabe $\lambda = 0{,}7$ für gebrannten Thon (§. 165) auch hier nahe zutreffend sein werde; doch mag die Beschaffenheit der Ziegel von erheblichem Einflusse, insbesondere für sehr hartgebrannte glasige Ziegel λ grösser sein. Aus einer Beobachtung von Brix in Betreff der Temperaturabnahme von unten bis oben in einer aus Ziegelstein gemauerten quadratischen Esse liess sich (freilich bei Ergänzung der unvollständigen Angaben durch einige mehr oder weniger unsichere Annahmen)

$$kP = 4{,}8 \text{ für } d = 0{,}54 \text{ und } D = 3d = 1{,}62 \text{ Mtr.}$$

folgern*, und würde dann mit $\alpha = 7$, $\alpha' = 9$ aus der Gleichung

$$\frac{4}{\frac{1}{7 \cdot 0{,}54} + \frac{1}{9 \cdot 1{,}62} + \frac{1}{2\lambda} \ln 3} = 4{,}8 \text{ sich ergeben: } \lambda = 1{,}1.$$

Ein überwiegendes Gewicht kommt indessen dieser vereinzelten und theilweise unsicheren Bestimmung nicht zu, und mag bis auf Weiteres für Essen aus Ziegelmauerwerk $\lambda = 0{,}8$ geschätzt werden. Sie sind solchen aus Bruchstein deshalb vorzuziehen, weil für diese λ noch grösser, also die Schwächung des Zuges durch Abkühlung der Heizgase beträchtlicher ist.

Noch grösser ist die Abkühlung in Essen von Eisenblech. Für solche kann nach §. 164, Gl. (10):

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}$$

und dabei nach §. 165, Gl. (3):

$$\alpha = 0{,}55\, b\, (t - \tau)^{0{,}233}$$

$$\alpha' = 0{,}55\, b\, (\tau' - t')^{0{,}233} + 125\, s\, \frac{1{,}0077^{\tau'} - 1{,}0077^{t'}}{\tau' - t'}$$

gesetzt werden mit $b = 5$, $s = 2{,}8$ und unter t, τ, τ', t' wieder die oben erklärten Temperaturen verstanden, die hier in den Beziehungen stehen:

$$\alpha(t - \tau) = \alpha'(\tau' - t') \text{ und } \tau = \tau'.$$

Hieraus findet man z. B. mit $t' = 20^0$:

$$k = 5{,}2 \text{ für } t - t' = 250^0,\quad k = 5{,}6 \text{ für } t - t' = 330^0.$$

Nach anderen Angaben ist in diesem Falle k noch grösser zu schätzen, insbesondere nach Redtenbacher $k = 7$ (freilich ohne Nachweis der Herleitung dieses Werthes); im Folgenden mag durchschnittlich $k = 6$ angenommen werden.

§. 170. Beispiele und Näherungsformeln.

Das in §. 168 erklärte Verfahren zur Berechnung von $t_1 (= T_1 - 273)$ und A bei gegebenen Werthen von M, $h_0 + h_1$, h und u ist infolge der Unmöglichkeit, die gesuchten Grössen aus den zu benutzenden Glei-

* Siehe des Verfassers Aufsatz über „die Zugerzeugung durch Schornsteine“ in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1866, S. 456.

chungen (1) bis (4) daselbst explicite zu entwickeln, sehr zeitraubend. Zur Erleichterung des technischen Gebrauchs ist deshalb die Ausführung der Rechnung für eine Reihe von Beispielen dienlich, um die Resultate dann entweder unmittelbar (durch geeignete Interpolation) zur Beurtheilung anderweitiger specieller Fälle oder zur Ableitung von technisch brauchbaren Näherungsformeln zu verwerthen.

Unter Bezugnahme auf die in §. 168 erklärte Bedeutung der Buchstaben und mit Rücksicht auf die Angaben im vorigen §. ist bei den folgenden Rechnungen

$$u = 4 \text{ Mtr. pro Sec.}, \; t'(= T' - 273) = 20^{\circ},$$

$$c = 0{,}25; \quad \gamma' = 1{,}2 \left(= 1{,}2932 \frac{757}{760} \frac{273}{293}\right); \; \lambda = 0{,}08$$

angenommen worden, ferner für quadratische gemauerte Essen:

$$\left.\begin{array}{l} d = \sqrt{A} + 0{,}007\,h; \quad D = d + 0{,}36 + 0{,}016\,h \\ F = d^2; \quad \frac{1}{kP} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7d} + \frac{1}{9D} + \frac{1}{1{,}6}\, ln \frac{D}{d}\right) \end{array}\right\} \dots 1$$

und für runde eiserne Essen:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} + 0{,}006\,h; \quad F = \frac{\pi d^2}{4}, \; P = \pi d; \; k = 6 \; \dots 2.$$

Zur Ableitung vorläufiger Näherungswerthe von t_1 resp. T_1 und A in irgend einem speciellen Fall wurde zunächst

$k = 0$ und $F = A$, also $\alpha = 1$, $a = \infty$, $f(h) = 0$, $T = T_1$

angenommen. In Gl. (3), §. 168, war dann nach den Gleichungen 1 und (4) daselbst ferner

$$H' = \frac{1}{2g}\left(\frac{m}{\gamma' A}\right)^2 = \frac{u^2}{2g}\left(\frac{T'}{T_1}\right)^2$$

und $$a\,f(h) = \infty . 0 = a\left(1 - e^{-\frac{h}{a}}\right) = a\left(1 - 1 + \frac{h}{a}\right) = h$$

zu setzen, wodurch sie die Form erhält:

$$h_0 + h_1 + \frac{u^2}{2g}\left(\frac{T'}{T_1}\right)^2\left(\lambda \frac{h}{d} + \lambda \frac{h}{d} \frac{T_1 - T'}{T'}\right) = \frac{T_1 - T'}{T_1} h$$

$$h_0 + h_1 + \frac{u^2}{2g} \frac{T'}{T_1} \lambda \frac{h}{d} = h - \frac{T'}{T_1} h.$$

Hieraus ergiebt sich, da nach §. 168, Gl. (4) mit $F = A$, $T = T_1$

bei quadratischem Querschnitt $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{A} = \frac{u\gamma'}{m} \frac{T'}{T_1}$

bei kreisförmigem Querschnitt $\frac{1}{d^2} = \frac{\pi}{4A} = \frac{\pi u \gamma'}{4m} \frac{T'}{T_1}$

ist, mit der abgekürzten Bezeichnung

$$C = \left(\frac{u^2}{2g}\lambda\right)^2 . 3600\, u\gamma' \text{ resp. } \left(\frac{u^2}{2g}\lambda\right)^2 . 3600 . \frac{\pi}{4} u\gamma'$$

$$\frac{T'}{T_1} h \left(1 + \frac{u^2}{2g}\frac{\lambda}{d}\right) = \frac{T'}{T_1} h \left(1 + \sqrt{\frac{C}{M}\frac{T'}{T_1}}\right) = h - h_0 - h_1.$$

Mit $u = 4$, $\lambda = 0{,}08$, $\gamma' = 1{,}2$ und $g = 9{,}81$ findet man $C = 73{,}5$ bei quadratischem, $C = 57{,}8$ bei kreisförmigem Querschnitt, und da bei den folgenden Beispielen M wenigstens $= 1000$ angenommen wurde, war

$$\sqrt{\frac{C}{M}} \text{ höchstens } = \sqrt{0{,}0735} = 0{,}27$$

und um so mehr $\sqrt{\frac{C}{M}\frac{T'}{T_1}}$ ein hinlänglich kleiner Bruch, um darin der obigen Gleichung zufolge

$$\frac{T'}{T_1} = \frac{h - h_0 - h_1}{h}$$

setzen zu können, besonders wenn der Fehler dieses etwas zu grossen Werthes durch eine kleine Verminderung von C etwa auf

$$C = 72 \text{ resp. } 56$$

theilweise ausgeglichen wird. Hiernach ergiebt sich dann

$$\frac{T_1}{T'} = \frac{h}{h - h_0 - h_1} + \sqrt{\frac{C}{M}\frac{h}{h - h_0 - h_1}} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

und damit nach §. 168, Gl. (4) mit $T = T_1$ und $u = 4$, $\gamma' = 1{,}2$:

$$A = \frac{m}{u\gamma'}\frac{T_1}{T'} = \frac{M}{17280}\frac{T_1}{T'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Die durch diese Gleichungen (3) und (4) bestimmten Näherungswerthe von T_1 und A sind ausreichend genau, um damit nach vorgängiger Berechnung der entsprechenden Werthe von

$$F,\ \alpha = \frac{A}{F},\ d \text{ und } a = \frac{Mc}{kP} \text{ gemäss Gl. (1) resp. (2)}$$

$$\text{sowie von } f(h) = 1 - e^{-\frac{h}{a}} = \frac{e^{\frac{h}{a}} - 1}{e^{\frac{h}{a}}}$$

das die Bewegung in der Esse betreffende Glied von Gl. (3) in §. 168:

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{m}{\gamma' F}\right)^2 \left[\lambda\frac{h}{d} + \left(\lambda\frac{a}{d} - 1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{T_1 - T'}{T'} f(h) + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right)\frac{T_1}{T'}\right] = h' \quad (5)$$

endgültig zu berechnen, da der Fehler dieser Rechnungsweise gegen die Unsicherheit der Coefficienten λ und k verschwindet. Mit der kürzeren Bezeichnung

$$n = \frac{h_0 + h_1 + h'}{a}$$

ist dann der genannten Gleichung zufolge:

$$e^{-n} = 1 - \frac{T_1 - T'}{T_1} f(h) = e^{-\frac{h}{a}} + \frac{T'}{T_1} f(h)$$

$$\frac{T_1}{T'} = \frac{f(h)}{e^{-n} - e^{-\frac{h}{a}}} = \frac{e^{\frac{h}{a}} - 1}{e^{\frac{h}{a} - n} - 1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Mit dem hierdurch bestimmten corrigirten Werth von T_1 folgt nun aus Gl. (2), §. 168:

$$\frac{T}{T'} = \frac{T_1}{T'} e^{-\frac{h}{a}} + f(h) = \frac{T_1}{T'} e^{-n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

und damit endlich nach §. 168, Gl. (4) der corrigirte Werth

$$A = \frac{m}{u\gamma'} \frac{T}{T'} = \frac{M}{17280} \frac{T}{T'} \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

Auf diese Weise sind für gemauerte quadratische Essen und für $h_0 + h_1 = 6, 9, 12$; $h = 10, 15, 20, 25, 30$; $M = 1000, 2000, 4000, 8000$ die in der folgenden Tabelle enthaltenen Werthe von t_1 und A berechnet, unter Beifügung der entsprechenden Werthe von h', $\frac{T_1}{T'}$ und t.

$h_0 + h_1$	h	M	h'	$\frac{T_1}{T'}$	t_1	t	A	(t_1)	(A)
6	10	1000	0,316	2,884	572	479	0,148	561	0,149
„	„	2000	0,296	2,805	549	491	0,302	534	0,300
„	„	4000	0,257	2,736	529	491	0,604	515	0,602
„	„	8000	0,212	2,689	515	492	1,208	503	1,203
„	15	1000	0,557	1,880	278	221	0,097	272	0,097
„	„	2000	0,578	1,844	267	232	0,200	261	0,199
„	„	4000	0,549	1,815	259	237	0,403	252	0,401
„	„	8000	0,485	1,786	250	237	0,806	247	0,806
„	20	1000	0,644	1,585	191	144	0,082	192	0,083
„	„	2000	0,718	1,557	183	154	0,169	183	0,170
„	„	4000	0,728	1,538	178	160	0,342	177	0,344
„	„	8000	0,681	1,523	173	162	0,688	173	0,692
9	15	1000	0,343	2,902	577	441	0,141	582	0,143
„	„	2000	0,348	2,804	549	465	0,292	547	0,293
„	„	4000	0,323	2,783	528	475	0,591	525	0,592
„	„	8000	0,279	2,680	512	480	1,189	509	1,191

$h_0 + h_1$	h	M	h'	$\frac{T_1}{T'}$	t_1	t	A	(t_1)	(A)
9	20	1000	0,340	2,042	325	236	0,101	334	0,102
„	„	2000	0,404	1,985	309	254	0,208	317	0,211
„	„	4000	0,424	1,951	299	265	0,425	305	0,429
„	„	8000	0,404	1,922	290	269	0,857	297	0,868
„	25	1000	0,552	1,763	244	166	0,087	245	0,087
„	„	2000	0,645	1,712	229	183	0,180	232	0,180
„	„	4000	0,682	1,681	220	192	0,367	223	0,368
„	„	8000	0,661	1,661	214	197	0,742	217	0,746
12	20	1000	0,341	2,946	590	411	0,135	612	0,138
„	„	2000	0,370	2,816	552	444	0,283	567	0,285
„	„	4000	0,363	2,737	529	462	0,581	538	0,581
„	„	8000	0,328	2,679	512	470	1,174	518	1,175
„	25	1000	0,439	2,236	382	252	0,104	389	0,103
„	„	2000	0,511	2,142	355	277	0,217	363	0,216
„	„	4000	0,534	2,089	339	292	0,446	346	0,444
„	„	8000	0,510	2,053	329	299	0,904	335	0,903
„	30	1000	0,481	1,923	290	180	0,089	294	0,088
„	„	2000	0,584	1,841	266	201	0,187	275	0,186
„	„	4000	0,641	1,798	254	215	0,385	262	0,383
„	„	8000	0,642	1,768	245	221	0,781	254	0,782

Mit genügender Annäherung können diese und deshalb auch solche Werthe von t_1 und A, welche Werthen von $h_0 + h_1$, h und M entsprechen, die nicht viel kleiner oder grösser, als die hier beispielsweise angenommenen sind, durch die Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\frac{T'}{T_1} = 0,95 - 0,93\,\frac{h_0 + h_1}{h} - \frac{1,07 + 0,006\,(h_0 + h_1)^2}{\sqrt{M}} \quad \ldots (9)$$

$$A = \left(\frac{M}{17280} - \frac{1}{\frac{3450}{(h_0 + h_1)^2} - 13,8 + \frac{3280 - 6,9\,(h_0 + h_1)^2}{\sqrt{M}}}\right)\frac{T_1}{T'} \quad \ldots (10).$$

Zur Nachweisung ihres Annäherungsgrades sind die nach ihnen berechneten Werthe von t_1 und A in den mit (t_1) und (A) überschriebenen Columnen der Tabelle beigefügt worden.

Folgende Tabelle enthält noch die Rechnungsresultate für einige Beispiele von runden eisernen Essen. Dabei sind die Werthe von A der vorhergehenden Tabelle als Näherungswerthe statt Gl. (4) benutzt, und sind auch die Werthe von h', anstatt sie nach Gl. (5) neu zu berechnen, denen gleich gesetzt worden, welche denselben Werthen von $h_0 + h_1$, h und M

bei der gemauerten Esse entsprechen, da sich gezeigt hat, dass diese die Bewegung in der Esse selbst betreffende Grösse h' von untergeordneter Bedeutung im Vergleich mit der analogen Grösse $= h_0 + h_1$ ist, die sich auf die Bewegung in der Brennstoffschicht und im Heizcanal bezieht.

$h_0 + h_1$	h	M	t_1	t	A	ϑ_1	ϑ	(ϑ_1)	$(\vartheta$
6	15	1000	312	197	0,093	1,062	0,952	1,067	0,953
„	„	2000	290	213	0,192	1,043	0,962	1,049	0,962
„	„	4000	275	223	0,392	1,030	0,971	1,032	0,972
„	20	1000	222	124	0,078	1,067	0,952	1,067	0,953
„	„	2000	204	139	0,163	1,046	0,963	1,049	0,962
„	„	4000	192	148	0,333	1,032	0,973	1,032	0,972
9	20	1000	387	199	0,093	1,104	0,927	1,100	0,929
„	„	2000	350	225	0,196	1,071	0,943	1,073	0,943
„	„	4000	327	242	0,407	1,049	0,957	1,047	0,959
„	25	1000	303	134	0,080	1,115	0,927	1,100	0,929
„	„	2000	267	157	0,170	1,076	0,943	1,073	0,943
„	„	4000	245	172	0,352	1,052	0,958	1,047	0,958

Mit ϑ_1 ist hier das Verhältniss bezeichnet, in welchem T_1 grösser, mit ϑ das Verhältniss, in welchem T und somit A kleiner ist, als bei der gemauerten Esse für gleiche Werthe von $h_0 + h_1$, h, M und für die stets vorausgesetzte Ausströmungsgeschwindigkeit $u = 4$ Mtr. pro Sec. Diese Verhältnisse können näherungsweise gesetzt werden:

$$\vartheta_1 = 1 + \frac{30\,(h_0 + h_1)}{M + 1700} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11$$

$$\vartheta = 1 - \frac{33\,(h_0 + h_1)}{M + 3200} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 12,$$

wie die danach berechneten Zahlen in den mit (ϑ_1) und (ϑ) überschriebenen Columnen der Tabelle erkennen lassen. —

Die Annahme: $h_0 + h_1 = 9$ entspricht den durchschnittlichen Verhältnissen bei Dampfkesselfeuerungen, die im dritten Bande dieses Werkes einer specielleren Besprechung unterzogen werden sollen.

Druck von Pöschel & Trepte in Leipzig.

Berichtigungen.

S. 29. Eine Berichtigung zu §. 6 findet sich in der Anmerkung, S. 281.

S. 41, Z. 1 v. u. lies: λ statt γ.

S. 42, Z. 13 v. u. ist hinzuzusetzen: bei Voraussetzung eines constanten Werthes von λ.

S. 61, Z. 13 v. u. „ „ : wenn U nicht als wirkliche Arbeit, sondern als der Arbeitswerth von Wärme (Körperwärme) betrachtet wird.

S. 65, Z. 7—9 v. o. lies: ... liegt, und wenn auch $dS = 0$ gesetzt, d. h. von der Wärmeentwickelung durch die inneren Bewegungswiderstände vorläufig und vorbehaltlich nachträglicher Correction der Rechnungsresultate abstrahirt wird, was in Betreff der auch in den Gleichungen (1) nicht vorkommenden, auf discontinuirlichen Geschwindigkeitsänderungen beruhenden inneren Bewegungswiderstände schon deshalb nöthig ist, weil sie ...

S. 70, Z. 4 v. u. lies: .. äusserer und innerer Reibung und ..

S. 72, Z. 17 v. u. lies: ... hinsichtlich der unmittelbaren Wärmemittheilung ...

„ „ Z. 14 v. u. lies: ... Beziehung steht, indem dann die Wärmemittheilung nur mittelbar stattfindet, nämlich durch Uebergang aus der einen in die andere Aggregatform und entsprechende Expansionsarbeit vermittelt wird; zur ...

S. 119, Z. 10 v. o. ist die betreffende Gleichung an die einschränkende Bedingung geknüpft, dass mit der Ausdehnung im Sinne der Fortpflanzung keine Contraction im Sinne der Wellenfläche verbunden ist, wie es bei Flüssigkeiten zwar stets, bei festen Körpern aber nur dann der Fall ist, wenn die Wellenflächen unbegrenzte resp. geschlossene Flächen sind. Dieselbe Einschränkung erfordert der Satz, S. 120, Z. 7 und 8 v. u.: „welche in dieser Form allgemein gültig ist".

S. 137, Z. 12 v. u. Hier, nämlich bei den Gleichungen (10) ist der Umstand übersehen worden, dass Gl. (6) in §. 21 auf der Voraussetzung beruht, es sei mit der Ausdehnung im Sinne der Fortpflanzung keine Contraction im Sinne der Wellenfläche verbunden, während thatsächlich eine solche hier stattfindet, welche $\frac{1}{m}$ so gross wie jene Ausdehnung ist. Es ist also hier dv nur $1 - \frac{2}{m} = \frac{m-2}{m}$ so gross wie dort, oder dv dort $\frac{m}{m-2}$ mal so gross wie hier, so dass in der That für $\frac{dp}{dv}$ in Gl. (6), §. 21 gesetzt werden muss: $\frac{dp_1}{\frac{m}{m-2}dv} = \frac{m-2}{m}\cdot\frac{dp_1}{dv} = -\frac{K}{v}\frac{c_p}{c_v}$. Dadurch wird $w = \sqrt{gKv\frac{c_p}{c_v}} = \sqrt{g\frac{K}{\gamma}\frac{c_p}{c_v}}$.

S. 153, Z. 14 v. o. lies: m statt b.

S. 255, Z. 1 v. o. lies: einzelnen statt einzigen.

S. 317, Z. 5 v. u. lies ... durch einen verticalen Stoss ...

S. 399, Z. 6 v. u. lies: ... gesetzt werden; indem dann aber die unendlich kleinen Fehler dritter Ordnung, die bei dieser Berechnung der einzelnen Flächen begangen werden, für je zwei gegenüber liegende Flächen nur um unendlich kleine Grössen nächst höherer, also vierter Ordnung verschieden sind, werden auch die Differenzen $= df_x, df_y, df_z$, welche unendlich klein dritter Ordnung sind, bis auf unendlich kleine Fehler vierter Ordnung genau gefunden. Die um A liegenden Flächen sind also ...

S. 405, Z. 12 bis 15 v. o. lies: Bei ebenen Querschnitten sind die Bahnen äquidistante Curven, deren Krümmungsmittelpunkte in den geradlinigen Durchschnittslinien der Querschnitte liegen; die Krümmungs- und Normalcurven sind dann zwei Systeme sich rechtwinkelig schneidender Geraden, erstere normal zu den Durchschnittslinien der Querschnitte, letztere parallel mit denselben, also . .

S. 417, Z. 11 v. o. lies: $\frac{u_0^2}{2g} + M$ statt M.

S. 467, Z. 2 v. u. lies: $\frac{u^2}{2g}$ statt $\frac{2g}{u^2}$.

S. 482, Z. 11 v. u. und S. 483, Z. 15 v. u. lies: Gauckler statt Gauchler.

S. 503, Z. 9 v. u. lies: δ_1 statt ζ_1 und δ_1' statt ζ_1'.

S. 522, Z. 3 v. o. lies: p' statt p_1.

S. 527, Z. 10 v. o. lies: . . . dessen Wasseroberfläche über dem Schwerpunkte der Mündung eine Höhe hat, welche der in der Röhre dicht vor der Mündung stattfindenden Ueberdruckhöhe gleich, insbesondere also = Null ist, wenn die Röhre mit vollem Querschnitte frei ausmündet.

S. 534, Z. 13 v. o. lies: $\alpha_0 V_0 - V_1,\ \alpha_1 V_1 - V_2 \ldots$ statt $V_1 - \alpha_0 V_0,\ V_2 - \alpha_1 V_1 \ldots$

S. 560, Z. 12 v. u. lies: willkürlicher statt weniger willkürlich.

S. 572, Z. 12 v. o. lies: s statt α.

S. 638, Z. 9 v. u. lies: $\frac{1}{v_0}$ statt $\frac{1}{v}$.

S. 666, Z. 5 v. o. lies: G_s statt G.

S. 730, Z. 14 v. o. lies: „der mittleren hydraulischen Tiefe“ statt „des benetzten Querprofils“.

S. 748, Z. 10 v. o. lies: $dx = \frac{r\,dy}{\sqrt{y^2 - r^2}}$.



S. 405, Z. 12 bis 15 v. o. lies: Bei ebenen Querschnitten sind die Bahnen äquidistante Curven, deren Krümmungsmittelpunkte in den geradlinigen Durchschnittslinien der Querschnitte liegen; die Krümmungs- und Normalcurven sind dann zwei Systeme sich rechtwinkelig schneidender Geraden, erstere normal zu den Durchschnittslinien der Querschnitte, letztere parallel mit denselben, also .

S. 417, Z. 11 v. o. lies: $\frac{u_0^2}{2g} + M$ statt M.

S. 467, Z. 2 v. u. lies: $\frac{u^2}{2g}$ statt $\frac{2g}{u^2}$.

S. 482, Z. 11 v. u. und S. 483, Z. 15 v. u. lies: Gauckler statt Gauchler.

S. 503, Z. 9 v. u. lies: δ_1 statt ζ_1 und δ_1' statt ζ_1'.

S. 522, Z. 3 v. o. lies: p' statt p_1.

S. 527, Z. 10 v. o. lies: ... dessen Wasseroberfläche über dem Schwerpunkte der Mündung eine Höhe hat, welche der in der Röhre dicht vor der Mündung stattfindenden Ueberdruckhöhe gleich, insbesondere also = Null ist, wenn die Röhre mit vollem Querschnitte frei ausmündet.

S. 534, Z. 13 v. o. lies: $\alpha_0 V_0 - V_1, \alpha_1 V_1 - V_2 \ldots$ statt $V_1 - \alpha_0 V_0, V_2 - \alpha_1 V_1 \ldots$

S. 560, Z. 12 v. u. lies: willkürlicher statt weniger willkürlich.

S. 572, Z. 12 v. o. lies: s statt α.

S. 638, Z. 9 v. u. lies: $\frac{1}{v_0}$ statt $\frac{1}{v}$.

S. 666, Z. 5 v. o. lies: G_s statt G.

S. 730, Z. 14 v. o. lies: „der mittleren hydraulischen Tiefe“ statt „des benetzten Querprofils“

S. 748, Z. 10 v. o. lies: $dx = \frac{r\,dy}{\sqrt{y^2 - r^2}}$.